

2012中考必备

ZHONGKAOYAZHOUTI

中考压轴题

数学

开放与探究题

丛书主编 南秀全
本册主编 姜文清

经典 · 易错
压轴 · 创新
综合



YZLI0890162236

長 春 出 版 社

全国百佳图书出版单位

特别推荐：2011年各地中考题速递

2012 中考必备

经典·易错
热点·创新
压轴·综合

中考压轴题

数学

开放与探究题



丛书主编 南秀全

本册主编 姜文清

本册编委



YZLI0890162236

南 山	肖九河	王田平	汪菊梅	吴丽芬
姜文清	何艳庭	黄振国	王曙光	聂文江
柳 平	张 梅	邢乃心	李丹威	魏元鸿
万德江	汪 彬	沈立新	李 虎	郭秉民
于桂金	张 志	樊 宏	李安宁	郭文翰
施文远	张庭国	陈军奎	李晓娟	吕培庆
杜 文	苏文钰	安映东	刘娟丽	涂晓兰
李凯洛	王 斌	刘继斌		

長 春 出 版 社

全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

中考压轴题.数学.开放与探究题/南秀全主编;姜文清编.—长春:长春出版社,2010.9

ISBN 978-7-5445-1166-7

I.①中… II.①南… ②姜… III.①数学课—初中—解题—升学参考资料 IV.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 207891 号

中考压轴题·数学(开放与探究题)

丛书主编:南秀全

本册主编:姜文清

责任编辑:谢冰玉 郭鼎民

封面设计:刘喜岩

出版发行:长春出版社

发行部电话:0431-88561180

总编室电话:0431-88563443

邮购零售电话:0431-88561177

地址:吉林省长春市建设街 1377 号

邮编:130061

网址:www.cccbs.net

制版:长春出版社美术设计制作中心

印刷:长春第二新华印刷有限责任公司

经销:新华书店

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16

字数:550 千字

印张:19.25

版次:2010 年 9 月第 1 版

印次:2011 年 9 月第 2 次印刷

定价:31.80 元

版权所有 盗版必究

如有印装质量问题,请与印厂联系调换 联系电话:0431-87923413

期待精彩

托马斯·富勒说：“知识是珍宝，但实践是得到它的钥匙。”解题就是一项重要的学习实践。解题，能巩固所学知识和积累运用知识的技巧；解题，能全面了解知识的内涵和知识间的联系；解题，能学会思考问题的方法和掌握解决问题的途径。如果有一套既用时少又能有效落实《新课程标准》要求，事半功倍地夯实基础，发展能力，提高成绩的书该有多好？众里寻它千百度，那书却在灯火阑珊处。亲爱的朋友，《中考压轴题》丛书就是广大师生所期盼的这样一套书！它是在教育专家的悉心指导下，由多年奋战在中考一线、经验丰富的名师精心编写的。本丛书具有以下特点：

一、立足课标，明确考点，适用于使用各种版本教材的学生。

《新课程标准》是中考命题的依据，也是编写本丛书的依据。本丛书把各学科每一册书中的同类问题划分为不同的专题，突出必须掌握的知识点和“考纲”明确的考点，逐步进行经典例题讲解分析，归纳提炼出解题规律，然后辅以适量的同类习题训练，帮助学生巩固知识，灵活运用方法技巧，举一反三，提高水平，增强能力。讲练力求涉及专题的各个不同层面与细节，力求杜绝遗漏，既注意到面，又关注到细，对使用各种版本教材的学生都有很强的指导、启发作用。

二、跟踪学情，强化难点，集中指导学生解决易错题。

由于知识理解偏差，或方法运用不当，学生解题时往往害怕难题，解题出现错题。编者根据多年的教学经验，有针对性地挑选了出错频率

很高的易错题,对每一种题型的解题方法,从思路、技巧、策略上进行了归纳、总结,帮助学生透彻理解知识,找到敏捷的解题思路和简捷的解题方法。特别是强化了解题过程中对隐性知识的理解和运用,以图降低解题难度,提高解题准确性。

三、与时俱进,聚焦热点,指导学生掌握热点考题。

创新是当今时代发展的主旋律。教学和考试因时而变,一大批创意新颖、贴近生活、形式活泼、内容丰富的热点考题应运而生。这些考题不仅注重基础,也渗透了对学生创造、创新素质的检测。为此,编者广泛搜集、精心挑选了一些经典的考题,点拨解题思路,详列经典的解题过程,总结解题规律和方法,强调应当注意的一些问题,然后配以最新的互动练习,做到讲解与训练相结合、教学与检测相结合、学习与提高相结合。与其他教辅书相比,本丛书真正做到了他无我有,他有我新。

四、服务中考,突出重点,引领考生备考冲刺。

学生最终要走进中考考场接受检验。如何科学、准确定位复习策略,有针对性地备考应考?这是中考备考的关键。仔细研究发现,近几年中考命题有这样的趋势:依据《新课程标准》规定的内容,讲求落实重基础,源于教材多变化,检查素养考能力。本丛书在吃透《新课程标准》精髓和准确把握中考命题脉动的基础上,科学预测,审慎选择了一些有代表性的压轴题、综合题,让学生通过练习,提高综合解题能力和创造性地解决问题的能力。无论是例题还是习题,在选题时力求新颖、适用、典型,紧扣当前的考试方向。

另外,为使学生更精准地把握中考脉动,丛书特别增加了“2011年各地中考新题速递”内容,增强了本套丛书的时效性,对学生备战2012年中考更具指导意义。

压轴戏是舞台上的精彩!

压轴题是中考试卷上的精彩!

探寻解决压轴题的技法并告诉你,是本套书的精彩!

因为这套书,拥有面对中考压轴题的淡定,那是期待你将拥有的精彩!

编者

2011年9月1日

目 录

CONTENTS

第一章 阅读理解问题	1
第二章 开放性问题	31
2.1 条件开放性问题	31
2.2 结论开放性问题	41
第三章 探索性问题	51
3.1 条件探索性问题	51
3.2 结论探索性问题	66
3.3 方法探索性问题	91
第四章 存在性问题	108
第五章 设计与构造问题	132
答案与点拨	149

特别篇

2011 年各地中考新题速递..... 274

第一章 阅读理解问题



热点规律透视

1. 阅读理解题的主要类型有:阅读特殊范例,推出一一般结论;阅读解题过程,总结解题思路和方法;阅读新知识,研究新应用等.

2. 解题时要注意:

(1) 阅读是关键,逐字逐词审读,抓住文字语言的重点词句,把握数学语言的关键数式、公理、法则与图形,从中悟透关系,理清思路.

(2) 理解是目标.消化阅读材料中提供的新知识,领悟本质,及获取新知的过程、思路、技巧.这个理解可借助已有的“旧知识”帮衬,使阅读的新知识转化成“旧知识”.

