

高等学校“十二五”规划教材
电子信息与通信工程系列

信号与系统

Signals and Systems

主 编 柳长源

主 审 卢 迪

高等学校“十二五”规划教材
电子信息与通信工程系列

信号与系统

Signals and Systems

主 编 柳长源

副主编 王 洋 梁欣涛 王玉静 刘柏森

主 审 卢 迪

内容提要

本书系统地阐述了连续信号与系统的基本理论和基本分析方法,介绍了模拟信号及线性时不变系统的基本概念和分析研究问题的方法,重点是通过对信号变换域分析求解的方法,研究信号与系统的理论。

本书内容深入浅出,着重强调概念和理论的学习,淡化计算技巧,引入 MATLAB 作为信号与系统的分析工具。全书共 8 章,内容包括:绪论;连续信号的时域分析;连续时间系统的时域分析;连续信号的频域分析;连续时间系统的频域分析;连续时间系统的 s 域分析;电路的 s 域分析;连续时间信号与系统的 MATLAB 仿真实验。每章还配有大量的例题和习题,注重难点和重点的解释与分析。

本书可作为与信号处理相关的电子、通信、自动控制等专业的本科生、大专生以及成人自学者的教材和教学参考书,也可作为相关工程技术人员的参考资料和考研用书。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/柳长源主编. —哈尔滨:哈尔滨
工业大学出版社,2011.8
ISBN 978-7-5603-3351-9

I. ①信… II. ①柳… III. ①信号系统 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 152674 号

责任编辑 许雅莹
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 肇东粮食印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 19 字数 487 千字
版 次 2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3351-9
定 价 35.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

高等学校“十二五”规划教材
电子信息与通信工程系列

编委会

主任 吴群

编委 (按姓氏笔画排序)

于晓洋	王艳春	史庆军	齐怀琴	刘梅
孙道礼	邹斌	何鹏	宋立新	杨明极
周成	宗成阁	孟维晓	胡文	姜成志
姚仲敏	赵志杰	赵金宪	童子权	冀振元
魏凯丰				

总 序

电子信息与通信工程是当今世界发展最快的领域,该技术领域的新概念、新理论、新技术不断涌现,其知识更新速度也是令人吃惊。这就使得从事电子信息与通信工程技术的科技人员要不断学习,把握前沿动态,吸收最新知识。近年来,各高校通过教学改革,在引导学生将最新知识应用于社会实践,解决实际问题,培养学生实践动手能力、探索性学习能力和创新思维能力等方面取得了可喜成就。

为了培养国家和社会急需的电子信息与通信工程领域的高级科技人才,配合高等院校电子信息与通信工程专业的教学改革和教材建设,哈尔滨工业大学出版社组织哈尔滨工业大学、哈尔滨理工大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、黑龙江科技学院等多所高校,通过共同研讨和合作,相互取长补短、发挥各自的优势和特色,联合编写了这套面向普通高等院校“电子信息与通信工程系列”教材。

本系列教材的编写目标:结合新的专业规范,融合先进的教学思想、方法和手段,体现科学性、先进性和实用性,强调对学生实践能力的培养,以适应新世纪对通信、电子人才培养的需求。

本系列教材编写要求:专业基础课教材概念清晰、理论准确、深度合理、内容精炼,并注意与专业课教学的衔接;专业课教材覆盖面广、深度适中,体现相关领域的新发展和新成果,注重理论联系实际。

本系列教材的编委会阵容强大,编者都是在教学工作第一线的骨干教师。他们具有多年丰富的教学和科研经历,掌握最新的理论知识,具有丰富的实践经验,是一支高水平的教材编写队伍。

本系列教材理论性与工程实践性紧密结合,旨在引导读者将电子信息与通信工程的理论、技术与应用有机结合,适合于高等学校电子、信息、通信和自动控制等专业的教材选取。我深信:这套教材的出版,对于推动电子信息与通信工程领域的教学改革、提高人才培养质量必将起到积极的推动作用,并以其内容的先进性、实用性和系统性为特色而获得成功。

吴 群
哈尔滨工业大学教授
2010年4月

前 言

本书是根据作者“信号与系统”理论课程的教学讲义及实验指导书,结合近年来信号处理技术的发展,并参考国内外相关文献资料写作而成。本教材是电子信息类专业的一门重要的专业基础课,具有理论性、设计性与实践性的特点。书中介绍模拟信号及线性时不变系统的基本概念和分析研究问题的方法,重点是通过信号变换域分析求解的方法,研究信号与系统的理论。本书的特点体现在如下几个方面:

