不变量理论导引
（第一卷）

谭 琳 著

An Induction to Invariant Theory

浙江大学出版社

不变量理论导引

（第一卷）

谭　琳　著

浙江大学出版社

(浙)新登字 10 号

不变量理论导引

（第一卷）

谭 琳 著

责任编辑 陈晓嘉

* * *

浙江大学出版社出版

浙江大学出版社计算机中心电脑排版

杭州富阳何云印刷厂印装

浙江省新华书店经销

* * *

850×1168 32 开 4.75 印张 126 千字

1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001—1000

ISBN 7-308-01345-6/O・172

定价：本册 4.00 元 全套 8.00 元

前　言

本书是根据笔者 1993 年五、六月间在浙江大学高等数学研究所举办的三周"群论讲习班"和在华东师范大学数学系的一周讲座中作的讲演整理而成。本书的目的，在于向一般的数学工作者介绍不变量理论的一些基本知识。书的内容从古典不变量理论到现代不变量理论都有叙述，还包括了一些最近的研究成果。值得强调的是，由于不变量理论是既古老又仍然在活跃发展的一个领域，在较小的篇幅内，是不可能把浩瀚的内容讲得面面俱到的。笔者希望的，是通过本书用相对比较少的预备知识，把不变量理论中的几个中心问题阐述清楚，使读者对其有个初步的了解和兴趣。书中用了一些篇幅来展示不变量理论这一数学分支和别的数学分支的相互联系和影响。在论证方面，笔者作了努力，尽量把证明写得初等、易懂，避免非常高深的背景知识。书中穿插了许多例子，以求使读者对所学的理论有一点直观的感觉。书中还穿插了难易程度参差的习题，有的是为了让读者自己验证一些推导中所需要的简单事实而设计的，有的是让读者在念完一个结果后对某个特例进行验证，以深化印象和理解。每章末尾都有注记，对正文作一些简单的评注并给出参考文献。

在本书的准备过程中，曹锡华教授给予了很多的关心、指导和鞭策。在今年春节越洋电话中谈到"群论讲习班"的筹备工作时，曹先生就嘱咐要认真准备。在浙大期间，曹先生还带病听讲，对讲稿提出了修改意见。本书的问世，无疑和他的努力分不开。在讲稿准备期间，葛甦(Sebastian Koh)教授阅读了部分章节，对讲稿提出了

不少中肯的建议，对笔者也常有勉励、鞭策和提携，使笔者受益匪浅。“群论讲习班”的听众，特别是时俭益教授，在笔者的讲授过程中提出了许多建议，使本书比讲稿有所改进。笔者在此特向他们致以由衷的谢意。

这次参加浙江大学高等数学研究所的“群论讲习班”及本书的出版，受到国家自然科学基金、浙江大学出版基金和美国 West Chester 大学 CASSDA 奖的慷慨资助，在此予以感谢。在浙大期间，受到多位同仁的帮助接待。金怀阳同志打印了本书的手稿并多次修改勘误。在华东师大期间，受到曹锡华、王建磐、时俭益、陈志杰等教授的热情接待。在此，对他们一并致谢。

另外，在杭期间，谭薇和缪梨对笔者和小女若冰提供了许多帮助和方便。没有她们，笔者就不可能顺利地完成讲习班的讲授任务。感激之情，是不能用文字表达的。最后，还要感谢侯军给予的勉励和在杭期间多方面的照应、帮助。

谭　　琳

一九九三年十月十五日

于美国宾夕法尼亚州尤可兰镇

费尔曼路 537 号“未有草堂”

目　　录

第一章　引　　言

不变量理论研究数学对象中那些在群作用下保持不变的量，它是数学中的一个很重要的分支，有相当广泛的应用，并和许多别的数学分支有着不可分割的联系。

在这一章里，我们先从一批比较简单的例子着手，以求对不变量理论有个笼统、大概的感性认识，也为后面抽象研究的理性认识打下基础．古人云："形而上者谓之道，形而下者谓之器．"[1] 我们从"器"开始，对这些例子有一个初步的了解后，学"道"就会显得自然、应手了．