(3) 应用是目的.解决与新知识相关的问题时,可直接应用(或套用)阅读材料提供的公式、定理、法则,模仿或借鉴阅读材料的技法.



创新互动讲练

经典题·易错题

考点1 阅读新知识,研究新应用

【例1】(茂名市,2007)在数学中,为了简便,记

$$\sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n.$$

$$1! = 1, 2! = 2 \times 1, 3! = 3 \times 2 \times 1, \dots, n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

$$\sum_{k=1}^{2006} k - \sum_{k=1}^{2007} k + \frac{2007!}{2006!} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解析 依题意,得

$$\sum_{k=1}^{2006} k - \sum_{k=1}^{2007} k = 1+2+3+\cdots+2006 - (1+2+3+\cdots+2007) = -2007,$$

$$\frac{2007!}{2006!} = \frac{2007 \times 2006!}{2006!} = 2007,$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2006} k - \sum_{k=1}^{2007} k + \frac{2007!}{2006!} = -2007 + 2007 = 0.$$

规律技巧 本题中出现两个新运算符号,

其中“ $\sum$ ”是求和符号, $\sum_{k=1}^n k$ 表示从1到n的n个连续自然数的和,“!”是阶乘符号,“n!”表示从1到n的n个连续自然数的乘积.通过阅读,可以先把数学语言中体现的特征用文字语言表述出来,这实质是提炼本质的过程,做到这里再应用就不会难.

【例2】(永州市,2008)形如 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 的式子叫

做二阶行列式,它的运算法则用公式表示为

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc, \text{ 依此法则计算 } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \text{ 的结果为}$$

()

A. 11 B. -11 C. 5 D. -2

解析 依照题中给出的运算法则,不难计算出

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times (-3) = 11. \text{ 故选 A.}$$

规律技巧 “生搬硬套”是解题的一个法则,

对于新定义的二阶行列式公式,可把要求的问题与公式对比,把相同位置的数字与字母对号入座求解.

【例3】(湖北省恩施自治州,2007)计算机中常用的十六进制是逢16进1的计数制,采用数字0~9和字母A~F共16个计数符号,这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如,用十六进制表示: $E+F=1D$,则 $A \times B =$

()



A. B0 B. 1A C. 5F D. 6E

解析 十六进制 $A \times B$ 换成十进制为 $10 \times$

$11 = 110 = 6 \times 16 + 14$, 用十六进制为 $6E$, 故选 D.

规律技巧 进制转换要善于类比与变化,

观察这个表:

16	(十进制) $= 1 \times 10 + 6$
	(十六进制) $= 1 \times 16 + 0$

可以看出其中的“1”在不同进制中的意义, 由此可知, 十进制的数 G 改写为 $G = m \times 16 + n$, 再对照表格写成十六进制的数.

【例 4】 (山西省, 2007) 如图 1-1, 在平面内, 两条直线 l_1, l_2 相交于点 O , 对于平面内任意一点 M , 若 p, q 分别是点 M 到直线 l_1, l_2 的距离, 则称 (p, q) 为点 M 的“距离坐标”. 根据上述规定, “距离坐标”是 $(2, 1)$ 的点共有 _____ 个.

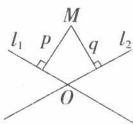


图 1-1

解析 本题可以有不同层次的三种解法:

解法一: 将新问题转化为平面上一点到两条相交直线的距离问题, 逐一画出满足条件的点, 从而求解: 4 个.

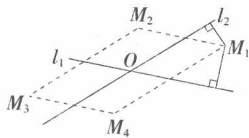


图 1-2

解法二: 将新问题类比为坐标系中点的坐标问题, 并注意二者间的差异, 利用画平行线的方法, 如图 1-2 所示, 从而得解. 此时实际是构造了全等三角形.

解法三: 将一般问题特殊化, 将直线 l_1 与 l_2 画成两条互相垂直的直线, 使问题简单化, 易看出符合条件的点有四个.

由于直线 l_1, l_2 相交共构成四个角, 每个角上都可作出“距离坐标”为 $(2, 1)$ 的点, 因此, “距离坐标”是 $(2, 1)$ 的点共有 4 个.

规律技巧 1. 新知识并不是空中楼阁, 从以上几例可以看出, 或用旧知识解释新公式, 或用旧知识解决新问题. 所以, 这类题的解答关键对于已学知识的理解, 形成扎实的基本功, 并有灵敏的联想意识 (如本题不同解法的不同联想) 和归纳意识 (如例 1 对于 $\sum_{k=1}^n k$ 的理解).

2. 本例的解法三是针对选择题、填空题的“特值法”也很有效, 即从最特殊的角度考虑问题的结构,

从而使问题简化.



同类问题拷贝

- (湖南省湘西自治州, 2009) 对于任意不相等的两个数 a, b , 定义一种运算 “ $*$ ” 如下: $a * b = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b}$, 如 $3 * 2 = \frac{\sqrt{3+2}}{3-2} = \sqrt{5}$. 那么 $12 * 4 =$ _____.
- (孝感市, 2009) 对于任意两个实数对 (a, b) 和 (c, d) , 规定: 当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$ 时, $(a, b) = (c, d)$. 定义运算 “ $\otimes$ ”: $(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. 若 $(1, 2) \otimes (p, q) = (5, 0)$, 则 $p =$ _____, $q =$ _____.
- (深圳市, 2009) 刘谦的魔术表演风靡全国, 小明也学起了刘谦, 发明了一个魔术盒: 当任意实数对 (a, b) 进入其中时, 会得到一个新的实数: $a^2 + b - 1$, 例如把 $(3, -2)$ 放入其中, 就会得到 $3^2 + (-2) - 1 = 6$. 现将实数对 $(m, -2m)$ 放入其中, 得到实数 2, 则 $m =$ _____.
- (兰州市, 2009) 阅读材料: 设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为 x_1, x_2 , 则两根与方程系数之间有如下关系: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 根据该材料填空: 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 6x + 3 = 0$ 的两实数根, 则 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ 的值为 _____.
- (内江市, 2007) 如图 1-3, 某小区有东西方向的街道 3 条, 南北方向的街道 4 条, 从位置 A 出发沿街道行进到达位置 B, 要求路程最短, 研究共有多少种不同的走法. 小东是这样想的: 要使路程最短, 就不能走“回头路”, 只能分五步来完成, 其中三步向右行进, 两步向上行进, 如果用数字 “1” 表示向右行进, 数字 “2” 表示向上行进, 那么 “11221” 与 “11212” 就表示两种符合要求的不同走法, 请你思考后回答: 符合要求的不同走法共有 _____ 种.
- (乌兰察布市, 2008) 对于 x, y 定义一种新运算 “ $*$ ”: $x * y = ax + by$, 其中 a, b 为常数, 等式右边是通常的加法和乘法的运算. 已知: $3 * 5 = 15, 4 * 7 = 28$, 那么 $2 * 3 =$ _____.

