合作对策理论及应用

谭春桥　张 强　编著

科 学 出 版 社

合作对策理论及应用

谭春桥　张　强　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书从公理化的角度，以合作对策理论各种解的研究为主线，深入系统地介绍了合作对策理论的主要内容，既包含了合作对策理论最基本的思想和方法，也反映出近年来合作对策理论研究中的一些新成果．全书共十一章，包括绪论、核心、谈判集、核仁和预核仁、核与预核、Shapley 值、τ 值、模糊延拓、不可转移效用合作对策、多选择对策、合作对策的应用．

本书结构清晰、内容翔实，可作为高等院校运筹学、管理科学、系统工程、应用数学、经济学等专业的高年级本科生、研究生的教材，也可作为相关专业教师和研究人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

合作对策理论及应用/谭春桥，张强编著．—北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-032183-1

Ⅰ. ①合… Ⅱ. ①谭… ②张… Ⅲ. ①合作对策-高等学校-教材 Ⅳ. ①O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 173035 号

责任编辑：徐园园 赵彦超／责任校对：宋玲玲

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 9 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2011 年 9 月第一次印刷 印张：19 1/4

印数：1—2 000 字数：375 000

定价：66.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

对策论 (game theory) 又称博弈论, 是研究利益冲突情况下各决策主体理性行为发生直接相互作用时的决策理论, 即研究这种决策如何选择均衡问题的理论. 对策论从一开始就分为合作对策和非合作对策两个分支, 两者的区别在于参与人在博弈过程中是否能够达成一个具有约束力的协议, 后来的发展使得这两个分支在不同时期受到不同程度的重视. 由于缺乏像非合作对策中 Nash 均衡解那样的统一解概念, 以及难以标准化等原因, 合作对策理论的发展速度相对非合作对策而言比较缓慢. 合作对策在理论上的重要突破及其以后的发展在很大程度上起源于 Shapley 在 1953 年提出的 Shapley 值的解概念及其公理化刻画. 合作对策强调的是集体理性、公平和效率, 合作对策理论的公理化方法为讨论公平或合理的分配机制提供了一个理论框架.

近几十年来, 现代经济已经由自由竞争为主的经济方式, 向竞争与合作并存的方式转变, 由此产生了各种合作联盟的经济和社会关系. 这必然使得以研究个体理性决策行为为主的非合作对策理论, 在经济研究和社会分析中遇到越来越多的困难. 只有更多地利用研究联合理性决策行为的合作对策理论, 才能更有效地分析和理解现代经济行为和社会经济规律. Aumann 和 Schelling 正是因为他们在合作对策领域研究所取得的突出贡献 "加强了我们对冲突和合作的理解" 而获得 2005 年诺贝尔经济学奖. 运用合作对策理论来研究和解决各种社会、经济现象已成为当前对策论领域研究的一个热点.

基于上述关于合作对策在理论与实践中的需要, 本书的目的在于运用公理化的方法系统深入地介绍合作对策理论的主要内容及其应用, 探讨合作对策各种解之间存在的内在联系, 帮助读者全面了解合作对策理论的基本思想, 提高运用合作对策理论的基本原理分析和解决实际问题的能力. 本书注重体系上的系统性、数学上的严谨性. 同时, 力求做到所选内容精炼、新颖, 思想方法与应用并举, 反映出合作对策在国内外最新动态和成果. 全书覆盖了合作对策理论所涉及的主要内容, 包括核心、谈判集、核仁和预核仁、核和预核、Shapley 值、τ 值等主要解, 并试图从合作对策的模糊延拓、不可转移效用合作对策及多选择对策等方面介绍合作对策当前

发展的最新动态.

合作对策理论正在向前发展, 许多研究工作还需要不断完善. 尽管我们在撰写过程中做了很多努力, 但由于水平有限, 书中仍难免存在纰漏, 敬请广大读者批评指正.