(1)在教材理念上,主要阐述的是现代科学的思维方法和认知过程,而不仅仅是人类知识的简单再现。读者在学习时,不仅能够获得相应的科学知识,更能提升认知能力和思维方式。因此,本书在编写的过程中,对教材的形式和内容进行了系统科学的组织,形式结构条理清晰,内容表达环环相扣、深入浅出,更加符合学习的认知过程。

(2)在教材内容上,针对以电子、信息、通信等相关专业本科教学为主安排的内容,体现经典与现代、连续与离散、信号与系统的辩证关系,适当反映了IT业的新理论和新技术。注意强调基本概念的描述,在对概念给出严格定义的同时,尽量使用通俗易懂的语言,并结合生活和工程应用中的实例给以解释说明。

(3)在内容的介绍过程中,穿插了较多的例题,这些例题通常不强调解题的技巧性,而是关注计算的基本过程和方法,强调基本概念的应用。每节有适当的思考题,以问答形式为主,主要用于课堂练习。增加每章课后练习题的题型(基本覆盖各类主要题型),减少重复题型,减少偏、怪题型。思考题、例题和习题的配备与教学内容紧密结合,并充分考虑部分学生考研的需要,以达到更好的教学需求。对一些绝大多数高等院校不常涉及的内容,酌情进行调整,以适应现代的教学要求。

(4)为了提高学生理论联系实际的能力,积极将教研与科研成果引入教材,并利用MATLAB仿真工具进行了信号与系统的分析。在国外许多大学里,诸如“应用代数”、“数理统计”、“信号与系统”、“自动控制”、“数字信号处理”、“通信系统”、“动态系统仿真”等课程的教学都逐步引入MATLAB作为学生必须掌握的工具。为了加强实践教学,教材配备了10个左右的MATLAB实验,供教师选用。并把实验部分单独放在全书最后,详细说明实验原理、内容、实验思考题,配备大部分源程序(留出少部分由学生自己编写)等,使学习过程更加生动和灵活,更有利于学生的学习和知识的掌握。

基于以上考虑,全书的各章内容安排如下:

第1章介绍信号与系统的基本概念。内容包括信号的定义和基本运算,系统的定义和系统的性质等。

第2章介绍连续信号的时域分析,其中包括典型时间连续信号、冲击信号与阶跃信号、信号的基本运算与变换、信号的分解等。

第3章介绍连续时间系统的时域分析,内容包括系统的微分方程及其求解、零输入响应与零状态响应、冲激响应与阶跃响应、瞬态响应与稳态响应、自由响应与强迫响应、卷积及其性质、卷积的求解(图解法及特性法)等。

第4章介绍连续信号的频域分析,周期信号的傅里叶级数、对称信号的傅里叶级数分析、傅里叶变换与非周期信号的频谱分析、傅里叶变换的基本性质及应用、周期信号的傅里叶变换与频谱分析、抽样定理及抽样信号的频谱分析、抽样信号的恢复及抽样保持、能量谱与功率谱等。

第5章介绍连续时间系统的频域分析,内容包括 LTI 系统的频率响应、正弦信号的稳态响应、无失真传输条件、系统物理可实现条件、理想低通滤波器及其应用、理想带通滤波系统及其应用、通信系统的幅度调制与解调、频分复用、时分复用、码分多址通信等。

第6章介绍连续时间系统的 s 域分析,包括从傅里叶变换到拉普拉斯变换、拉普拉斯变换的性质及其应用、拉普拉斯逆变换、利用拉普拉斯变换求解微分方程、 s 域系统模型分析、系统函数的零、极点与系统特性关系、系统的稳定性等。

第7章介绍电路的 s 域分析电路元件的 s 域模型、电路的系统函数(网络函数)、 s 域分析法求解电路问题举例等。

第8章主要介绍连续时间信号与系统的 MATLAB 仿真实验等,并在附录中配备了相关实验的源程序。

书中带 * 章节可根据教学安排作为选讲内容。

本书由柳长源主编,卢迪教授审阅。第1、8章由梁欣涛编写,第2、3章由王玉静编写,第4、5章由柳长源编写并进行全书的统稿工作,第6、7章由王洋编写,附录及部分习题由刘柏森编写,另外,李岩、贾德琳、霍光也对本书的编写给予了一定帮助。

