HIT

数论经典著作系列

The Knowledge and Question of Elementary Number Theory

初等数论的知识与问题

单墫 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

初等数论的知识与问题

The Knowledge and Question of Elementary Number Theory

• 单墫 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

全书共分两编，第一编初等数论的知识，第二编100道数论问题及解答。第一编包括第1章数的整除性，第2章同余，第3章数论函数，第4章不定方程，第5章连分数以及习题答案与提示；第二编包括第6章100道数论问题，第7章解答；附录包括2009年国家集训队的几道试题及空间格点三角形的面积.

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员，初、高等学校师生以及研究人员和数论爱好者。

图书在版编目(CIP)数据

初等数论的知识与问题/单墫著. —哈尔滨：
哈尔滨工业大学出版社，2011.3
ISBN 978-7-5603-3217-8

Ⅰ.①初… Ⅱ.①单… Ⅲ.①初等数论
Ⅳ.①O156.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第038419号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李广鑫
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张14.75 字数267千字
版 次 2011年3月第1版 2011年3月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3217-8
定 价 28.00元

前言

“数学是科学的皇后,数论是数学的皇后.”——伟大的数学家高斯曾经这样说过.

本书当然不敢奢望对数论这一博大精深的数学分支作系统、全面的阐述.我们只是介绍一些最基本的初等数论知识,这些知识不但在组合数学、计算机科学、编码等方面极为需要,而且在各种数学竞赛中也常常遇到.这点“木炭”给在中学工作的同志或在中学学习的同学,解决一些可能会遇到的困难,正是我们的目的所在.

学数论而不做习题,就像华罗庚先生曾经说过的“入宝山而空返”.数论的基础知识并不难学,难的是形形色色的问题.因此,我们选了较多的例题与习题,并且把重点放在运用基本知识去解决问题.

本书的第二编精选了100道数论问题,这些问题可供参加竞赛的同学选用,其中有些问题可以作为研究问题.

单　墫

2011年1月

◎目录

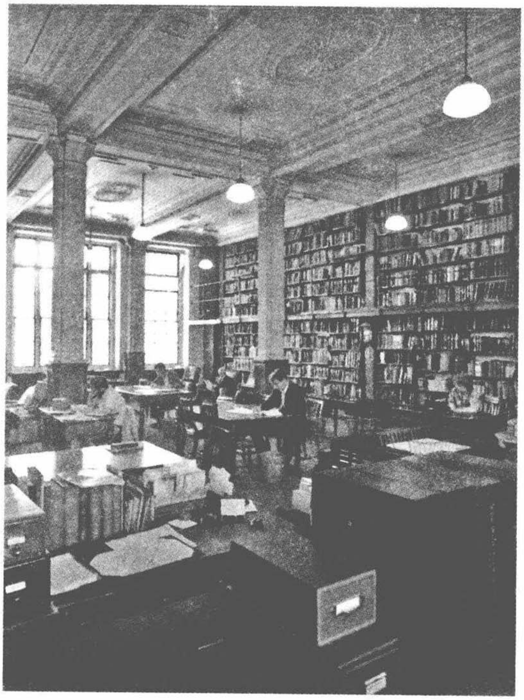
第一编　初等数论的知识

第二编　100 道数论问题及解答

附　　录

第一编

初等数论的知识



数的整除性

第1章

数学家克朗耐克(L. Kronecker,1823—1891)有句名言:“上帝创造了自然数,其余都是人造的.”其实,自然数也是人类创造出来的,它是我们最熟悉的朋友.

自然数集{1,2,3,…}即正整数集,通常记为**N**.

在集合**N**中可以施行两种运算:加法与乘法.

要使加法的逆运算——减法运算能施行,还必须引入零与负整数.我们把自然数(正整数)、零与负整数所组成的集合记为**Z**,**Z**中的数称为整数.

要使乘法的逆运算——除法永远能进行,就必须引入分数(当然0不能作除数).整数与分数统称为有理数,有理数的集合记为**Q**.

在集合**N**中,有时也能够进行除法运算.

定义1.1 若a,b,c都是整数,并且$a=bc$,则称a为b的倍数,b为a的约数(因数).又称b能整除a或a能被b整除,记作$b \mid a$.如果b不能整除a,就记作$b \nmid a$.

除非特别申明,本章中所有字母均表示自然数.

1.1 奇数与偶数

整数中能被2整除的整数称为偶数,不能被2整除的整数称为奇数,即偶数集为

$$\{0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\cdots\}$$

奇数集为

$$\{\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\cdots\}$$

注意0是偶数,而且0是任何整数的倍数.