本书在撰写过程中参考了国内外的大量文献和研究成果, 在此, 我们对这些作者和研究人员表示真诚的感谢. 本书的研究得到了国家自然科学基金项目 (NO: 70771010, 70801064, 71071018, 71072078) 和湖南省自然科学基金项目 (NO: 11JJ3088) 的资助, 本书的出版得到了北京市教育委员会重点学科建设项目的资助, 在此一并表示感谢.

谭春桥　张　强

2011 年 2 月

符 号 表

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{N}$	自然数集
$\varnothing$	空集
$E(v)$	对策 v 的分配集
$C(v)$	对策 v 的核心
$\mathcal{PM}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的预谈判集
$\mathcal{PM}(N,v)$	对策 v 的预谈判集
$\mathcal{M}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的谈判集
$\mathcal{M}(N,v)$	对策 v 的预谈判集
$\mathcal{PM}_{\mathrm{r}}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的反应预谈判集
$\mathcal{PM}_{\mathrm{sr}}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的半反应预谈判集
$\mathcal{PN}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的预核仁
$\mathcal{N}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的核仁
$\mathcal{PN}(N,v)$	对策 v 的预核仁
$\mathcal{N}(N,v)$	对策 v 的核仁
$\mathcal{MN}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的修改核仁
$\mathcal{MN}(N,v)$	对策 v 的修改核仁
$\mathcal{PK}(v)$	对策 v 的预核
$\mathcal{K}(v)$	对策 v 的核
$\mathcal{PK}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的预核
$\mathcal{K}(N,v,\Re)$	具有联盟结构对策 v 的核
$\varphi(v)$	对策 v 的 Shapley 值
$\tau(v)$	对策 v 的 τ 值
AN	匿名性
CADD	条件可加性
CON1	具有 1 的一致性
CON2	具有 2 的一致性
COV	策略等价下的共变性

CRGP	逆缩减对策性质
IGP	中间对策性质
IIA	不相关方案独立性
IR	个体合理性
ISRGP	分配剩余对策性质
NE	非空性
PO	帕累托最优
RCP	再确定性
REAB	从上合理性
REBE	从下合理性
RE	合理性
RETP	限制的平等对待性
RGP	缩减对策性质
SCOV	标量协变性
SD	自对偶性
SIVE	单值
SUPA	超可加性
SYM	对称性
UNA	一致性
WRGP	弱缩减对策性质
$G(N)$	局中人集 N 上所有合作对策之全体
$G_{\mathrm{sa}}(N)$	局中人集 N 上所有超可加对策之全体
$G_{\mathrm{m}}(N)$	局中人集 N 上所有单调对策之全体
$G_{\mathrm{s}}(N)$	局中人集 N 上所有简单对策之全体
$G_{\mathrm{c}}(N)$	局中人集 N 上所有凸对策之全体
$G_{\mathrm{sc}}(N)$	局中人集 N 上所有半凸对策之全体
$G_{\mathrm{1c}}(N)$	局中人集 N 上所有 1–凸对策之全体
$G_{\mathrm{kc}}(N)$	局中人集 N 上所有 k–凸对策之全体
$G_{\mathrm{b}}(N)$	局中人集 N 上所有均衡对策之全体
$G_{\mathrm{qb}}(N)$	局中人集 N 上所有拟均衡对策之全体
$G_{\mathrm{tb}}(N)$	局中人集 N 上所有完全均衡对策之全体
Δ_N	局中人集 N 上具有联盟结构对策之全体
$\mathrm{MCG}(N)$	局中人集 N 上多选择对策之全体

目　录

第 1 章　绪　　论

1.1　引　　言

对策论也称博弈论，是研究利益冲突情况下决策主体理性行为的选择和决策分析的理论，即是研究理性的决策者之间冲突与合作的理论，是“交互的决策论”. 经过半个多世纪的发展，其理论体系不断成熟、完善，应用范围日益广泛，现已涉及经济学、社会学、管理学、政治学、军事学、决策理论、计算机和人工智能、工程控制等众多领域，对策论现已成为整个社会科学特别是经济学的核心. 正如 1998 年诺贝尔经济学得主 Amartya Sen 所说，对策论和社会选择理论是 20 世纪社会科学最主要的成就 [130]. 对策论研究的核心问题是分析多个理性的参与者之间的相互作用，预测他们的理性行为并探讨这种相互作用的均衡实现机制.