限于作者水平,书中不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

作者
2011年5月

目 录

CONTENTS

第 1 章 绪 论	1
1.1 引言	1
1.2 信号的数学表示及其分类	3
1.3 系统的数学模型及其分类	9
1.4 LTI 系统的特性	17
习题	21
第 2 章 连续信号的时域分析	25
2.1 典型连续时间信号	25
2.2 冲激信号与阶跃信号	28
2.3 信号的基本运算与变换	34
2.4 信号的分解	38
2.5 正交函数	40
2.6* 信号的相关性	43
习题	47
第 3 章 连续时间系统的时域分析	49
3.1 系统的微分方程及其求解	49
3.2 零输入响应与零状态响应	53
3.3 冲激响应与阶跃响应	56
3.4 瞬态响应与稳态响应	60
3.5* 自由响应与强迫响应	60
3.6 卷积及其性质	63
3.7 卷积的求解:图解法及特性法	65
习题	69
第 4 章 连续信号的频域分析	72
4.1 引 言	72
4.2 周期信号的傅里叶级数	73
4.3 对称信号的傅里叶级数分析	78
4.4 傅里叶变换与非周期信号的频谱分析	85
4.5 傅里叶变换的基本性质及应用	94
4.6 周期信号的傅里叶变换与频谱分析	106
4.7 抽样定理及抽样信号的频谱分析	109
4.8 抽样信号的恢复及抽样保持	115

4.9*	能量谱与功率谱	120
	习题	122
第 5 章	连续时间系统的频域分析	127
5.1	LTI 系统的系统函数	127
5.2	正弦信号的稳态响应	131
5.3	无失真传输系统	134
5.4	理想低通滤波器及其应用	137
5.5	系统物理可实现条件	142
5.6	带通滤波系统	144
5.7	通信系统的幅度调制与解调	148
5.8	多路通信复用技术简介	154
	习题	157
第 6 章	连续时间系统的 s 域分析	162
6.1	引言	162
6.2	从傅里叶变换到拉普拉斯变换	162
6.3	拉普拉斯变换的性质及其应用	169
6.4	拉普拉斯逆变换	181
6.5	微分方程的拉普拉斯变换解法	190
6.6	系统模型的 s 域分析与模拟	195
6.7	系统函数的零、极点与系统特性关系	205
6.8	系统的稳定性	210
	习题	214
第 7 章	电路的 s 域分析	220
7.1	电路元件的 s 域模型	220
7.2	电路的网络函数	224
7.3	电路的复频域分析	233
	习题	236
第 8 章	连续时间信号与系统的 MATLAB 仿真实验	240
8.1	MATLAB 入门知识	240
8.2	实验一 微分方程的建立与系统的响应	257
8.3	实验二 连续信号的卷积积分	258
8.4	实验三 连续时间信号的傅里叶变换	260
8.5	实验四 连续信号的采样及恢复	262
8.6	实验五 低通滤波系统的频率特性分析	263
8.7	实验六 利用 Simlink 生成系统及波形仿真	264
8.8	实验七 连续时间系统的零、极点分布及频率特性	266
8.9	实验八 基于 MATLAB 二阶系统的频域分析	267
附录一	常用 MATLAB 函数与指令集	269
附录二	实验程序及结果	273
	习题参考答案	288
	参考文献	296

第 1 章

绪 论

1.1 引 言

我们对信号并不陌生,在日常生活中信号随处可见,如十字路口的红绿灯、上课的铃声,不同形式的信号传送了某些不同的消息。信号是消息的一种物理体现,而消息则是信号的具体内容。通常把消息中有意义的内容称为信息,信息是抽象内容,在信息论中其表示不确定性。

信号作为消息的载体,通常是一种可觉察的物理量,如声、光、电、动作和化学物质等。因此,信号可以广义地定义为随一些参数变化的某种物理量。在数学上,信号可以表示为一个或多个变量的函数。例如:语音信号是空气压力随时间变化的函数,图 1.1 所示为语音信号的波形。