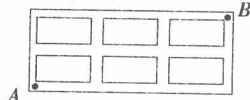


图 1-3

7. (枣庄市, 2008) 在实数的原有运算法则中, 我们补充新运算法则“ $*$ ”如下: 当 $a \geq b$ 时, $a * b = b^2$; 当 $a < b$ 时, $a * b = a$. 则当 $x = 2$ 时, $(1 * x) \cdot x - (3 * x) =$ _____. (“ $*$ ”和“ $-$ ”仍为实数运算中的乘号和减号)

8. (芜湖市, 2007) 定义运算“ $@$ ”的运算法则为: $x @ y = \sqrt{xy+4}$, 则 $(2 @ 6) @ 8 =$ _____.

9. (临沂市, 2007) 如果一个数等于它的不包括自身的所有因数之和, 那么这个数就叫完全数. 例如, 6 的不包括自身的所有因数为 1, 2, 3. 而且 $6 = 1 + 2 + 3$, 所以 6 是完全数. 大约 2200 多年前, 欧几里得提出: 如果 $2^n - 1$ 是质数, 那么 $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ 是一个完全数, 请你根据这个结论写出 6 之后的下一个完全数是_____.

10. (泰安市, 2007) 为确保信息安全, 信息需加密传输, 发送方由明文 $\rightarrow$ 密文 (加密), 接收方由密文 $\rightarrow$ 明文 (解密). 已知加密规则为: 明文 x, y, z 对应密文 $2x+3y, 3x+4y, 3z$. 例如: 明文 1, 2, 3 对应密文 8, 11, 9. 当接收方收到密文 12, 17, 27 时, 则解密得到的明文为_____.

11. (台州市, 2008) 课题研究小组对附着在物体表面的三个微生物 (课题小组成员把他们分别标号为 1, 2, 3) 的生长情况进行观察记录. 这三个微生物第一天各自一分为二, 产生新的微生物

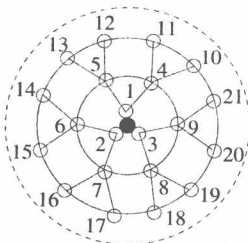


图 1-4

(分别被标号为 4, 5, 6, 7, 8, 9), 接下去每天都按照这样的规律变化, 即每个微生物一分为二, 形成新的微生物 (课题组成员用如图 1-4 所示的图形进行形象的记录). 那么标号为 100 的微生物会出现在

- ()
- A. 第 3 天 B. 第 4 天
C. 第 5 天 D. 第 6 天
12. (鄂州市, 2009) 为了求 $1+2^2+2^3+\dots+2^{2008}$ 的值, 可令 $S=1+2^2+2^3+\dots+2^{2008}$, 则 $2S=2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2009}$, 因此 $2S-S=2^{2009}-1$, 所以 $1+2^2+2^3+\dots+2^{2008}=2^{2009}-1$. 仿照以上推理计算出 $1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2009}$ 的值是 ()
- A. $5^{2009}-1$ B. $5^{2010}-1$
C. $\frac{5^{2009}-1}{4}$ D. $\frac{5^{2010}-1}{4}$

13. (济南市, 2009) 在平面直角坐标系中, 对于平面内任一点 (a, b) , 若规定以下三种变换:

① $f(a, b) = (-a, b)$. 如 $f(1, 3) = (-1, 3)$;

② $g(a, b) = (b, a)$. 如 $g(1, 3) = (3, 1)$;

③ $h(a, b) = (-a, -b)$. 如 $h(1, 3) = (-1, -3)$.

按照以上变换有:

$$f(g(2, -3)) = f(-3, 2) = (3, 2),$$

那么 $f(h(5, -3))$ 等于

()

A. $(-5, -3)$

B. $(5, 3)$

C. $(5, -3)$

D. $(-5, 3)$

考点 2 阅读解题过程, 总结解题思路和方法

【例 5】(台州市, 2008) 在数学学习中, 及时对知识进行归纳和整理是改善学习的重要方法. 善于学习的小明在学习了一次方程 (组)、一元一次不等式和一次函数后, 把相关知识归纳整理如下:

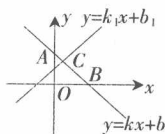


图 1-5

(1) 一次函数的解析式就是一个二元一次方程

一次函数与方程的关系

(2) 点 B 的横坐标是方程①的解;

(3) 点 C 的坐标 (x, y) 中的 x, y 的值是方程组②的解.

(1) 函数 $y=kx+b$ 的函数值 y 大于 0 时, 自变量 x 的取值范围就是不等式③的解集;

一次函数与不等式的关系

(2) 函数 $y=kx+b$ 的函数值 y 小于 0 时, 自变量 x 的取值范围就是不等式④的解集.

(1) 请你根据以上方框中的内容在下面数字序号后写出相应的结论:

① _____; ② _____;

③ _____; ④ _____;

(2) 如果点 C 的坐标为 $(1, 3)$, 那么不等式 $kx+b \geq k_1x+b_1$ 的解集是_____.

解析 (1) ① $kx+b=0$; ② $\begin{cases} y=kx+b \\ y=k_1x+b_1 \end{cases}$;

③ $kx+b>0$; ④ $kx+b<0$.

(2) $\because y=kx+b$ 与 $y=k_1x+b_1$ 的图像相交于点 C, 且点 C 的坐标为 $(1, 3)$.



∴ 由图 1-5 可观察到不等式 $kx+b \geq k_1x+b_1$ 的解集是 $x \leq 1$.

规律技巧

两个函数解析式联立的方程组的解是两个图像交点坐标,它表明此时两个函数值相等,而这个点是个分界点,这个点对应的横坐标往左(或往右),哪个函数图像在上,即哪个函数值大,并且这个性质反过来也成立.

【例 6】(宁波市,2007)2007 年 5 月 19 日起,中国人民银行上调存款利率.

人民币存款利率调整表

项 目	调整前年利率%	调整后年利率%
活期存款	0.72	0.72
两年定期存款	2.79	3.06

储户的实得利息收益是扣除利息税后的所得税利息,利息税率为 20%.

(1)小明于 2007 年 5 月 19 日把 3500 元的压岁钱按一年定期存入银行,到期时他实得利息收益是多少元?

(2)小明在这次利率调整前有一笔一年定期存款,到期时按调整前的年利率 2.79% 计息,本金与实得利息收益的和为 2555.8 元,问他这笔存款的本金是多少元?

(3)小明爸爸有一张在 2007 年 5 月 19 日前存入的 10000 元的一年定期存款单,为获取更大的利息收益,想把这笔存款转存为利率调整后的一年定期存款,问他是否应该转存? 请说明理由.

约定:

① 存款天数按整数天计算,一年按 360 天计算利息.