§1.　基本概念

我们先回顾一下群在集合上的作用．

设 G 是一个群，S 是一个(非空)集合．如果有一个映射 $\varphi: G\times S\to S$，满足：

(1) 对任意的 $s\in S$，$\varphi(1,s)=s$；

(2) 对任意的 $s\in S$，$g_1,g_2\in G$，$\varphi(g_1,\varphi(g_2,s))=\varphi(g_1g_2,s)$，

我们称 φ 是 G 在 S 上的一个作用(或称 G 作用在 S 上)．

为了符号简便起见，我们把 $\varphi(g,s)$ 简记为 $g.s$，或者当没有疑问时记为 gs．S 中在 G 作用下保持不变的元素(称为不动点)全体，称为(这一作用的)不变量，记为 S^G，换句话说，

$$S^G=\{s\in S\mid g.s=s,\ \forall\ g\in G\}.$$

另一方面,给定 S 中的一个元素 s,我们可以考虑它的轨道

$$G.s=\{g.s\mid g\in G\}.$$

相异的轨道构成 S 的一个划分,这些轨道是由 G 作用定义的等价关系 $\sim$ ($s\sim s'\Leftrightarrow\exists\ g\in G, g.s=s'$)的等价类,由此产生的等价类集合(轨道集合)记为 S/G.

在许多数学问题中,群作用所牵涉到的集合 S 往往还具有别的结构,群 G 也不光是抽象群. 在代数几何所讨论的问题中,S 通常是一个簇,而 G 是一个代数群. G 在 S 上的作用由一个态射(可以理解为"多项式"映射)φ 给出. 这样的作用称为有理作用[2]. 于是,一个很自然的问题就油然而生了:S/G 是否也可以赋予代数几何的结构(簇、仿射簇、射影簇、……)?这是所谓的几何不变量理论研究的问题,即用代数几何的结构来把某些代数几何结构在一些自同构群下的分类参数化[3].

如果读者希望复习有关簇论的基本概念和事实,可以参看:

(1)D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*. Lecture Notes in Math., Vol. **1358**, Springer-Verlag, 1988.(第 I 章)

(2)王建磐,代数几何学基础 —— 簇论. 华东师范大学数学系,1992.

有关代数群的基本知识,读者可以参看:

(1)A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, second enlarged edition. Springer-Verlag, 1991.

(2)J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*. Springer-Verlag, 1975. (corrected second printing, 1981).

(3)R. Steinberg, *Conjugacy Classes in Algebraic Groups*. Lecture Notes in Math., Vol. **366**, Springer-Verlag, 1974.

我们所需要的上述两方面的基本事实,收集在本书第二卷末的附录中.

设 k 是一个代数闭域[4]，S 是 k 上的一个仿射簇，考虑 S 上的正则函数全体所构成的 k 代数 $A = k[S]$. A 是一个仿射代数(有限生成的 k 代数且无幂零元). G 在 S 上的有理作用诱导出 G 在 A 上的作用：对 $f \in A$, $G \in G$, $s \in S$，用 $(g.f)(s) = f(g^{-1}.s)$ 定义 $g.f$.

不难验证，每个 $f \in A$ 都包含在一个有限维 G 子空间中. 我们称这一性质为局部有限性质. 换句话说，A 是有限维 G 子空间的并. 根据定义，A 中的不变量

$$\begin{aligned} A^G &= \{f \in A \mid g.f = f, \forall\ g \in G\} \\ &= \{f \in A \mid f(g.s) = f(s), \forall\ g \in G, \forall\ s \in S\}, \end{aligned}$$

即 A 中的不变量正好是那些在 S 的每一个轨道上都取常值的函数. 设 G 是约化群，S 是仿射簇(从而 A 是仿射代数)，且每个轨道都是 S 中(在 Zariski 拓扑下)的闭子集，那么，可以证明，A^G 也是仿射代数，而且 S/G 也可赋予一个自然的仿射簇的结构[5].

由此可见，不变量的研究和轨道集(及各种分类理论)的研究有着密切的内在联系.