对策论的思想与实践在古今中外都有着很长的历史，著名的“齐王与田忌赛马”、巴比伦王国的犹太法典中“婚姻合同问题”等都是一些经典的对策论事例. 对具有策略依存特点的决策问题的研究可追溯到 18 世纪初或更早，Waldegrave 在 1713 年就提出了最早的两个对策的极小极大混合策略解. 1881 年，在 Edgeworth 的《数学心理学》[34] 一书中就已经有了合作对策的思想. 19 世纪和 20 世纪初，经济学家 Augustin Cournot 和数学家 Zermelo, Emile Borel 等对一些具体的对策模型进行了研究，并提出了一些解的概念，但是当时没有形成完整的理论和方法体系. 对策论的研究从一开始就分为两个部分：合作对策 (cooperative game) 与非合作对策 (non-cooperative game). 1944 年 von Neumann 与 Morgenstern[80] 合著的经典著作 *Theory of Games and Economic Behavior* 的出版，标志着对策论的诞生，专著首次提出了合作对策的概念，并用了大量的篇幅讨论合作对策，而在非合作对策中仅讨论了简单的零和对策. 20 世纪 50 年代是合作对策发展的辉煌时期，Nash[78] 讨价还价模型的确立、Shapley[97] 的 Shapley 值解以及 Gillies[39] 关于核心解的提出，都出自这一时期. 与此同时，Nash[79] 发表的关于非合作对策的文章和 Tucher 定义的“囚徒困境”，是现代非合作对策理论研究起始的标志. 对策论的早期开创者如 Nash, Shapley, Harsanyi, Selten 以及 Aumann 等对非合作和合作对策均作出了奠基性的贡献. 后来的发展使得这两个分支在不同时期受到不同程度的重视. 由于 20 世纪后期信息经济学的发展，非合作对策在研究不对称信息情况下市场机制的效率问题中发挥了重要的作用，从而使得非合作对策相对于合作对策占据了主流地

位, 成为经济学的主要分析工具. 但是合作对策在理论上的重要突破及其以后的发展在很大程度上源于 Nash[78] 的谈判对策和 Shapley[97] 用公理化方法刻画并提出 Shapley 值解的概念. 值得指出的是公理化方法 (axiomization) 是合作对策的最基本的方法, 它具有方法论上的重要意义, 公理化方法使我们可以研究讨论合作对策中各种形式的解. 可以说, 合作对策对各个学科的贡献不仅仅是它本身所包含的丰富内容, 而它的公理化方法本身对其他学科如经济学也具有十分重要的借鉴和指导价值. 近一二十年来, 合作对策理论随着现代企业竞争方式的转变越来越受到学术界、企业界的重视, Aumann 和 Schelling 也因为他们在合作对策领域研究所取得的突出贡献 "加强了我们对冲突和合作的理解" 而获得 2005 年诺贝尔经济学奖. 合作对策理论与应用研究也重新成为学界研究的重点, 运用合作对策理论来研究和解决各种社会、经济现象已成为当前学术界研究的一个热点.