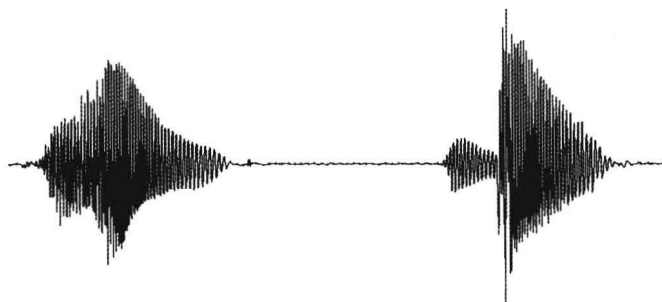


图 1.1 “we be”的语音波形

在电磁现象被人类认识之前,信息的交流与传输是由直接作用于人类感觉器官的信号来实现的,例如击鼓、烽火、灯塔、旗语等都是人类较早使用的信号形式,其传送效果都受到了自然条件的限制。电报通信是莫尔斯(F. B. Morse)在 1837 年首先试验成功的,其用特定的电脉冲组合方式(莫尔斯电码)来代表英文字母。电报的发明,拉开了电信时代的序幕,开创了人类利用电来传递信息的历史。1876 年,贝尔(A. G. Bell)首先申请了电话专利权,将声音信号转变为电信号沿导线进行传送。1864 年,英国的麦克斯韦(Maxwell)建立了完整的电磁波理论,预测了电磁波的存在;1887 德国的赫兹(Hertz)用实验证实了电磁波的存在;随后克罗地亚的特斯拉(Tesla)、俄国的波波夫(Popov)和意大利的马可尼(Marconi)都分别实现了无线电通信。1901 年,马可尼成功接收到跨大西洋的信号,从此无线电不再是仅限于实验室,而是作为一种实用的通信媒介被人类广泛使用。通过 100 多年的研究和应用,电磁波的应用有长波、短波、微波、毫米波乃至光波,应用范围也越来越广。如日常生活中的广播、电视、bb 机(已经淘汰)、手机、各类无线网络、无线电导航,国防中的卫星、雷达,医学中的 X 线摄片、CT、磁共振

成像等。电磁信号通常是随着时间变化的电压或电流,这种变化是与语音变化或者图像的色光变化等相对应的。这样通过编码或调制而变化着的电压或电流,分别构成了代表文字、声音和图像等消息的信号,因而信号中也就包含了消息中所含有的信息。在作为信号的诸多物理量中,电是应用最广的物理量,也容易实现与非电量的相互转换。因此,本书主要讨论电信号,即以时间变量作为信号表达式的独立变量。

无线电电子学的发展和應用主要是为了解决信号的传输和处理的问题。

信号处理更多的是考虑信号收到以后的解释。对信号进行处理,是为了便于抽取出有用信息的过程,它是对信号进行提取、变换、分析、综合等处理过程的统称。这些信号可以是通信系统中所传输的信号,也可以是记录在某种媒体上包含有信息的某些数据,例如雷达、声纳的回波、股票数据、国家的各类统计数据等。通过对雷达回波数据的时域和变换域的分析 and 处理,我们可以得到目标的距离、角度、速度乃至形状等诸多信息。

信号的传输,要由用许多不同功能的单元组织起来的一个复杂系统来完成。系统是指由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。系统的基本作用是对输入信号进行加工和处理,将其转换为所需要的输出信号,如手机、电视机、通信网、计算机网等都可以看成系统,它们所传送的语音、音乐、图像、文字等都可以看成信号。信号的概念与系统的概念常常紧密地联系在一起。信号与系统的概念在非常广泛的领域中都有出现,信号的产生、传输和处理需要一定的物理装置,这样的物理装置常称为系统。虽然,在各个学科中的信号与系统的物理本质可能大不相同,但它们都有两个非常基本的共同点:信号是单个或多个独立变量的函数,而系统则对特定信号响应而产生另外一些信号。从广义上说,一切信息的传输过程都可以看成是通信,一切完成信息传输任务的系统都是通信系统,例如电报、电话、电视、雷达、导航等。就电视系统来说,其所要传输的信息包含在一些配有声音的画面之中,首先要利用摄像机把画面的光线色彩转变成图像信号,并利用话筒把声音转变成伴音信号,这些就是电视要传输的带有信息的全电视信号。这些原始信号通常要先进行存储,经过后期处理后播出。广播电视台首先把节目信号放大通过电视发射机把全电视信号变换为频率更高的信号,这时高频载波信号的某一参量随着音视频信号作相应的变化,使要传送的音频信号包含在高频载波信号之内,然后高频电流流过天线时,形成电磁波发射出去,电磁波在空间传播。电视接收天线截获到电磁波的一小部分能量并将其转变成为微弱的高频电信号,送入电视接收机。电视接收机将高频信号的频率降低,变为全电视信号,再分解为图像信号和伴音信号,并分别送到显像管和喇叭,于是就能收看到配有伴音的画面。上述过程,可以用一个简明的方框图表示,如图 1.2 所示。