不变量与表示理论也有着不可分割的联系[6]. 比方说，给定一个约化群 G 的 Borel 子群 B 和 B 的一个(有限维有理)表示 σ，所谓的诱导表示 $\mathrm{Ind}_B^G(\sigma)$ 可以通过不变量来定义：$\mathrm{Ind}_B^G(\sigma) = (k[G] \otimes_k \sigma)^B$. 当 σ 是 B 的一维表示时，$\mathrm{Ind}_B^G(\sigma)$ 正好是 Weyl 模的对偶模，它们对于构造 G 的不可约表示是非常重要的. 当 $\mathrm{char}(k) = 0$ 时，如果取 U 为包含在 B 中的极大幺幂子群，那么，$k[G]$ 的 U 不变量 $k[G]^U$ 是一个有理 G 模. (注意：这里 U 通过右平移，G 通过左平移作用在 $k[G]^U$ 上：$k[G]^U = \{f \in k[G] \mid f(gu) = f(g), \forall\ g \in G, u \in U\}$，对 $f \in k[G]^U$, $g \in G$, $g.f$ 仍属于 $k[G]^U$.) $k[G]^U$ 同构于所有不可约 G 模的直和，且每个同构类中的(不可约)模正好出现一次. 由于篇幅所限，很遗憾不能在这里对这一即重要又漂亮的理论详加讨论. 有兴趣的读者可参看这方面的专著[7].

接下来,我们看一些简单的例子.在后面几章的讨论中,我们还要时而回来重温这些例子.

§2.　有限群作用的两个简单例子

这一节里,我们只研究两个很简单的例子.关于有限群不变量的一些系统讨论,留待第四章再给出.

(2.1) 例　设 V 是(任意)域 k 上的 n 维仿射向量空间,$\mathrm{char}(k) \neq 2$,τ 为 V 上的对径点映射:$\tau(v) = -v$.$G = \{1,\tau\}$ 是一个二阶群.设 A 是 V 上多项式函数构成的 k 代数.如果取 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基,$x_1,\cdots,x_n$ 为对偶基,那么 $A = k[x_1,\cdots,x_n]$.G 在 V 上的作用诱导出 G 在 A 上的作用,其不变量子代数 A^G 是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的偶多项式全体.我们可以取 $x_1^2,\cdots,x_n^2,x_1x_2,\cdots,x_1x_n,\cdots,x_{n-1}x_n$ 作为 A^G 的代数生成元.而 G 在 V 中的轨道除了 $G.0 = \{0\}$ 外都由两个元素组成.当 $n = 2$ 时,可以这样看 V/G:沿从原点 O 出发的一条射线"剪开"V(图 1(a)),捅一圈之后(图 1(b))再"粘合"两条边缘(图 1(c)),重叠点算一点.(注意:这里所画的只是 $k = \mathbf{R}$ 的情形.)这样,我们就得到一个"锥面".如果读者觉得这样的图形不够严格,则可以用代数方法来支持和证实我们的直觉.(说穿了,代数几何无非是用可算的代数量来衡量、刻划几何直觉的学科,它的诞生亦出自把几何直觉严格化的要求.)当 $n = 2$ 时,$A^G = k[x_1,x_2]^G = k[x_1^2,x_1x_2,x_2^2]$.三个生成元 $z_1 = x_1^2, z_2 = x_1x_2, z_3 = x_2^2$ 之间的关系为 $z_1z_3 = z_2^2$.严格地说,在多项式代数 $k[Z_1,Z_2,Z_3]$ 中取主理想$(Z_1Z_3 - Z_2^2)$,那么 $A^G \cong k[Z_1,Z_2,Z_3]/(Z_1Z_3 - Z_2^2)$($z_i$ 是 Z_i 的像).这样,当 k 是代数闭时,A^G 是三维(仿射)空间中的锥面 C:$z_1z_3 - z_2^2 = 0$ 的坐标代数(正则函数代数),而 V/G 该和这个锥面相等同.(注意:当