尽管对策论的研究是沿着合作对策与非合作对策这两条路径进行, 但是我们不能将合作对策与非合作对策看作是两类不同的对策, 而应将它们视为分析同一对策的不同方式. 尽管两者研究的角度和框架不同, 但合作对策和非合作对策是从不同角度对于博弈思想进行刻画的不同工具, 不能完全分开. 合作对策与非合作对策的关系, Aumann 对其进行了精辟的论述: "对合作与非合作的区分可以追溯到对策论诞生的初期. 它在 Nash 的工作中和其他学者在 20 世纪 50 年代早期的工作中就已经出现了 …… 然而, 直到 20 世纪 60 年代 Harsanyi 才有了用承诺 (commitment) 来将合作模型从非合作模型中区分开的洞见 …… 非合作对策是策略导向的, 它研究的是参与博弈的决策主体如何产生所期望的行为, 是对博弈所发生事情的精确描述, 因此非合作对策是研究微观层面的理论. 而合作对策是成果导向的, 它研究的是参与博弈的决策主体在哪些方面能够达成一致, 如何能够达成一致以及在形成联盟时如何分配他们的共同收益. 合作对策关心的是参与人可行的结果, 而不关心这些结果是如何产生的, 因此合作对策是研究宏观层面的理论."[130] 合作对策与非合作对策之间存在相互转化, 1951 年 Nash 就提出合作对策应该被还原为非合作对策来研究. 他认为所谓合作对策, 是存在无限的博弈前的信息交流, 而且在博弈开始之前就存在有约束力的合约. 而合作对策前的这种交流和承诺没有严格的模型, 但它们也应该被看作是博弈的一部分, 并用与规范对策一样的原则进行分析. 这就是所谓的 Nash 规划 (Nash programming), 即把合作理论中的非规范化部分明确化从而将合作对策简化为非合作对策的过程. 从形式上看, 非合作对策中的一般型和扩展型与合作对策中的联盟型 (特征函数型) 也有密切的联系, 它们在很多例子中可以相互转化. 扩展型对策详细地描述了博弈中参与人的行动次序和信息结构的具体内容, 其所包含的信息最为丰富. 而一般型通过扩展型的简化而失去了部分信息. 如果在非合作对策中引入了有约束力的合约, 那么就可以进一步简化一般型, 把博弈的过程细节省略, 而把关注的重点放在合作的结果上, 就形成了联盟型合作

对策[130].

作为对策论的一个重要组成部分, 合作对策理论提供了一种制定相互依赖、利益共存策略的系统方法, 它主要研究的是参与博弈的有限理性的决策主体谋划如何与其他参与人共同取得尽可能大的收益, 以及在形成联盟时如何分配他们共同的收益. 即合作对策研究的中心问题是: 什么是对策的解和解的存在性以及如何求解. 合作对策解的概念很多, 也很复杂, 因此很难找到一个像非合作对策中 Nash 均衡那样具有核心地位的解的概念. 合作对策求解的方法一般分为两类: 占优解和估值解. 占优解是以占优和异议为主要的准则, 体现了稳定和联盟的信息, 如稳定集、谈判集、核仁、核等都属于占优解. 合作对策的占优解集在某些情形下可能有无穷多个解, 而在另一些情形下可能为空集. 与之不同的是, 合作对策的估值解是一个唯一的解向量. 合作对策的估值解赋予每个合作对策一个独一无二的合理分配, 用以考虑并加以平衡所有相互冲突的主张. Shapley 值是合作对策的一个重要的估值解, 由于该值在分析上的全面合理性及其数学计算上良好的可操作性, 使得这一解概念在许多领域得到了成功的应用, 被普遍认为是最有用的合作对策的解的概念. 对策论专家从合作对策的不同角度, 给出了上述不同特征的解的概念, 虽然这些概念之间有联系, 但相互之间又存在着较大的差别. 可以说, 合作对策解概念的发展演变轨迹也正反映出了合作对策本身的发展路径.