因此,我们就有奇数与偶数的基本性质:

性质 1.1

(1) 偶数 ± 偶数 = 偶数;

(2) 奇数 ± 奇数 = 偶数;

(3) 偶数 ± 奇数 = 奇数.

反复利用(1),(2),(3),我们就得到一般的结论:

奇数个奇数的和是奇数;偶数个奇数的和是偶数;任意正整数个偶数的和是偶数.

性质 1.2

(1) 奇数 × 奇数 = 奇数;

(2) 奇数 × 偶数 = 偶数;

(3) 偶数 × 偶数 = 偶数.

同样地,我们就有:

任意多个奇数的积是奇数;至少有一个乘数是偶数的积是偶数.

性质 1.3

(1) 如果一个偶数能被奇数整除,那么商必是偶数;

(2) 两个连续整数的积 $n(n+1)$ 是偶数.

运用奇数与偶数的基本性质,可以解决很多问题.

例 1 平方数的(正)因数的个数是奇数.

基本思路 抓住 n 的因数成对这一特点:有因数 d,就有因数 $\frac{n}{d}(d<\sqrt{n})$.

解 每个自然数 n 的因数是成对出现的:如果 d 是 n 的因数,那么 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的因数;d 不同时,$\frac{n}{d}$ 也不相同. 当 $d\neq\sqrt{n}$ 时,d 与 $\frac{n}{d}$ 不等. 只有当 n 为平方数时,$\sqrt{n}$ 是 n 的因数,与它配对的数就是 $\sqrt{n}$ 自身. 所以当且仅当 n 为平方数时,n

的因数个数为奇数.

在 d 是 n 的因数时,我们把 $\frac{n}{d}$ 称为 d 的共轭因数. 这样,n 为平方数时,它有一个自共轭(自己和自己共轭)的因数 $\sqrt{n}$. 反过来,如果 n 有自共轭的因数,那么它一定是平方数.

例 2 用 $\tau(n)$ 表示 n 的因数个数,试确定

$$\tau(1)+\tau(2)+\cdots+\tau(1\ 999) \tag{1}$$

的奇偶性.

解 由例 1 的讨论可知,非平方数的因数个数是偶数,平方数的因数个数是奇数.

因为 $45>\sqrt{1\ 999}>44$,所以 1 至 1 999 中有 44 个平方数,即式(1)中有 44 项为奇数,于是由性质 1.1 得式(1)是偶数.

例 3 能否将 $\{1,2,\cdots,972\}$ 分为 12 个互不相交的子集,每个子集含 81 个元素,并且各个子集的元素的和相等? 如果能,怎样分?

解 如果存在所述的方法,那么和 $1+2+3+\cdots+972$ 应是 12 的倍数,可是

$$1+2+\cdots+972=\frac{1+972}{2}\times 972=973\times 81\times 6$$

不是 12 的倍数,矛盾!

所以,无法将题中的集合分成 12 个互不相交的子集符合要求.

说明 一般地,

(i) 设 $n>1$,当 n 为奇数,m 为正偶数时,无法将集合 $\{1,2,\cdots,mn\}$ 分为 m 个互不相交的子集,并且各个子集的元素的和相等.

不难由

$$1+2+\cdots+mn=(1+mn)\times n\times\frac{m}{2}$$

不是 m 的倍数知道这个结论成立.

(ii) 当 $n>1$ 及 m 均为奇数或者 n 为偶数时,我们都可以将集合 $\{1,2,\cdots,mn\}$ 分为 m 个互不相交的子集,满足上面所述的要求.(读者可以尝试一下!)

例 4 在一条线段的内部任取 n 个点,将这些点及线段端点依次记为 A_0,$A_1,\cdots,A_{n+1}$,并且将端点 A_0 染上红色,A_{n+1} 染上蓝色,其余各点染上红色或蓝色,称两端颜色不同的线段 $A_iA_{i+1}(0\leqslant i\leqslant n)$ 为"好线段". 证明:好线段的条数为奇数.

基本思路 记两种颜色的点为"+1"和"-1",运用基本性质解决这个问题.

解　将红色的点记为 $+1$，蓝色的点记为 -1.

考虑每条线段 A_iA_{i+1} 的两端的数的乘积，当且仅当 A_iA_{i+1} 是好线段时，乘积是 -1.