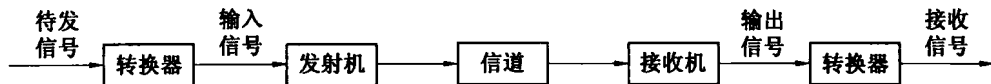


图 1.2 通信系统的组成

图 1.2 表示了一般通信系统的组成,我们把传递信息所需的一切技术设备的总和称为通信系统。其中转换器指的是把消息转换为电信号或者反过来把电信号还原成消息的装置,如摄像管和显像管、话筒和喇叭。这些装置具有将一种形式的能量转换为另一种形式能量的功能,所以也常称其为换能器。信道是信号传输的通道,它可以是双绞线、同轴电缆和波导,也可

以是空间和人造卫星,或者是光导纤维。有时发射机和接收机也可以看做信号的通道。所以一个通信系统的工作,主要是包括消息到信号的转换、信号的处理和信号的传输,有时还要对信号进行监测。

信号与系统的概念是一个非常普遍的概念,而与这些概念有关的许多思想和方法,在通信、航空学、宇航学、电路设计、声学、地震学、生物工程、雷达信号处理、化学过程控制和语音处理等各种科学技术领域里都起着重要的作用。本书通过研究一小类具有特殊性质便于分析的信号及系统,然后加以外推,就可非常深入地分析和表征更多复杂的信号与系统。本书主要着重于线性时不变系统,根据其线性和时不变性质,推导出一系列值得注意的概念和方法,具有重要的理论和实际意义。

【思考题】

什么是信号? 信号处理的目的是什么?

1.2 信号的数学表示及其分类

信号的分类方法很多,可以从不同的角度进行分类。描述信号的基本方法是写出它的数学表达式,很多信号可以表示为一个时间的函数,所以常以信号所具有的时间函数特性来加以分类。信号与函数在信号分析中常常通用。信号按其时间函数特性可以分为确定信号与随机信号、连续时间信号与离散时间信号、周期信号与非周期信号、能量信号与功率信号、实信号与复信号等。

1.2.1 确定信号与随机信号

按照信号的确定性划分,信号可分为确定信号与随机信号。

确定信号(determinate signal)是指可以用一个确定的数学表达式来描述的信号。前面给出的信号例子都属于确定信号。确定信号的特点是信号任意时刻的值是确定的,或是可预知的,例如电路中的正弦信号,任意时刻的值是确知的(包括未来的任意时刻),如图 1.3(a)所示。

随机信号(random signal)也称为不确定信号,它不是时间的确定函数,当给定某一时间值时,其函数值并不确定,而只能用统计规律来描述,如图 1.3(b)所示的噪声信号。

通信系统中传输的实际信号通常具有不确定性,这与通信的目的有关,为传送新的信息,信号必然是不确定的。实际信号与确定信号有相近的特性,通常可以将实际信号看成主要由确定性信号组成。确定信号作为一种近似的、理想化了的信号,能够使问题分析大为简化,具有重要意义。信号传输过程中,除了人们所需要的带有信息的信号外,同时还会夹杂着如噪声、干扰等人们所不需要的信号,它们大都带有更大的随机性质。例如在日常生活中,将收音机调谐到一个无广播电台的频率位置时,这时从喇叭中输出的噪声便是一个随机信号,该信号不能用一个确切的数学表达式来描述,且无法预知该信号未来时刻的值。