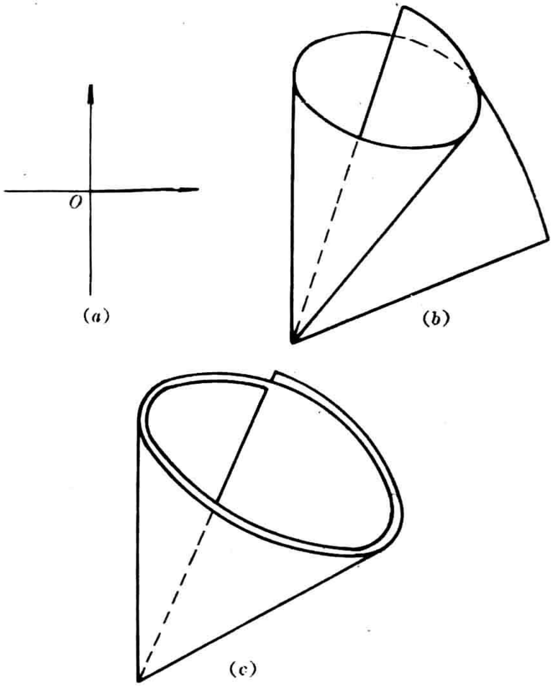

图 1

$k=\mathbf{R}$ 时，锥面只有一支，因为 $z_1,z_3\geqslant 0$）具体地看，我们给出一个映射：$\varphi: V\to C$，用 $\varphi(a,b)=(a^2,ab,b^2)$ 定义. 由于 φ 在每个轨道取常值，φ 给出映射 $\widetilde{\varphi}: V/G\to C$. 当 k 是代数闭时，$\widetilde{\varphi}$ 是一个一一对应，所以至少从集合上讲 $V/G\cong C$. 以后我们会再看到，它们作为簇也是同构的.

(2.2) 例　仍取 V 为域 k 上的 n 维仿射向量空间. 这时, n 个文字的对称群 S_n 作用在 V 上: 取定 $e_1, \cdots, e_n$ 为 V 的一组基, S_n 对 $e_1, \cdots, e_n$ 作置换, 再线性扩张. 确切地说, 对 $\tau \in S_n$, $v = c_1e_1 + \cdots + c_ne_n \in V$, 定义 $\tau(v) = c_1e_{\tau(1)} + \cdots + c_ne_{\tau(n)}$. S_n 在 V 上的这一作用诱导出 S_n 在 $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ 上的作用(记号如例(2.1)). 很容易验证, 对 $\tau \in S_n$, $p(x_1, \cdots, x_n) \in A$, $\tau. p(x_1, \cdots, x_n) = p(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(n)})$. 这时的 A^G 正好由关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称多项式组成, 其结构由下面众所周知的定理给出。

(2.3) **对称多项式基本定理**　$A^G = k[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$, 而且 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 代数无关. 换句话说, A^G 是 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的多项式代数. 这里的 σ_i 是第 i 个初等对称多项式: $\sigma_i = \sigma_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{1 \leqslant m_1 < \cdots < m_i \leqslant n} x_{m_1} \cdots x_{m_i}$ (用 S_n 对 $x_1 \cdots x_m$ 作平均所得).

对称多项式基本定理有许多证明方法. 可以对 n 用归纳法, 也可以对单项式集合上的某种序(称为 total degree ordering) 作归纳法[8]. 后者的思想可以追溯到 Gauss(Gauss 消元法), 也是近年来迅猛发展的计算(代数) 几何(尤其是 Gröbner 基理论) 的理论基础之一[9]. 定理(2.3) 还可以用 Newton 多项式(第 i 个 Newton 多项式为 $S_i = x_1^i + \cdots + x_n^i$) 和 Newton 恒等式来证明. 不过, 我们希望读者能重温一下 E. Artin 的证明[10]. 他的优美证明把生成与无关性一并论证了, 而且这一证明几乎可以逐行地移植来证明关于有限域 $\mathbf{F}_q$ 上的一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ 和特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q)$ 作用在 $\mathbf{F}_q[x_1, \cdots, x_n]$ 上的不变量的 Dickson 定理. 这些我们将在第四章 §4 中向读者介绍.