1.2　合作对策的基本概念

在 n 人合作对策中, 由于允许局中人相互交流信息, 也可以制订各种形式的契约, 保障对策后把所得利益进行再分配, 所以局中人之间可以寻求各自感兴趣的伙伴, 共同参与博弈. 换言之, 单个局中人为了克服本身的弱点 (如力量或财力有限) 或共同的兴趣, 寻求与他人进行合作, 以得到或完成单个局中人所不能得到或完成的事. 因此, 局中人之间可以形成不同形式的联盟 (coalition). 一旦某个联盟形成以后, 该联盟的成员都齐心协力, 以保证该联盟获得最大的利益. 局中人本身无关紧要, 关键是该联盟要获得最大利益. 一旦对策完毕, 可以根据某种事先商定好的契约, 以及各个局中人本身的 “力量”, 把得到的利益再重新分配.

合作对策, 也称联盟对策, 是局中人通过合作共同取得尽可能大的利益的竞争决策分析模型. 在合作对策过程中, 局中人要考虑如何结成联盟以及如何分配联盟的收益.

设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示为 n 个局中人形成的集合, N 的任意一个非空子集 S 称为一个联盟. 将空集 $\varnothing$ 称为一个特殊联盟, 那么 n 个局中人能形成 2^N 个联盟.

合作对策的特征是: 局中人之间可以相互协商或合作, 形成不同形式的联盟, 每个联盟一旦形成, 该联盟就作为一个整体共同采取行动, 其目标是使该联盟获得

最大收益. 在合作对策中, 联盟中各局中人努力合作取得的收益通过特征函数或联盟函数值来表示.

定义 1.2.1　给定 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, n 人合作对策的特征函数 (characteristic function) 是定义在 2^N 上的一个实值集函数 v, v: $2^N\to\mathbb{R}$, 且满足 $v(\varnothing)=0$. 其中, $v(S)$ 表示联盟 S 中各局中人通过合作所能得到的最大收益.

对于一个联盟 S, $v(S)$ 的值可以通过下列方式获得: S 中局中人形成联盟, 为了使 S 获得最大收益, 这时最糟糕的情况是剩下的所有局中人 $(N\backslash S)$ 形成另一个联盟来和 S 抗衡. 这样可看作由两个局中人 (即 $N\backslash S$ 与 S) 在进行非合作博弈, $v(S)$ 就是在上述两人非合作博弈中, S 所能得到的最大值.

定义 1.2.2　设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, 给定 N 上的特征函数 v, 称 (N,v) 为 N 上的一个 n 人合作对策. N 上合作对策之全体记为 $G(N)$, 在不引起混淆的情况下, 简记为 G.

显然, 一个 n 人合作对策 (N,v) 取决于集函数 v, 在不混淆的前提下, 本书将简单地以特征函数 v 代替 (N,v) 来表示合作对策. 因此, 也称 v 为 n 人合作对策, 或 n 人对策.

需要强调的是, 合作对策的基本假设是大联盟 N 可以形成. 当大联盟不一定形成时, 不仅要考虑收益的均衡配置 (equilibrium allocation), 还要考虑均衡时的联盟或联盟的划分, 这使得合作对策就成为了一类具有联盟结构的合作对策.

当用特征函数来研究 n 人合作对策时, 实际上作了这样的假定, 即各局中人都用相同的尺度来衡量它们的收益, 并假定各联盟的收益可以以任何方式分配给各局中人. 这两个假设统称为可转移效用假设 (transferable utility), 这种对策也称为可转移效用对策 (TU 对策). 可转移效用假设是为了保证局中人的效用可以在局中人之间自由的转让, 它假定存在一种类似于货币等价物的特殊中介商品, 这样每个局中人给予任何其他局中人的这种 "货币" 的数量, 就相当于自己减少了这么多 "货币" 单位的效用, 而其他局中人增加了这么多 "货币" 单位的效用. 没有这种假设的多人合作对策称为不可转移效用对策 (nontransferable utility), 简称为 NTU 对策. 对于这种对策, 我们将在后面加以论述.