将上述 $n+1$ 个乘积($i=0,1,2,\cdots,n$)乘起来，这时 A_0,A_{n+1} 各出现一次，中间的点 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 各出现两次，于是 $n+1$ 个乘积的积为 $1\times(-1)=-1$. 这表明 $n+1$ 个乘积中，乘积为 -1 的个数是奇数，即好线段的条数为奇数.

奇偶分析

讨论某一个量的奇偶性常常有助于解题，这样的方法称为奇偶分析.

例 5　在黑板上写出 3 个自然数，然后擦去一个换成其他两个数的和减 1，这样继续做下去，最后得到 17，1 967，1 983. 问原来的 3 个数能否为 2，2，2？

基本思路　考虑各个数的奇偶性.

解　假设原来 3 个数是偶数，那么操作一次得到 2 个偶数 1 个奇数.

接下去的一次操作：如果擦去一个偶数，那么得到的新数仍然是偶数(因为偶 + 奇 - 1 是偶数)；如果擦去一个奇数，那么得到的新数仍然是奇数. 于是，这一次操作得到仍是 2 个偶数 1 个奇数.

因此，以后不论操作多少次，永远得到 2 个偶数 1 个奇数.

这就是说由 2，2，2 开始，不论进行多少次操作总是得到 2 个偶数 1 个奇数，即不可能得到 3 个奇数 17，1 967，1 983.

所以，原来的 3 个数不可能全为偶数 2，2，2.

例 6　已知 n 是奇数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 证明

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数.

基本思路　若奇数个整数的和是偶数，则其中必有一个整数是偶数.

证法 1　因为

$$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)=$$
$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(1+2+\cdots+n)=0$$

是偶数且 n 为奇数，所以，$a_1-1,a_2-2,\cdots,a_n-n$ 中至少有一个是偶数(若 $a_1-1,a_2-2,\cdots,a_n-n$ 全是奇数，则这奇数个数的和是奇数，与它们的和为 0 矛盾).

因此，这 n 个数的积一定是偶数.

证法 2　因为 n 是奇数，所以 $1,2,\cdots,n$(即 $a_1,a_2,\cdots,a_n$) 中奇数比偶数多 1 个. 从而在 $(a_1,1),(a_2,2),\cdots,(a_n,n)$ 这 n 个数对中，至少有一个数对的两个数都是奇数，它们的差是偶数，故

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数.

例 7　设 a,b,c 都是奇数,证明:方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{2}$$

没有有理数解.

基本思路　反证法. 利用奇偶性导出矛盾.

证明　假设式(2)有解 $\frac{r}{s}\in\mathbf{Q}$,r,s 不全为偶数(否则可以约简),即 r,s 或全为奇数或恰有一个为奇数.

如果 r,s 全是奇数,那么由

$$a\left(\frac{r}{s}\right)^2+b\left(\frac{r}{s}\right)+c=0$$

得

$$ar^2+brs+cs^2=0 \tag{3}$$

但式(3)左边各项均为奇数,且为三项,所以,它们的和为奇数,而式(3)右边为偶数 0,矛盾!

如果 r,s 中恰有一个奇数,那么式(3)左边有 2 项是偶数,而其余 1 项是奇数. 于是,它们的和也为奇数,不等于偶数 0,矛盾!

因此,方程(2)无有理根.

例 8　能否将两个 1,两个 2,…,两个 1 990 排成一列,使得两个 $i(1\leqslant i\leqslant 1\,990)$ 之间恰有 i 个数?

解　假设能满足题中所述要求,则这些数可以从左至右编上号码 1,2,…,2 × 1 990. 号码之和

$$1+2+\cdots+2\times 1\,990=\frac{1+2\times 1\,990}{2}\times 2\times 1\,990=$$
$$1\,990\times(1+2\times 1\,990)$$

为偶数.

但是另一方面,每两个数 i 中间恰有 i 个数. 所以,在 i 为奇数时,这两个 i 的号码有相同的奇偶性,号码的和为偶数;在 i 为偶数时,两个 i 的号码的和为奇数. 又由于 1 至 1 990 中有 995(奇数)个偶数,所以 2 个 1,2 个 2,…,2 个 1 990 中共有 995 对 i 的号码的和为奇数. 于是号码的总和为奇数. 两方面的结论矛盾.

因此,不可能将 2 个 1,2 个 2,…,2 个 1 990 排成一列满足所述要求.