那么, 这个 V/G 的结构又是怎样的呢? 当是 k 代数闭时, 既然 A^G 是一个 n 元的多项式代数, V/G 应该是一个 n 维的仿射空间. 当 n

$= 2$ 时，可以这样看 V/G：沿对角线 $x_1 = x_2$“对折”，粘合叠合点（见图 2）. 注意：所画出的又只是“实数点”部分. 当 $k = \mathbf{C}$ 时，V/G 为复

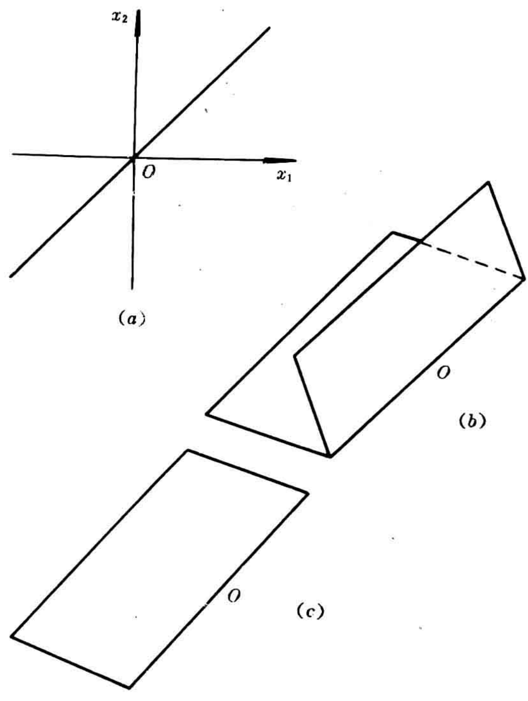

图 2

仿射平面[11]. 和例(2.1) 相仿地，有映射 $\varphi: V \to V$，用 $\varphi(a_1, \cdots, a_n) = (\sigma_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \sigma_n(a_1, \cdots, a_n))$ 定义；当 k 是代数闭时，φ 是一个一一对应.

(2.4) 注　前面的两个例子虽然有些相类似之处(至少在 $n=2$ 时),但也有根本的差异. 比方说,前者的 V/G 具有"奇异点",而后者的 V/G 没有奇异点,是"光滑的". 前者的 A^G 不是多项式代数而后者是. 这些都不是偶然的现象. 出乎意料的是,这些都是由群 G 的性质决定的!这就是著名的 Chevalley 定理. 它的叙述与证明,我们将在第四章 §2 中给出[12].

(2.5) 习题　相仿地讨论 $V=k^2$.

(a) $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ 的情形;

(b) $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ 的情形.

(2.6) 习题　证明交代群 A_n 的不变量 $k[V]^{A_n}=k[\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\Delta]$,其中 $\Delta=\prod\limits_{i>j}(x_i-x_j)$(所以 Δ^2 是判别式).

§3.　二元形式

二元形式的不变量理论是最早被研究的,也是19世纪中叶不变量的主要探讨对象. 二元形式不变量的古典计算方法很繁复[13]. 从现代观点看,可以用 $SL_2(C)$ 的表示理论[14] 或用所谓的 umbral 方法[15] 来分析. 有关二元形式的更深入的研究我们留等以后再介绍,而这里只证明最简单的结论. 至于历史与出处,在下一章里简略地予以介绍.

(3.1) **定义** 两个变元 x 和 y 的齐次多项式

$$a_0x^d + \binom{d}{1}a_1x^{d-1}y + \cdots + \binom{d}{i}a_ix^{d-i}y^i + \cdots + a_dy^d$$

称为一个二元形式，d 称为这个二元形式的次数.

(3.2) 注 (a) 在 $x^{d-i}y^i$ 的系数中引入二项式系数纯粹是为了以后计算表达的方便.

(b) n 元形式可以类似地定义.