在本书中, 为简便起见, 对于联盟 $\{i,j,\cdots,k\}$, 通常用 $v(i,j,\cdots,k)$ 表示 $v(\{i,j,\cdots,k\})$, 用 $S\bigcup i$ 表示 $S\bigcup\{i\}$, 两联盟 S 与 T 的差用 $S\backslash T$ 表示, 联盟 S 与 T 的基数表示为 $|S|,|T|,\cdots$.

定义 1.2.3　集合 W 是向量空间 V 的一个线性子空间, 如果 $W\subset V$, $0\in W$, W 关于加法和数乘运算是封闭的, 即对所有 x, $y\in W$, $\alpha\in\mathbb{R}$, 有 $x+y\in W$, $\alpha x\in W$.

显然, 对于 N 上的所有对策形成的集合 G, 它是一个 2^{n-1} 维线性空间.

定义 1.2.4　对任意的 $S, T \subseteq N$, $S \bigcap T = \varnothing$, 如果

$$v(S \bigcup T) \geqslant v(S) + v(T),$$

则称 v 是超可加对策. N 上超可加对策之全体记为 $G_{\mathrm{sa}}(N)$.

超可加对策常用来描述这样一类社会经济现象:"团结起来力量大". 它在早期对策论研究中占有十分重要的地位, 也是现实生活中很普遍的一类对策问题. 然而, 在一些合作对策问题中, 如费用分配问题等, 这种超可加性并不满足, 而是满足次可加性, 即

$$v(S \bigcup T) \leqslant v(S) + v(T), \quad S \bigcap T = \varnothing.$$

应当指出的是, 对于 n 人合作对策, 只要求特征函数满足 $v(\varnothing) = 0$, 其超可加性并不要求成立. 也就是说, 可将定义在 2^N 上的一个满足 $v(\varnothing) = 0$ 的实值集函数称为一个 n 人合作对策.

定义 1.2.5　对任意的 $S \subseteq N$, $i \in N$, 如果

$$v(S \bigcup i) \geqslant v(S) + v(i),$$

则称 v 是弱超可加对策, 又称为 0-单调对策.

定义 1.2.6　对任意的 $S, T \subseteq N$, $S \bigcap T = \varnothing$, 如果满足

$$v(S \bigcup T) = v(S) + v(T),$$

则称 v 是可加对策. 这种对策也称为非本质对策. 在这种对策中, S 与 T 联盟不能使总的收益增加, 因此失去了合作的基础.

定理 1.2.1　合作对策 v 为非本质对策的充要条件是

$$v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(i). \tag{1.2.1}$$

证明　必要性是显然的.

充分性. 假定式 (1.2.1) 成立, 设 $S, T \subseteq N$, $S \bigcap T = \varnothing$, 由 v 的超可加性有

$$\begin{aligned} v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(i) &= \sum_{i \in S} v(i) + \sum_{i \in T} v(i) + \sum_{i \in N \backslash S \bigcup T} v(i) \\ &\leqslant v(S) + v(T) + v(N \backslash S \bigcup T) \\ &\leqslant v(S \bigcup T) + v(N \backslash S \bigcup T) \leqslant v(N). \end{aligned}$$

因此

$$v(S) + v(T) = v(S \bigcup T).$$

证毕.

非本质对策没有什么值得研究的内容, 我们主要感兴趣的合作对策是本质对策.

定义 1.2.7 合作对策 v 如果满足

$$v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(i),$$

则称 v 为本质对策 (essential game).

定义 1.2.8 对任意的 $A, B \subseteq N$, $A \supseteq B$, 如果有 $v(A) \geqslant v(B)$, 则称 v 是单调对策. N 上单调对策之全体记为 $G_{\mathrm{m}}(N)$.

定义 1.2.9 对于对策 (N, v), 设 π 是 N 的一个排列 (permutation), 对任意的 $S \subseteq N$, 如果有 $v(\pi(S)) = v(S)$, 则称 π 是对策 (N, v) 的一个对称 (symmetry). 所有对称之全体记为 SYM(G). N 的所有排列形成的集合记为 $\prod(N)$.