又解　将这列数交错地涂上黑、白两色. 对偶数 i,两次出现的颜色不同,对奇数 i,两次出现的颜色相同. 995 个偶数共出现 995 × 2 次,其中 995 次白,995 次黑. 因此 995 个奇数(各出现 2 次),也有 995 个白,995 个黑. 但奇数产生的白色必为偶数个. 矛盾.

说明　将 1 990 换为一般的 m,可以得到：

当且仅当 m 除以 4 余 0(即被 4 整除)或余 3 时,有满足所述要求的排法.

有兴趣的读者请参看《对应》(王子侠、单墫著,上海科技文献出版社).

例 9　将 $1,2,\cdots,n(n \geqslant 2)$ 分为无公共元素的组,使得每个数都不与它的 2 倍在同一组,问至少要分为几组?

基本思路　将数表示成 $2^k \cdot j(k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, j$ 为正奇数) 的形式.

解　至少分为 2 组.

将每个数表示成 $2^k \cdot j$ 的形式,其中 k 为非负整数,j 为正奇数.

将 k 为奇数的数作为一组,k 为偶数的数作为另一组.

显然,每一组中,没有一个数是另一个数的两倍.

例 10　证明:从 $1,2,\cdots,100$ 中任意选取 51 个数,其中必有一个数是另一个数的倍数.

基本思路　将数表示成 $2^k \cdot j$ 的形式,然后根据奇数 j 的值分组,并应用抽屉原理.

解　将 $1,2,\cdots,100$ 表示成 $2^k \cdot j$ 的形式,其中 k 为非负整数,j 为正奇数.

显然 j 只有 50 种可能,即 $1,3,5,\cdots,99$. 将 j 相同的数放在同一组,这样就得到 50 个组:

$\{1,2,4,8,16,32,64\}$,

$\{3,6,12,24,48,96\}$,

$\{5,10,20,40,80\}$,

…

$\{99\}$.

同一组中的两个数 $2^k \cdot j$ 与 $2^h \cdot j(k < h)$,由于 j 相同,一个是另一个的倍数(2^{h-k} 倍).

现在任取 51 个数. 由抽屉原理,这 51 个数中必有两个在同一组,所以必有一个是另一个的倍数.

说明　(1) 抽屉原理的通俗说法就是"将 5 个苹果放在 4 个抽屉里,必有一个抽屉里至少有 2 个苹果". 一般地,"将 $n+1$ 个元素分为 n 组,必有一组至少含 2 个元素."

(2) 例 10 中的 100 与 51 可以分别改为 $2n$ 与 $n+1$.

练习 1.1

1. 设四个自然数之和为 1 989,求证:它们的立方和不是偶数.

2. 证明:不存在 2 个自然数,它们的差与和的乘积等于 1 990.

3. 求证:17 个同学聚会,不可能每人恰好握了 3 次手.

4. 圆周上有 1 999 个点,给每一个点染两次颜色,每次染红色或蓝色,共染红色 1 999 次,染蓝色 1 999 次. 试证明:至少有一个点两次染的颜色不同.

5. 设有 n 盏亮着的灯,每盏都用拉线开关. 如果规定每次必须同时拉动 $n-1$ 个拉线开关. 试问:能否把所有的灯都关闭? 证明你的结论.

6. 如果两人互相握手,那么每人都记握手一次. 求证:握手是奇数次的人的总数一定是偶数.

7. 桌上有6只盘子排成一列,雅克从中任取2只——一手一只. 将这2只盘子移到与原来位置相邻的地方(向左或向右均可). 如果该处已有盘子,那么将这只放在原有的上面. 问能否通过上面的操作将所有的盘子并为一堆?

8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一组数,它们中的每一个都取 $+1$ 或 -1,而且 $a_1a_2a_3a_4+a_2a_3a_4a_5+\cdots+a_na_1a_2a_3=0$,证明:$n$ 必须是 4 的倍数.

9. 设 n 是大于 1 的自然数,证明

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

不是整数.

10. 设 $n>0,a\geqslant 2$,证明:n^a 能够表示成 n 个连续的奇数的和.

11. 证明:没有一个形如2^n(n为任意自然数)的数可以表示成2个或2个以上连续自然数之和.

12. 记 A_n 为小于$(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 的最大整数,证明:A_n+1 能被 2^{n+1} 整除($n\geqslant 1$).

13. 边长为 n 的正 $\triangle ABC$ 被三组平行线(分别平行于 AB,BC,CA) 分成 n^2 个小的正三角形,每一个的边长为 1. 现在将这些小三角形的顶点染上红色、蓝色或白色,满足下列条件:

(1)AB 上的点不染红色;

(2)BC 上的点不染蓝色;

(3)CA 上的点不染白色.