② 比较利息大小是指从首次存入日开始的一年时间内获得的利息比较.如果不转存,利息按调整前的一年定期利率计算;如果转存,转存前已存天数的利息按活期利率计算,转存后,余下天数的利息按调整后的一年定期利率计算(转存前后本金不变).

解析 (1) $3500 \times 3.06\% \times 80\% = 85.68$ (元).

∴ 到期时他实得利息收益是 85.68 元.

(2) 设他这笔存款的本金是 x 元,则

$$x(1+2.79\% \times 80\%) = 2555.8.$$

解得 $x = 2500$.

∴ 这笔存款的本金是 2500 元.

(3) 设小明爸爸的这笔存款转存前已存了 x 天.

由题意得

$$10000 \times \frac{x}{360} \times 0.72\% + 10000 \times \frac{360-x}{360} \times 3.06\% > 10000 \times 2.79\%,$$

$$\text{解得 } x < 41 \frac{7}{13}.$$

当他这笔存款转存前已存天数不超过 41 天时,他应该转存;否则不需转存.



易错点提示

1. 是否转存,应比较两种方式所获利息大小,而只能转存后利息大于不转存利息时才要转存,按生活经验,利息相等时应不转存.

2. 阅读“约定”内容是关键,不能忽略这个问题的“附属品”,它提供了解题的思路与方法.

【例 7】(河北省,2009)如图 1-6 至图 1-7, $\odot O$ 均作无滑动滚动, $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 、 $\odot O_3$ 、 $\odot O_4$ 均表示 $\odot O$ 与线段 AB 或 BC 相切于端点时刻的位置, $\odot O$ 的周长为 c .

阅读理解:

(1)如图 1-6, $\odot O$ 从 $\odot O_1$ 的位置出发,沿 AB 滚动到 $\odot O_2$ 的位置,当 $AB=c$ 时, $\odot O$ 恰好自转 1 周.

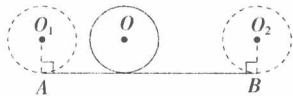


图 1-6

(2)如图 1-7, $\angle ABC$ 相邻的补角是 n° , $\odot O$ 在 $\angle ABC$ 外部沿 $A-B-C$ 滚动,在点 B 处,必须由 $\odot O_1$ 的位置旋转到 $\odot O_2$ 的位置, $\odot O$ 绕点 B 旋转的角 $\angle O_1BO_2 = n^\circ$, $\odot O$ 在点 B 处自转 $\frac{n}{360}$ 周.

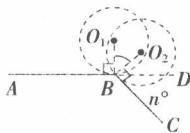


图 1-7

实践应用:

(1)在阅读理解的 1-6 中,若 $AB=2c$,则 $\odot O$ 自转 _____ 周;若 $AB=l$,则 $\odot O$ 自转 _____ 周.在阅读理解的 1-7 中,若 $\angle ABC=120^\circ$,则 $\odot O$ 在点 B 处自转 _____ 周;若 $\angle ABC=60^\circ$,则 $\odot O$ 在点 B 处自转 _____ 周.

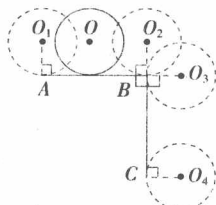


图 1-8

(2)如图 1-8, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=BC=\frac{1}{2}c$. $\odot O$ 从 $\odot O_1$ 的位置出发,在 $\angle ABC$ 外部沿 $A-B-C$ 滚动到 $\odot O_4$ 的位置, $\odot O$ 自转 _____ 周.

拓展联想:

(1)如图 1-9, $\triangle ABC$ 的周长为 l , $\odot O$ 从与 AB 相切于点 D 的位置出发, 在 $\triangle ABC$ 外部, 按顺时针方向沿三角形滚动, 又回到与 AB 相切于点 D 的位置, $\odot O$ 自转了多少周? 请说明理由.

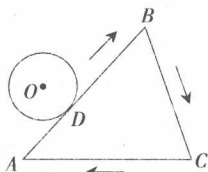


图 1-9

(2)如图 1-10, 多边形的周长为 l , $\odot O$ 从与某边相切于点 D 的位置出发, 在多边形外部, 按顺时针方向沿多边形滚动, 又回到与该边相切于点 D 的位置, 直接写出 $\odot O$ 自转的周数.

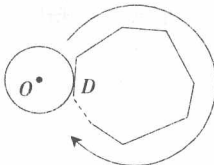


图 1-10

解析 实践应用

$$(1) 2; \frac{l}{c} \cdot \frac{1}{6}; \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}.$$

拓展联想

(1) $\because \triangle ABC$ 的周长为 l ,

$$\therefore \odot O \text{ 在三边上自转了 } \frac{l}{c} \text{ 周.}$$

又 $\because$ 三角形的外角和是 360° ,

$$\therefore \text{在三个顶点处, } \odot O \text{ 自转了 } \frac{360}{360} = 1 \text{ (周).}$$

$$\therefore \odot O \text{ 共自转了 } \left(\frac{l}{c} + 1 \right) \text{ 周.}$$

$$(2) \frac{l}{c} + 1.$$

规律技巧 本题展示了新知识从特殊到一

般的认识过程,“阅读理解”中给出的特殊条件的结论,比较容易利用已知知识理解并求证,其中就包含了问题解决的思路和方法,它们可以模仿或借鉴地运用于“条件不再很特殊”的“实践应用”的问题解决中,而“拓展联想”中的问题只是使问题的条件更趋一般化,但究其本质依然不变,所以它的解决也依然是原来方法的“借用”或“延伸”.综上所述,这类题的解答要记住,无论方法与结论,都与基本的方法与结论有密不可分的关系.

【例 8】 (青岛市, 2008) 实际问题: 某学校共有 18 个教学班, 每班的学生数都是 40 人. 为了解学生课余时间上网情况, 学校打算做一次抽样调查, 如果要确保全校抽取出来的学生中至少有 10 人在同一班级, 那么全校最少需抽取多少名学生?

建立模型: 为解决上面的“实际问题”, 我们先建立并研究下面从口袋中摸球的数学模型:

在不透明的口袋中装有红、黄、白三种颜色的小球各 20 个(除颜色外完全相同), 现要确保从口袋中随机摸出的小球至少有 10 个是同色的, 则最少需摸出多少个小球?

为了找到解决问题的办法, 我们可把上述问题简单化:

(1) 我们首先考虑最简单的情况: 即要确保从口袋中摸出的小球至少有 2 个是同色的, 则最少需摸出多少个小球?