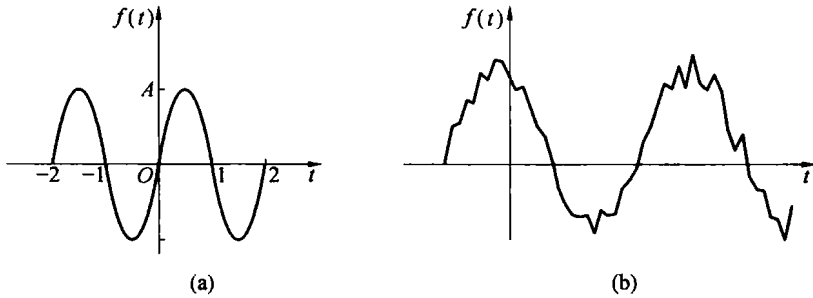


图 1.3 确定信号波形与随机信号波形

1.2.2 连续时间信号与离散时间信号

信号值都与它的(瞬时)幅度相对应。按照信号在时间轴上取值是否连续,又可将信号分为连续时间信号与离散时间信号。

连续时间信号是指在信号的定义域内,任意时刻都有确定的函数值的信号,通常用 $f(t)$ 表示。连续时间信号最明显的特点是自变量 t 在其定义域上除有限个间断点外,其余是连续可变的。由于“连续”是相对时间而言的,故信号幅值可以是不连续的。对于幅值和时间都是连续的信号,又称为模拟信号。例如,图 1.4(a) 中的正弦信号为连续时间信号,即

$$f_1(t) = \sin(\pi t) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 和值域 $[-1, 1]$ 都是连续的。图 1.4(b) 中信号的表达式为

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 < t < 1) \\ -1 & (1 < t < 2) \\ 0 & (2 < t) \end{cases}$$

其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 是连续的,但其函数值只取 $-1, 0, 1$ 三个离散的值。

离散时间信号是指时间(其定义域为一个整数集)是离散的信号(或称序列)(即仅在时间 t 的离散值上给出的信号),函数值离散时刻的间隔可以是均匀的,也可以是不均匀的,一般情况都采用均匀间隔。这时,自变量 t 简化为用整数序号 n 表示,函数符号写作 $f[n]$,仅当 n 为整数时 $f[n]$ 才有定义。在实际的信号处理中, n 实际上代表 nT_s , nT_s 为离散时间变量,其中 T_s 是采样间隔(Sampling Interval)。如果离散时间信号不仅在时间上是离散的,而且在幅度上是量化的,则称为数字信号。

图 1.4(c) 中信号的表达式为

$$f_3(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ A & (t = 0, 1, 2, 3) \\ 0 & (t > 3) \end{cases}$$

其定义域为全部整数,但随着 t 的变化,序列值是有限个离散值 $0, A$ 。

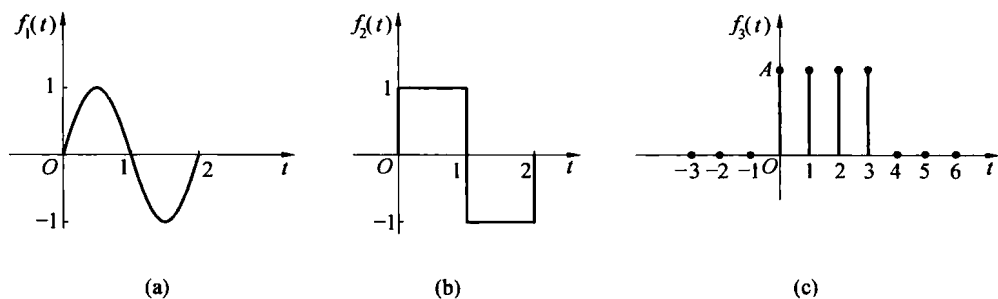


图 1.4 连续时间信号波形与离散时间信号波形

1.2.3 周期信号与非周期信号

用确定的时间函数表示的信号,又可分为周期信号(period signal)和非周期信号(non-period signal)。周期信号是每隔一个固定的时间间隔重复变化的信号。严格数学意义上的周期信号,是无始无终地重复着某一变化规律的信号。当然,这样的信号实际上是不存在的,周期信号只是指在较长时间内按照某一规律重复变化的信号。连续周期信号与离散周期信号的数学表示分别为

$$f(t) = f(t + nT) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; -\infty < t < +\infty) \quad (1.1)$$

$$f(k) = f(k + nN) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; -\infty < k < +\infty, k \text{ 取整数}) \quad (1.2)$$

满足以上两式中的最小正数 T 、 N 分别称为周期信号的基本(基波)周期,通常简称周期。

【例 1.1】 判断下列信号是否是周期的,如果是周期的,试确定其周期。

① $f_1(t) = a\sin(5t) + b\cos(9t)$; ② $f_2(t) = a\sin(3t) + b\cos(2\pi t)$;