定义 1.2.10 设 u 和 v 是两个合作对策, 如果存在常数 $r > 0$ 和实数 $a_i(i \in N)$, 使得

$$v(S) = ru(S) + \sum_{i \in S} a_i, \quad \forall S \subseteq N,$$

则称 u 与 v 是 S 等价或策略等价的, 记为 $u \sim v$.

容易验证, S 等价关系是常义下的等价关系, 即满足

(1) 自反性: $v \sim v$;

(2) 对称性: 若 $u \sim v$, 则 $v \sim u$;

(3) 传递性: 若 $u \sim v, v \sim w$, 则 $u \sim w$.

因此借助 S 等价关系, 可以把所有 n 人合作对策划分成一些等价类, 我们希望从每一个等价类中选出一个代表, 这个代表具有同一等价类中所有成员共有的特性 [126].

定义 1.2.11 合作对策 v 如果满足

$$v(i) = 0, \quad \forall i \in N, \quad v(N) = 1,$$

则称 v 为 (0, 1) 标准化或规范化 (normalization) 对策.

如果对任意的 $i \in N$, $v(i) = 0$, 则称 v 是 0-规范化 (zero-normalized) 对策.

定理 1.2.2 若 u 是本质对策, 则 u 必与某个 (0, 1) 标准化对策是 S 等价的.

证明 因为 u 是本质对策, 所以

$$u(N) - \sum_{i=1}^{n} u(i) > 0.$$

令

$$r = \frac{1}{u(N) - \sum_{i=1}^{n} u(i)} > 0,$$

$$\beta_i = -ru(i), \quad \forall i \in N,$$

在 2^N 上定义一个集函数 v, 对任意的 $S \subseteq N$,

$$v(S) = ru(S) + \sum_{i \in S} \beta_i.$$

于是可得

$$v(i) = ru(i) - ru(i) = 0, \quad v(N) = ru(N) - r\sum_{i \in N} u(i) = 1.$$

所以, v 为 $(0,1)$ 标准化对策. 因此, u 与 v 是 S 等价的, 即 u 必与某个 $(0,1)$ 标准化对策是 S 等价的. 证毕.

定义 1.2.12 若对任意的 $S \subseteq N$, $v(S)$ 的值非 0 即 1, 则称 v 为简单对策.

N 上简单对策之全体记为 $G_s(N)$.

对于简单对策, 特征函数取值为 1 的联盟称为取胜联盟 (winning coalition), 而取值为 0 的联盟称为失败联盟 (losing coalition). 简单对策适用于和政治有关的问题, 如选举问题等, 这时的 $v(S)$ 一般不再表示联盟 S 的收益, 而表示联盟 S 是否取胜.

定义 1.2.13 对任意的 $S \subseteq N$, 若 $v(S)$ 是 $|S|$ 的函数, 则称 v 是对称对策. 其中, $|\cdot|$ 表示集合的基数.

例如, 设 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, 在 N 上定义对策

$$v(S) = \begin{cases} |S|, & |S| < n, \\ n+1, & S = N, \end{cases}$$

那么这是一个对称对策.

定义 1.2.14 如果 v 满足

$$v(S) + v(N \backslash S) = v(N),$$

则称为常和对策, 否则称为非常和对策.

设 N 是一个联盟, $\mathbb{R}$ 表示实数, 设从 N 到 $\mathbb{R}$ 的所有函数之全体记为 $\mathbb{R}^N$, 如果 $x \in \mathbb{R}^N$, $S \subseteq N$, 那么记 $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$. 显然, $x(\varnothing) = 0$.

在合作对策中, 特征函数只表示联盟的总收益, 联盟所得到的总收益如何分配给它的各个参与者 (局中人) 是对策论中一个非常重要的问题, 分配不合理, 任何联盟都将无法形成, 而且已形成的联盟也有破裂的危险.