假若从袋中随机摸出 3 个小球, 它们的颜色可能会出现多种情况, 其中最不利的情况就是它们的颜色各不相同, 那么只需再从袋中摸出 1 个小球就可确保至少有 2 个小球同色, 即最少需摸出小球的个数是: $1+3=4$ (如图 1-11①);

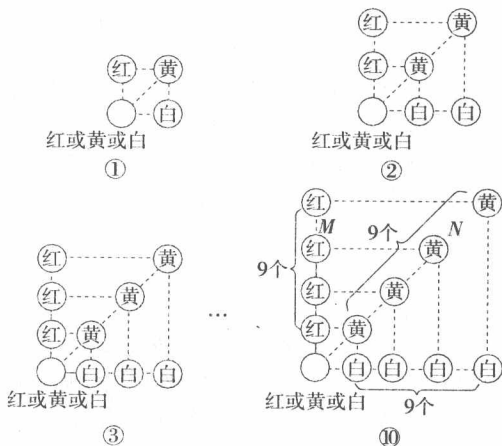


图 1-11

(2) 若要确保从口袋中摸出的小球至少有 3 个是同色的呢?

我们只需在(1)的基础上, 再从袋中摸出 3 个小球, 就可确保至少有 3 个小球同色, 即最少需摸出小球的个数是: $1+3 \times 2=7$ (如图 1-11②)

(3) 若要确保从口袋中摸出的小球至少有 4 个是同色的呢?

我们只需在(2)的基础上, 再从袋中摸出 3 个小球, 就可确保至少有 4 个小球同色, 即最少需摸出小球的个数是: $1+3 \times 3=10$ (如图 1-11③):

.....

(10) 若要确保从口袋中摸出的小球至少有 10 个是同色的呢?



我们只需在(9)的基础上,再从袋中摸出3个小球,就可确保至少有10个小球同色,即最少需摸出小球的个数是: $1+3\times(10-1)=28$ (如图1-11⑩)

模型拓展一:在不透明的口袋中装有红、黄、白、蓝、绿五种颜色的小球各20个(除颜色外完全相同),现从袋中随机摸球:

(1)若要确保摸出的小球至少有2个同色,则最少需摸出小球的个数是_____;

(2)若要确保摸出的小球至少有10个同色,则最少需摸出小球的个数是_____;

(3)若要确保摸出的小球至少有 n 个同色($n < 20$),则最少需摸出小球的个数是_____.

模型拓展二:在不透明口袋中装有 m 种颜色的小球各20个(除颜色外完全相同),现从袋中随机摸球:

(1)若要确保摸出的小球至少有2个同色,则最少需摸出小球的个数是_____.

(2)若要确保摸出的小球至少有 n 个同色($n < 20$),则最少需摸出小球的个数是_____.

问题解决:(1)请把本题中的“实际问题”转化为一个从口袋中摸球的数学模型;

(2)根据(1)中建立的数学模型,求出全校最少需抽取多少名学生.

解析 **模型拓展一:**(1) $1+5=6$;

(2) $1+5\times 9=46$;(3) $1+5(n-1)$.

模型拓展三:(1) $1+m$;(2) $1+m(n-1)$.

问题解决:(1)在不透明口袋中放入18种颜色的小球(小球除颜色外完全相同)各40个,现要确保从口袋中随机摸出的小球至少有10个是同色的,则最少需摸出多少个小球?

(2) $1+18\times(10-1)=163$.

规律技巧 “挑人”和“摸球”的本质是相通的,那么“摸球”总结出来的规律也适用于“挑人”上.解答这种类型的问题,不要被长长的文字所吓倒,透过文字,抓住关键,就会找到解题的途径.



同类问题拷贝

14. (龙岩市,2006)我国宋朝数学家杨辉在他的著作《详解九章算法》中提出“杨辉三角”(如图1-12),此图揭示了 $(a+b)^n$ (n 为非负整数)展开式的项数及各项系数的有关规律.例如:

		1		
	1		1	
1		2		1
1	3		3	1
.....				

图1-12

$(a+b)^0=1$,它只有一项,系数为1;

$(a+b)^1=a+b$,它有两项,系数分别为1,1,系数和为2;

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,它有三项,系数分别为1,2,1,系数和为4;

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,它有四项,系数分别为1,3,3,1,系数和为8;

.....

根据以上规律,解答下列问题:

(1) $(a+b)^4$ 展开式共有_____项,系数分别为_____;

(2) $(a+b)^n$ 展开式共有_____项,系数和为_____.

15. (邵阳市,2009)阅读下列材料,然后回答问题.

在进行二次根式运算时,我们有时会碰上如 $\frac{3}{\sqrt{5}}$,

$\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 一样的式子,其实我们还可以将其

进一步化简:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (一)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (二)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2 \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} \quad (三)$$

以上这种化简的步骤叫做分母有理化.

$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 还可以用以下方法化简:

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3})^2-1^2}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1 \quad (四)$$

(1)请用不同的方法化简 $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

①参照(三)式得 $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

②参照(四)式得 $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2)化简: $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots +$

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$

16. (佛山市,2009)阅读材料:把形如 ax^2+bx+c 的

二次三项式(或其一部分)配成完全平方式的方法叫做配方法.配方法的基本形式是完全平方公式的逆写,即 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

例如: $(x-1)^2 + 3$ 、 $(x-2)^2 + 2x$ 、 $(\frac{1}{2}x-2)^2 + \frac{3}{4}x^2$ 是 $x^2 - 2x + 4$ 的三种不同形式的配方(即“余项”分别是常数项、一次项、二次项——见横线上的部分).

请根据阅读材料解决下列问题:

(1)比照上面的例子,写出 $x^2 - 4x + 2$ 三种不同形式的配方;

(2)将 $a^2 + ab + b^2$ 配方(至少两种形式);

(3)已知 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - 3b - 2c + 4 = 0$,求 $a + b + c$ 的值.

17. (新疆维吾尔自治区、新疆生产建设兵团,2009)甲、乙两同学学习计算机打字,甲打一篇 3000 字的文章与乙打一篇 2400 字的文章所用的时间相同.已知甲每分钟比乙每分钟多打 12 个字,问甲、乙两人每分钟各打多少个字?

李明同学是这样解答的:

设甲同学打一篇 3000 字的文章需要 x 分钟,

根据题意,得 $\frac{3000}{x} - \frac{2400}{x} = 12$ ①

解得: $x = 50$.

经检验 $x = 50$ 是原方程的解. ②

答:甲同学每分钟打字 50 个,乙同学每分钟打字 38 个. ③

(1)请从①②③三个步骤说明李明同学的解答过程是否正确,若有不正确的步骤改正过来.

(2)请你用直接设未知数列方程的方法解决这个问题.

18. (广东省,2009)小明用下面的方法求出方程 $2\sqrt{x} - 3 = 0$ 的解,请你仿照他的方法求出下面另外两个方程的解,并把你的解答过程填写在下面的表格中.