③ $f_3(t) = (a\sin(2t) + b\sin(5t))^2$ 。

解 如果两个周期信号的周期具有公倍数,则它们的和信号仍然是一个周期信号,其周期为两个周期信号周期的最小公倍数。

① 因为 $\sin(5t)$ 和 $\cos(9t)$ 都是周期信号,且 $\sin(5t)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{5}$, $\cos(9t)$ 周期为 $\frac{2\pi}{9}$, $a\sin(5t)$ 和 $b\cos(9t)$ 中的常数 a 和 b 只改变幅值,不改变周期。 $\frac{2\pi}{5}$ 和 $\frac{2\pi}{9}$ 的最小公倍数为 2π , 所以, $f_1(t)$ 是周期信号,周期为 2π 。

② 因为 $\sin(3t)$ 和 $\cos(2\pi t)$ 都是周期信号,且 $\sin(3t)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$, $\cos(2\pi t)$ 周期为 $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$, $a\sin(3t)$ 和 $b\cos(2\pi t)$ 中的常数 a 和 b 只改变幅值,不改变周期。 $\frac{2\pi}{3}$ 是无理数,1 是有理数, $\frac{2\pi}{3}$ 和 1 不存在公倍数,所以, $f_2(t)$ 是非周期信号。

③ 因为 $f_3(t) = (a\sin(2t) + b\sin(5t))^2 = a^2 \sin^2(2t) + b^2 \sin^2(5t) + 2ab\sin(2t)\sin(5t) =$

$$\frac{a^2}{2}(1 - \cos(4t)) + \frac{b^2}{2}(1 - \cos(10t)) + ab(\cos(3t) - \cos(7t))$$

其中, $\cos(4t)$, $\cos(10t)$, $\cos(3t)$ 和 $\cos(7t)$ 都是周期信号,且它们的周期分别为: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{7}$, 常数 $\frac{a^2}{2}$, $\frac{b^2}{2}$ 和 a 、 b 只改变幅值,不改变周期。 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{7}$ 的最小公倍数为 2π , 所以,

$f_3(t)$ 是周期信号, 周期为 2π 。

【例 1.2】 判断离散余弦信号 $x[k] = \sin(\omega_0 k)$ 是否是周期信号。

解 由周期信号的定义, 如果 $\sin[\omega_0(k+N)] = \sin(\omega_0 k)$, 则 $x[k]$ 是周期信号。

因为

$$\sin[\omega_0(k+N)] = \sin(\omega_0 k + \omega_0 N)$$

要使其为周期信号, 必须有

$$\omega_0 N = m2\pi \quad (m \text{ 为整数})$$

或

$$\frac{|\omega_0|}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad (m \text{ 和 } N \text{ 为不可约的正整数})$$

因此, 只有在 $\frac{|\omega_0|}{2\pi}$ 为不可约的有理数时, $x[k] = \sin(\omega_0 k)$ 才是一个周期信号。

只要给出周期信号在任一周期内的变化过程, 便可知道它在时间轴上任一时刻的数值。非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期 T 或 N 趋于无限大, 则成为非周期信号, 因而非周期信号也可以看做周期无限大的周期信号。通信系统中广泛应用“伪随机信号”, 这种以具有相对较长周期的确定性信号构成“伪随机信号”, 从某一时段来看似无规律, 而经一定周期之后, 波形严格重复。

1.2.4 能量信号与功率信号

如果把信号 $f(t)$ 看做随时间变化的电压和电流, 则当信号 $f(t)$ 通过 1Ω 电阻时, 信号在时间间隔 $-T/2 \leq t \leq T/2$ 内所消耗的能量称为归一化能量, 即为

$$E = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

当 $f(t)$ 为实函数时

$$E = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (1.3)$$

而在上述时间间隔 $-T/2 \leq t \leq T/2$ 内的平均功率称为归一化功率, 即为

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

当 $f(t)$ 为实函数时

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (1.4)$$

当然, 上述定义式是连续时间信号 $f(t)$ 的归一化能量 E 和归一化功率 P 的定义, 对于离散时间信号 $f[k]$, 通常 $f[k]$ 为实函数, 其归一化能量 E 与归一化功率 P 的定义分别为

$$E = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N f^2[k] \quad (1.5)$$

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N f^2[k] \quad (1.6)$$

若信号的能量有界, 平均功率趋于零, 即满足 $E < +\infty, P \rightarrow 0$, 则称该信号为能量有界信号, 简称能量信号 (finite-energy signal)。

若信号的平均功率有界,能量趋于无穷大,即满足 $P < +\infty, E \rightarrow 0$,则称该信号为功率有界信号,简称功率信号(finite-power signal)。