(3.3) **定义** 设 $V=\mathbf{C}^2$，$SL_2(\mathbf{C})$ 自然地作用在 V 上. 又设 x 和 y 是 V 的(标准)基 $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ 的对偶基(坐标函数)，那么 $SL_2(\mathbf{C})$ 作用在 V^* 上，从而 $SL_2(\mathbf{C})$ 作用在 $k[x,y]_d$(二元 d 次齐次多项式全体)上. 相仿地，$SL_n(\mathbf{C})$(或 $GL_n(\mathbf{C})$)自然地作用在 $\mathbf{C}^n$ 上，从而在 $k[x_1,\cdots,x_n]_d\cong S^d(V^*)$，所以自然地作用在 $(S^d(V^*))^*$ 上. 我们把后者等同于 $S^d(V)$. 这一作用是这样实现的：对固定的 $g\in G$，$f\in k[x_1,\cdots,x_n]_d$，记 $\bar{x}_i=g.x_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，那么存在 $\bar{f}\in k[x_1,\cdots,x_n]_d$，$(\bar{f}=g.f_1)$，使得 $f(x_1,\cdots,x_n)=\bar{f}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$. 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\binom{d}{e_1\cdots e_n}a_{e_1\cdots e_n}x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}$，$\bar{f}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)=\sum\binom{d}{e_1\cdots e_n}\bar{a}_{e_1\cdots e_n}\bar{x}_1^{e_1}\cdots\bar{x}_n^{e_n}$，那么这些 $\bar{a}_{e_1\cdots e_n}$ 是 $\{a_{e_1\cdots e_n}\}$ 的线性组合，系数要用到 g 的矩阵坐标函数.

(3.4) 例 设 $f=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2$ 是一个二元二次形式. 对 $g^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$，记 $D=\det(g)=(\alpha\delta-\beta\gamma)^{-1}$. 由简单计算可得 $f=\bar{a}_0\bar{x}^2+2\bar{a}_1\bar{x}\bar{y}+\bar{a}_2\bar{y}^2$，其中

$$\begin{aligned}\bar{a}_0&=\alpha^2a_0+2\alpha\gamma a_1+\gamma^2a_2,\\ \bar{a}_1&=\alpha\beta a_0+(\alpha\delta+\beta\gamma)a_1+\gamma\delta a_2,\\ \bar{a}_2&=\beta^2a_0+2\beta\delta a_1+\delta^2a_2.\end{aligned}\tag{3.5}$$

(3.6) **定义**　设 $f=\sum\binom{d}{e_1\cdots e_n}a_{e_1\cdots e_n}x_1^{e_1}\cdots e_n^{e_n}$ 是(d 次)n 元形式. $F=F(a_{e_1\cdots e_n})$ 是 f 的系数 $a_{e_1\cdots e_n}$ 的一个多项式. 如果存在常数 k,使得对每个 $g\in G\subseteqq \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ 和 g 按(3.3)所对应的 $\bar{a}_{e_1\cdots e_n}$,都有 $F(\bar{a}_{e_1\cdots e_n})=\det(g)^kF(a_{e_1\cdots e_n})$,那么称 F 是 n 元形式 f(在 G 作用下)的不变量,亦称为相对不变量. 如果这时的 $k=0$,称 F 为绝对不变量.

所有绝对不变量的全体是 $S^d(\mathbf{C}^n)^G$. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ 的相对不变量都是 $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ 的绝对不变量.

(3.7) **定义**　设 $F=F(a_{e_1\cdots e_n},x_1\cdots,x_n)$ 是 n 元(d 次)形式 f 的系数 $a_{e_1,\cdots,e_n}$ 和 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式. 如果存在这样的常数 k,使得对每一个 $g\in G\subseteqq \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ 和 g 所对应的 $\bar{a}_{e_1\cdots e_n}$,都有 $F(\bar{a}_{e_1\cdots e_n},\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)=\det(g)^kF(a_{e_1,\cdots,e_n},x_1,\cdots,x_n)$,那么称 F 是 n 元形式 f(在 G 作用下)的相对协变量. 如果这时的 $k=0$,称 F 为绝对协变量.

所有绝对协变量的全体是 $(S^d(\mathbf{C}^n)\otimes\mathbf{C}^n)^G$. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ 的相对协变量都是 $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ 的绝对协变量.

(3.8) **定义**　r 个 n 元形式(次数分别为 $d_1,\cdots,d_r$)的联合不变量定义为 $(S^{d_1}(V)\otimes\cdots\otimes S^{d_r}(V))^G$.

(3.9) 例　设 $f=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2$. 由简单计算可得

$$\bar{a}_0\bar{a}_2-\bar{a}_1^2=\det(g)^{-2}(a_0a_2-a_1^2).$$

所以判别式 $a_0a_2-a_1^2$ 是二元二次形式的一个相对不变量.

(3.10) 例　设 a_0x+a_1y 和 b_0x+b_1y 是两个二元一次形式. 由简单计算可得