方 程	换元法得 新方程	解新 方程	检 验	求原方程的 解
$2\sqrt{x} - 3 = 0$	令 $\sqrt{x} = t$, 则 $2t - 3 = 0$	$t = \frac{3}{2}$	$t = \frac{3}{2} > 0$	$\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ 所以 $x = \frac{9}{4}$
$x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$				
$x + \sqrt{x - 2} - 4 = 0$				

19. (深圳市,2009)先阅读理解下面的例题,再按要求求解:

例题:解一元二次不等式 $x^2 - 9 > 0$.

解: $\because x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$,

$\therefore (x+3)(x-3) > 0$.

由有理数的乘法法则“两数相乘,同号得正”,有

$$(1) \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x+3 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

解不等式组(1),得 $x > 3$,

解不等式组(2),得 $x < -3$,

故 $(x+3)(x-3) > 0$ 的解集为 $x > 3$ 或 $x < -3$,
即一元二次不等式的解集为 $x > 3$ 或 $x < -3$.

问题:求分式不等式 $\frac{5x+1}{2x-3} < 0$ 的解集.

20. (益阳市,2006)我们把分子为 1 的分数叫做单位分数.如 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$,任何一个单位分数都可以

拆分成两个不同的单位分数的和,如 $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}, \dots$

(1)根据对上述式子的观察,你会发现 $\frac{1}{5} = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\bigcirc}$.请写出 $\square, \bigcirc$ 所表示的数;

(2)进一步思考,单位分数 $\frac{1}{n}$ (n 是不小于 2 的正整数) $= \frac{1}{\triangle} + \frac{1}{\star}$,请写出 $\triangle, \star$ 所表示的式,并加以验证.

21. (青岛市课改区,2006)我国著名数学家华罗庚曾说过:“数缺形时少直观,形少数时难入微;数形结合百般好,隔离分家万事休”.数学中,数和形是两个最主要的研究对象,它们之间有着十分密切的联系,在一定条件下,数和形之间可以相互转化,相互渗透.

数形结合的基本思想,就是在研究问题的过程中,注意把数和形结合起来考察,斟酌问题的具体情形,把图形性质的问题转化为数量关系的问题,或者把数量关系的问题转化为图形性质的问题,使复杂问题简单化,抽象问题具体化,化难为易,获得简便易行的成功方案.

例如,求 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ 的值,其中 n 是正整数.

对于这个求和问题,如果采用纯代数的方法(首尾两头加),问题虽然可以解决,但在求和过程



中,需对 n 的奇偶性进行讨论.

如果采用数形结合的方法,即用图形的性质来说明数量关系的事实,那就非常的直观.现利用图形的性质来求 $1+2+3+4+\cdots+n$ 的值,方案如下:如图 1-13,斜线左边的三角形图案是由上到下每层依次分别为 $1, 2, 3, \dots, n$ 个小圆圈排列组成的.而组成整个三角形小圆圈的个数恰为所求式子 $1+2+3+4+\cdots+n$ 的值.为求式子的值,现把左边三角形倒放于斜线右边,与原三角形组成一个平行四边形.此时,组成平行四边形的小圆圈共有 n 行,每行有 $(n+1)$ 个小圆圈,所以组成平行四边形小圆圈的总个数为 $n(n+1)$ 个,因此,组成一个三角形小圆圈的个数为 $\frac{n(n+1)}{2}$,即

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

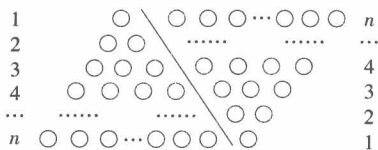


图 1-13

(1)仿照上述数形结合的思想方法,设计相关图形,求 $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$ 的值,其中 n 是正整数.(要求:画出图形,并利用图形做必要的推理说明)

(2)试设计另外一种图形,求 $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$ 的值,其中 n 是正整数.(要求:画出图形,并利用图形做必要的推理说明)

22. (济宁市, 2009)阅读下面的材料:在平面几何中,我们学过两条直线平行的定义.下面就两个一次函数的图像所确定的两条直线,给出它们平行的定义:设一次函数 $y=k_1x+b_1$ ($k_1 \neq 0$) 的图像为直线 l_1 , 一次函数 $y=k_2x+b_2$ ($k_2 \neq 0$) 的图像为直线 l_2 , 若 $k_1=k_2$, 且 $b_1 \neq b_2$, 我们就称直线 l_1 与直线 l_2 互相平行.

解答下面的问题:

(1)求过点 $P(1, 4)$ 且与已知直线 $y=-2x-1$ 平行的直线 l 的函数表达式,并画出直线 l 的图像;

(2)设直线 l 分别与 y 轴、 x 轴交于点 A 、 B , 如果直线 $m: y=kx+t$ ($t>0$) 与直线 l 平行且交 x 轴于点 C , 求出 $\triangle ABC$ 的面积 S 关于 t 的函数表达式.

23. (苏州市课改区, 2006)司机在驾驶汽车时,发现紧急情况到踩下刹车需要一段时间,这段时间叫反应时间.之后还会继续行驶一段距离.我们把司机从发现紧急情况到汽车停止所行驶的这段距离叫“刹车距离”(如图 1-14).



图 1-14

已知汽车的刹车距离 s (单位: m) 与车速 v (单位: m/s) 之间有如下关系: $s=tv+kv^2$ 其中 t 为司机的反应时间 (单位: s), k 为制动系数.某机构为测试司机饮酒后刹车距离的变化,对某种型号的汽车进行了“醉汉”驾车测试,已知该型号汽车的制动系数 $k=0.08$, 并测得志愿者在未饮酒时的反应时间 $t=0.7$ s.

(1)若志愿者未饮酒,且车速为 11 m/s, 则该汽车的刹车距离为 _____ m (精确到 0.1 m).

(2)当志愿者在喝下一瓶啤酒半小时后,以 17 m/s 的速度驾车行驶,测得刹车距离为 46 m. 假如该志愿者当初是以 11 m/s 的车速行驶,则刹车距离将比未饮酒时增加多少? (精确到 0.1 m)

(3)假如你以后驾驶该型号的汽车以 11 m/s 至 17 m/s 的速度行驶,且与前方车辆的车距保持在 40 m 至 50 m 之间.若发现前方车辆突然停止,为防止“追尾”,则你的反应时间应不超过多少秒? (精确到 0.01 s)

24. (湛江市, 2006) 如图 1-15, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=1$, $AC=2$, 把边长分别为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的 n

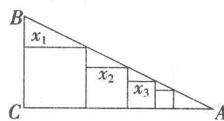


图 1-15

个正方形依次放入 $\triangle ABC$ 中, 请回答下列问题:

(1)按要求填表

n	1	2	3
x_n			

(2)第 n 个正方形的边长 $x_n =$ _____;

(3)若 m, n, p, q 是正整数, 且 $x_m \cdot x_n = x_p \cdot x_q$, 试判断 m, n, p, q 的关系.