若信号的平均功率和能量均趋于无穷大,则称该信号为非能量、非功率信号。

对能量信号只能从能量去加以考察,而无法从平均功率去考察;对于功率信号,总能量就没有意义,因而只能从功率去加以考察。由直观不难理解:在时间间隔无限趋大的情况下,周期信号都是功率信号;只存在于有限时间内的信号是能量信号;存在于无限时间内的非周期信号可以是能量信号,也可以是功率信号,这要根据信号是何种函数而定。例如持续时间有界的矩形信号和三角脉冲信号等是能量信号;周期脉冲信号、正弦信号、复指数信号等均属功率信号;而类似 $f(t) = t^2$ 这类的信号,由于其能量和功率均无界,故为非能量、非功率信号。

【例 1.3】 已知一连续时间信号为 $f(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{5} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$

(1) 判断该信号是否为周期信号,若是,求出信号的周期;

(2) 该信号是否是能量信号? 是否是功率信号?

解 (1) 要判断该信号是否是周期信号,只需看是否存在一个非零的正整数 T ,使得

$$f(t+T) = \sin \left[\frac{\pi}{5}(t+T) \right]$$

显然,对 $t \geq 0$,有 $T=10$ 时, $f(t+T) = f(t)$, $f(t)$ 好像是周期的。

但由于 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$,例如 $f(-1) = 0$,但 $f(-1+10) = f(9)$, $f(9) = \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) \neq 0$ 。

因此, $f(t)$ 不是周期信号。

(2) 根据信号能量的定义式,有

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^0 |f(t)|^2 dt + \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \\ &= 0 + \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \sin^2 \left(\frac{\pi}{5}t \right) dt \end{aligned}$$

根据三角函数的半角公式,有

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{5}t \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{5}t \right) \right]$$

所以

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{5}t \right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T 1 dt - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \cos \left(\frac{2\pi}{5}t \right) dt \end{aligned}$$

上边积分中,第一项为无穷大,第二项为有界量($-1/2 \sim 1/2$),因而 $E \rightarrow +\infty$ 。

因此, $f(t)$ 不是能量信号。

根据信号平均功率的定义,有

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt =$$

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^0 |f(t)|^2 dt + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \\ & \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \right] dt = \\ & \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1 dt - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) dt = \\ & \frac{1}{4} \end{aligned}$$

由于满足 $P < +\infty, E \rightarrow +\infty$, 故信号 $f(t)$ 是功率信号。

【例 1.4】判断下列信号是否是能量信号、功率信号。

① $f_1(t) = A \cos(\omega_0 t)$; ② $f_2(t) = e^{-t}, t \geq 0$; ③ $f_3[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ 。

解 ① $f_1(t) = A \cos(\omega_0 t)$ 是基本周期 $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ 的周期信号, 其在一个基本周期内的能量为

$$E_0 = \int_0^{T_0} f^2(t) dt = \int_0^{T_0} A^2 \cos^2(\omega t) dt = A^2 \int_0^{T_0} \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t)] dt = \frac{A^2 T_0}{2}$$

由于周期信号有无限个周期, 所以 $f_1(t)$ 的归一化能量为无限值, 即

$$T = \lim_{n \rightarrow +\infty} n T_0$$

信号能量为

$$E = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n E_0 = +\infty$$

其归一化功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n T_0} 2n E_0 = \frac{A^2}{2}$$

归一化功率是非零的有限值, 因此 $f_1(t)$ 是功率信号。

② 由式(1.3)可计算出 $f_2(t)$ 的归一化能量为

$$E = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f_2^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-2t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} (e^{-2T} - 1) = \frac{1}{2}$$

归一化能量是有限值, 因此 $f_2(t)$ 是能量信号。

③ 由式(1.5)和式(1.6)可计算出 $f_3[k]$ 的归一化能量和归一化功率分别为

$$E = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N f_3^2[k] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \sum_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \sum_1^{+\infty} (4)^k + \frac{4}{3} = +\infty$$

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \left(\sum_1^N (4)^k + \sum_0^N \left(\frac{1}{4}\right)^k \right) = +\infty$$

$f_3[k]$ 的归一化能量是无限值, 归一化功率也是无限值, 因此既不是能量信号也不是功率信号。

1.2.5 实信号与复信号

实信号是指可用一实函数来描述的信号, 即信号幅度取值是实数。前面给出的有关信号的例子都是实信号。实信号的共轭是其自身。

复信号, 是指可用一个复函数来描述的信号, 即