证明:存在一个边长为 1 的三角形,它的顶点分别为红、蓝、白三种颜色.

*14. 是否存在一个 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的函数f,满足:对所有 $n\in\mathbf{N}$.

$$f^{(1\,990)}(n)=2n$$

这里

$$f^{(k)}(n)=\overbrace{f(f(f(\cdots f(}^{k\text{个}f}n)\cdots)))$$

1.2 带余除法

1.2.1 带余除法

熟知："被除数等于除数乘以商再加余数." 也就是说，对于自然数 a 和 b，总可以找到一对唯一确定的非负整数 q,r，满足

$$a = qb + r, 0 \leqslant r < b \tag{1.2.1}$$

这里 q 称为商，r 称为余数.

要说明 q,r 存在，只须注意

$$0, b, 2b, 3b, \cdots \tag{4}$$

严格增加，其中必有两项将 a"夹住"，即有非负整数 q 使

$$qb \leqslant a < (q+1)b \tag{5}$$

令

$$r = a - qb \tag{6}$$

则式(1.2.1)成立.

另一方面，如果 q,r 满足式(1.2.1)，那么 q 满足式(5)，因而 q 是唯一的，r 必须满足式(6)，也是唯一确定的.

实际上 q 是 $\frac{a}{b}$ 的整数部分，即 $q = \left[\frac{a}{b}\right]$.

式(1.2.1)称为带余除法或欧几里得(Euclid)算法，在数论中极为重要.

例 1 请在 503 后面添 3 个数字，使所得的 6 位数被 7,9,11 整除.

基本思路 取数 504 000 与 $7 \times 9 \times 11$ 做除法，然后，运用式(1.2.1)可得欲添的数字.

解 要使所得的 6 位数被 7,9,11 整除，则这个 6 位数必须被 $693(=7 \times 9 \times 11)$ 整除.

做除法

$$504\,000 \div 693$$

得
$$504\,000 = 693 \times 727 + 189$$

因此
$$504\,000 - 189 = 503\,811 (= 693 \times 727)$$
$$503\,811 - 693 = 503\,118 (= 693 \times 726)$$

它们都能被 693 整除.

于是，所添数字是 8,1,1 或 1,1,8.

说明 7,9,11 的最小倍数为 $7 \times 9 \times 11 = 693$.

1.2.2 最小公倍数与最大公约数

定义 1.2 如果 a 是 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的倍数,那么 a 称为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的公倍数.公倍数中最小的一个称为最小公倍数,记为$[b_1,b_2,\cdots,b_n]$.

例1中 $7\times9\times11=693$ 就是 $7\times9\times11$ 的最小公倍数,即$[7,9,11]=693$.再如3,4,18的最小公倍数是36,即$[3,4,18]=36$.

定义 1.3 如果 b 是 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的约数,那么 b 称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公约数.公约数中最大的一个称为最大公约数,记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

如果两个数的最大公约数是1,那么这两个数称为互质.

例如,$(8,9)=1$,即8与9互质.

特别地,根据定义得到

$$(a,1)=1 \tag{1.2.2}$$

即1与任意一个自然数互质.

易知 $a\pm b$ 与 b 的公约数一定是 a 与 b 的公约数.反过来,a 与 b 的公约数也是 $a\pm b$ 与 b 的公约数,所以

$$(a\pm b,b)=(a,b) \tag{1.2.3}$$

如果 d 是 a 的因数(约数),那么

$$(a,d)=d \tag{1.2.4}$$

如何求两个或更多个数的最大公约数?

求 a,b 两个数的最大公约数可以按以下步骤进行:

不妨设 $a>b$,首先写出

$$a=qb+r,0\leqslant r<b$$

由式(1.2.3)得

$$(a,b)=(a-b,b)=\cdots=(a-qb,b)=(b,r)$$

问题化为求(b,r).

再由带余除法,写出

$$b=q_1r+r_1,0\leqslant r_1<r$$

同理得

$$(b,r)=(r,r_1)$$

问题化为求(r,r_1),如此继续下去,有

$$r=q_2r_1+r_2,0\leqslant r_2<r_1$$

$$\cdots$$

$$r_{k-1}=q_{k+1}r_k+r_{k+1},0\leqslant r_{k+1}<r_k$$

$$\cdots$$

由于非负整数 $r_1>r_2>\cdots$,严格递减,因此,经过若干步将有

$$r_{n+1}=0$$