25. (江苏省淮安市课改区, 2006) 阅读材料: 如图 1-16①, $\triangle ABC$ 的周长为 l , 内切圆 O 的半径为

r , 连结 OA 、 OB 、 OC , $\triangle ABC$ 被划分为三个小三角形, 用 $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCA},$$

$$\text{又 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot r,$$

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} BC \cdot r,$$

$$S_{\triangle OCA} = \frac{1}{2} CA \cdot r,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} CA \cdot r =$$

$$\frac{1}{2} l \cdot r \text{ (可作为三角形内切圆半径公式)}$$

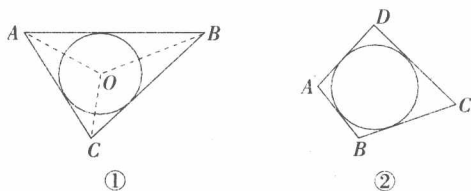


图 1-16

(1) 理解与应用: 利用公式计算边长分别为 5、12、13 的三角形内切圆半径;

(2) 类比与推理: 若四边形 $ABCD$ 存在内切圆 (与各边都相切的圆, 如图 1-16②) 且面积为 S , 各边长分别为 a, b, c, d , 试推导四边形的内切圆半径公式;

(3) 拓展与延伸: 若一个 n 边形 (n 为不小于 3 的正整数) 存在内切圆且面积为 S , 各边长分别为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 合理猜想其内切圆半径公式 (不需说明理由).

26. (沈阳市课改区, 2006) 如图 1-17①, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别为边 BC, CD 的中点, AF, DE 相交于点 G , 则可得结论: ① $AF = DE$; ② $AF \perp DE$. (不需要证明)

(1) 如图 1-17②, 若点 E, F 不是正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 的中点, 但满足 $CE = DF$, 则上面的结论①②是否仍然成立? (请直接回答“成立”或“不成立”)

(2) 如图 1-17③, 若点 E, F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB 的延长线和 DC 的延长线上, 且 $CE = DF$, 此时上面的结论①、②是否仍然成立? 若成立, 请写出证明过程; 若不成立, 请说明理由.

(3) 如图 1-17④, 在 (2) 的基础上, 连接 AE 和 EF , 若点 M, N, P, Q 分别为 AE, EF, FD, AD 的中点, 请判断四边形 $MNPQ$ 是“矩形、菱形、正方

形、等腰梯形”中的哪一种? 并写出证明过程.

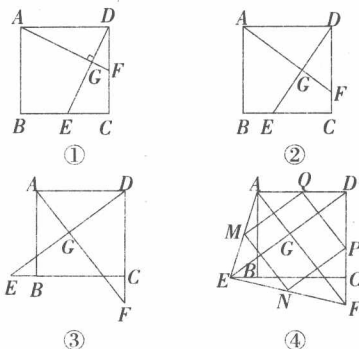


图 1-17

27. (北京市, 2006) 请阅读下列材料:

问题: 现有 5 个边长为 1 的正方形, 排列形式如图 1-18①, 请把它们分割后拼接成一个新的正方形. 要求: 画出分割线并在正方形网格图 (图中每个小正方形的边长均为 1) 中用实线画出拼接成的新正方形.

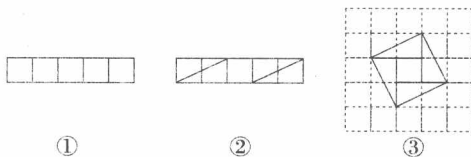


图 1-18

小东同学的做法是: 设新正方形的边长为 x ($x > 0$). 依题意, 割补前后图形的面积相等, 有 $x^2 = 5$, 解得 $x = \sqrt{5}$. 由此可知新正方形的边长等于两个正方形组成的矩形对角线的长. 于是, 画出如图 1-18②所示的分割线, 拼出如图 1-18③所示的新正方形.

请你参考小东同学的做法, 解决如下问题:

现有 10 个边长为 1 的正方形, 排列形式如图 1-19①, 请把它们分割后拼接成一个新的正方形. 要求: 在图 1-19①中画出分割线, 并在图 1-19②的正方形网格图 (图中每个小正方形的边长均为 1) 中用实线画出拼接成的新正方形.

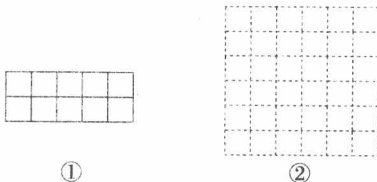


图 1-19



说明:直接画出图形,不要求写分析过程.

28. (大连市课改区中考, 2006) 如图 1-20 ①, $Rt\triangle ABC$ 中 $AB=AC$, 点 D, E 是线段 AC 上两动点, 且 $AD=EC$, AM 垂直 BD , 垂足为 M , AM 的延长线交 BC 于点 N , 直线 BD 与直线 NE 相交于点 F .

试判断 $\triangle DEF$ 的形状, 并加以证明.

说明: (1) 如果你经历反复探索, 没有找到解决问题的方法, 请你把探索过程中的某种思路写出来(要求至少写 3 步); (2) 在你经历说明(1)的过程之后, 可以从下列 ①、② 中选取一个补充或者更换已知条件, 完成你的证明.

① 画出将 $\triangle BAD$ 沿 BA 方向平移 BA 长, 然后顺时针旋转 90° 后的图形;

② 点 K 在线段 BD 上, 且四边形 $AKNC$ 为等腰梯形 ($AC \parallel KN$, 如图 1-20 ②).

附加题: 如图 1-20 ③, 若点 D, E 是直线 AC 上两动点, 其他条件不变, 试判断 $\triangle DEF$ 的形状, 并说明理由.

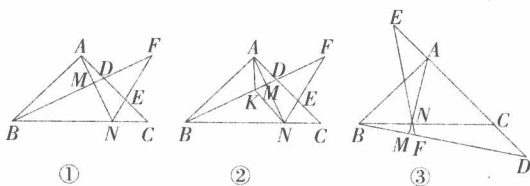


图 1-20

29. (佛山市课改区, 2006) 在数学学习过程中, 通常是利用已有的知识与经验, 通过对研究对象进行观察、实验、推理、抽象概括, 发现数学规律, 揭示研究对象的本质特征. 比如“同底数幂的乘法法则”的学习过程是利用有理数的乘方概念和乘法结合律, 由“特殊”到“一般”进行抽象概括的:
- $$2^2 \times 2^3 = 2^5, 2^3 \times 2^4 = 2^7, 2^2 \times 2^6 = 2^8, \dots, 2^m \times 2^n = 2^{m+n}, \dots \Rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n} (m, n \text{ 都是正整数})$$

我们亦知: $\frac{2}{3} < \frac{2+1}{3+1}, \frac{2}{3} < \frac{2+2}{3+2}, \frac{2}{3} < \frac{2+3}{3+3},$

$$\frac{2}{3} < \frac{2+4}{3+4}, \dots$$

(1) 请你根据上面的材料归纳出 $a, b, c (a > b > 0, c > 0)$ 之间的一个数学关系式;

(2) 试用(1)中你归纳的数学关系式, 解释下面生活中的一个现象: “若 m 克糖水里含有 n 克糖, 再加入 k 克糖(仍不饱和), 则糖水更甜了”;

(3) 如图 1-21, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, CB =$

$a, CA = b, AD = BE = c (a > b)$. 能否根据这个图形提炼出与(1)中同样的关系式? 并予以证明.

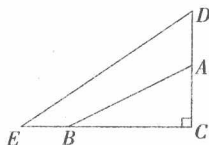


图 1-21

30. (太原市课改区, 2006) 在学习扇形的面积公式时, 同学们推得 $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$, 并通过比较扇形面积公式与弧长公式 $l = \frac{n\pi R}{180}$, 得出扇形面积的另一种计算方式 $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lR$.

接着老师让同学们解决两个问题:

问题 1: 求弧长为 4π , 圆心角为 120° 的扇形面积.

问题 2: 某小区设计的花坛形状如图 1-22 中的阴影部分, 已知 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 所在圆的圆心都是点 O , $\widehat{AB}$ 的长为 l_1 , $\widehat{CD}$ 的长为 l_2 , $AC = BD = d$, 求花坛的面积.

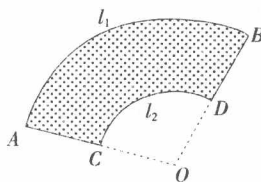


图 1-22

- (1) 请你解答问题 1;
- (2) 在解完问题 2 后的全班交流中, 有位同学发现扇形面积公式 $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lR$ 类似于三角形面积公式; 类比梯形面积公式, 他猜想花坛的面积 $S = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)d$. 他的猜想正确吗? 如果正确, 写出推导过程; 如果不正确, 请说明理由.

31. (贵州省黔南州, 2006) 阅读

材料题:

在平面直角坐标系中, 已知 x 轴上两点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 的距离记作 $|AB| = |x_1 - x_2|$, 如 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是平面上任意两点, 我们可以通过构造直角三角形来求 AB 间距离, 如图 1-23, 过 A, B 分

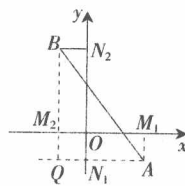


图 1-23

别向 x 轴、 y 轴作垂线 AM_1 、 AN_1 和 BM_2 、 BN_2 ，垂足分别是 $M_1(x_1, 0)$ 、 $N_1(0, y_1)$ 、 $M_2(x_2, 0)$ 、 $N_2(0, y_2)$ ，直线 AN_1 交 BM_2 于 Q ，在 $Rt\triangle ABQ$ 中， $|AB|^2 = |AQ|^2 + |QB|^2$ 。

$$\therefore |AQ| = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|QB| = |N_1N_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$\therefore |AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

由此得任意两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 间距离公式 $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

(1) 直接应用平面内两点间距离公式，求点 $A(1, -3)$ 、 $B(-2, 1)$ 之间的距离；

(2) 若 $O(1, -1)$ 是平面上一定点， $P(x, y)$ 是平面上一点，且 O, P 间的距离恒为 2，运用平面内两点间距离公式，写出关于 x, y 满足的方程，并说出此方程的图像是什么？

32. (南宁市, 2007) 南宁市 2006 年的污水处理量为 10 万吨/天，2007 年的污水处理量为 34 万吨/天，2007 年平均每天的污水排放量是 2006 年平均每天污水排放量的 1.05 倍，若 2007 年每天的污水处理率比 2006 年每天的污水处理率提高 40% (污水处理率 = $\frac{\text{污水处理量}}{\text{污水排放量}}$)。

(1) 求南宁市 2006 年、2007 年平均每天的污水排放量分别是多少万吨？(结果保留整数)

(2) 预计我市 2010 年平均每天的污水排放量比 2007 年平均每天污水排放量增加 20%，按照国家要求“2010 年省会城市的污水处理率不低于 70%”，那么我市 2010 年每天污水处理量在 2007 年每天污水处理量的基础上至少还需要增加多少万吨，才能符合国家规定的要求？

热点题·创新题

【例 9】(金华市, 2008) 如图 1-24，第①个多边形由正三角形“扩展”而来，边数记为 a_3 ，第②个多边形由正方形“扩展”而来，边数记为 a_4 ，…，依此类推，由正 n 边形“扩展”而来的多边形的边数记为 a_n ($n \geq 3$)。

则 a_5 的值是为 $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_n}$ 的结果是 $\frac{197}{600}$ 时， n 的值为 $\frac{197}{600}$ 。

解析 本题是一道关于代数式的探究型试题。

观察所给图形，计算各自的边数可得其边数依次是

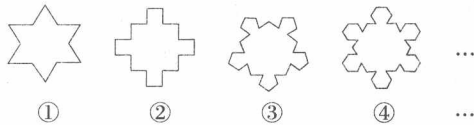


图 1-24

12, 20, 30, 42，将这些数字分解为包含多边形边数的乘积式，不难找出规律。12 = 3 × 4，20 = 4 × 5，30 = 5 × 6，42 = 6 × 7。

由此可得 $a_n = n(n+1)$ ，则 $a_5 = 30$ 。

$$\text{因 } \frac{1}{a_3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{a_4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{则 } \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{197}{600},$$

$$\text{可变为 } \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} = \frac{197}{600},$$

解得 $n = 199$ 。

规律技巧 1. 本题关键在两个“发现”：

(1) 数字特征： $a_n = n(n+1)$ ；(2) 式子特征： $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 。它们都建立在仔细分析与观察的基础上才能获取。

2. 合理估测猜想，即从对简单、特殊的数式、图形发现特征后，大胆联想、推测一般情形也具备这些特征，从而提供一般规律用以解题。

【例 10】(荆门市, 2007) 一、问题背景

某校九年级(1)班课题学习小组对家庭煤气的使用量做了研究，其实验过程和对数据的处理如下。

仔细观察现在家庭使用的电子打火燃气灶，发现当关着煤气的时候，煤气旋钮(以下简称旋钮)的位置为竖起方向，把这个位置定为 0° ，煤气开到最大时，位置为 90° 。(以 0° 位置作起始边，旋钮和起始边的夹角)。在 $0 \sim 90^\circ$ 之间平均分成五等分，代表不同的煤气流量，它们分别是 $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 90^\circ$ ，见图 1-25。

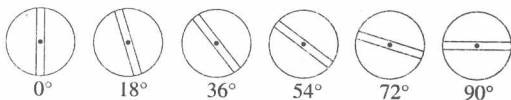


图 1-25

在这些位置上分别以烧开一壶水(3.75 升)为标准，记录所需的时间和所用的煤气量，并根据旋钮位