

Galois Theory



HIT

数学·统计学系列

Galois 理论

[德] E·阿廷 著 李同孚 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



Galois Theory Galois 理论

● [德] H. 阿廷 著 ● 李同孚 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书是世界著名数学家阿廷(E. Artin)在德国 Notre Dume 大学的讲稿,本书用极其简练的语言介绍了近世代数中的伽罗华(Galois)理论.

本书对伽罗华理论的论述有自己独到之处,如伽罗华理论基本定理的证明较之其他著作有较大简化.对分圆多项式的不可约性在本书中采用了朗道(Landau)的证法,而不是像其他书中采用整多项式的性质进行证明.

本书由北京大学已故教授李同孚先生翻译,可供大学数学系师生及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Galois 理论/(德)阿廷(Artin, E.)著;李同孚
译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.3
ISBN 978-7-5603-3225-3

I. ①G… II. ①阿… ②李… III. ①伽罗瓦理论
IV. ①O153.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 038427 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 唐 蕾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 5.75 字数 104 千字

版 次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3225-3

定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

阿廷 (Artin, Emil, 1898—1962)

代数学家. 生于奥地利维也纳. 1916 年在维也纳大学学习了一个学期后加入步兵团; 1919 年进莱比锡大学继续学习, 1921 年获博士学位; 随即去格廷根大学一年; 后到汉堡大学, 1923 年为不支薪讲师, 1925 年升为副教授, 1926 年升为教授. 1937 年移居美国, 先后在圣母玛利亚大学和布卢明顿印第安那大学执教. 1946—1958 年执教普林斯顿大学. 1958 年回到汉堡大学. 1962 年法国克莱蒙尔德大学授予他荣誉博士学位, 同年他因心力衰竭逝世.

阿廷研究的领域很广, 主要有仿射几何, 类域论, 伽罗华理论, Γ -函数, 同调代数, 模论, 环论, 拓扑, 复变函数论等.

阿廷被公认为现代抽象代数学的先驱. 1923 年, 他在研究非阿贝尔 L 级数 (属于迪利克雷 L 级数的推广) 时提出广义互反律猜想, 并于 1927 年证明了它. 从而解决了希尔伯特第 9 问题. 他还利用这个互反律把著名的希尔伯特主猜想归结为纯粹的群论问题, 后来被 P·H·富特文格勒证明 (1930). 1926 年, 他引进实域的概念, 从而肯定地解决了希尔伯特第 17 问题: n 个变量的正定有理式能否表示成有理式的平方和? 1944 年, 他提出“阿廷环” (即关于右理想的极小条件的环) 的概念, 这是现代代数学的基本概念之一. 阿廷提出过许多著名猜想, 给

代数学研究以巨大的推动.例如他在 20 世纪 20 年代提出了函数域上的黎曼猜想(韦伊于 1941 年给予了证明),非阿贝尔 L 级数是亚纯的(布饶尔于 1947 年证明)并且也有黎曼猜想的性质(至今尚未证明);20 世纪 30 年代他猜测有限域是拟代数闭域(几乎立即被谢瓦莱证明)等等.他还猜测如果一个单群的阶 g 能够被 $p > g^{1/3}$ 整除,则这个群必属于已知类型(被布饶尔等于 1958 年证明).他对三维空间的纽结理论研究也有贡献.此外,还有许多现代数学的概念都联系着阿廷的名字,如阿廷模,阿廷猜想,阿廷符号,阿廷 L 函数等.

阿廷热爱讲授各级课程,范·德·瓦尔登的名著《代数学》就是根据他和 E·诺特的讲课记录整理而成的.他的著作包括《 ν 函数引论》(Einführung in die Theorie der Gammafunktion, 1931),《伽罗瓦理论》,(Galois Theory, 1942),《代数数与代数函数》(Algebraic Numbers and Algebraic Functions, 1950),《类域论》(1951)和《几何代数》(Geometric Algebra, 1957)等.他的著作很多,但不轻易发表.1965 年,斯普林格出版社出版了阿廷的文集,其中包括了他的全部 49 篇论文.

此书的英文版原是我过去在 Notre Dame 大学一个夏季学期里所作讲义的整理. 当时是为了使代数初步知识较少的大学生在较短时间内了解 Galois 理论的方法及问题的提出. A. N. Milgram 先生为此整理工作写了一个涉及这理论应用的第 III 部分.

当出版社建议我出德文译本时, 提出问题, 可否同时写出近世代数抽象基础的导论. 但经仔细考虑后, 我想保持本书的原来计划, 还是针对同样的读者. 现在已有足够的教科书, 其中详述了代数的基础.

但是, 在 Ziegler 先生的译文初稿完成之后, 发现最后两部分需要修改. 第 II 部分里较大的变更仅如下述: 简化了 Galois 理论基本定理的证明. 述及单位根的那节里, 采用了分圆多项式不可约性的证明, 它不用整多项式分解的性质, 而是凭借 Landau 的证法. 最后, 第 III 部分完全重写.

改写上得到 Hel Braun 小姐的大力支持. 我感谢 H. Reichardt 先生在校对上的许多有价值的建议和协助.

E. Artin

汉堡, 1959 年 8 月



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61
数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展观	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	即将出版	98.00	
数学解题中的物理方法	2011-03	28.00	114
数学解题的特殊方法	即将出版	38.00	115
中学数学计算技巧	即将出版	38.00	116
中学数学证明方法	即将出版	48.00	117
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006-05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008-09	28.00	40
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00	15
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00	43
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00	



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	36
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-03	48.00	87
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的五心	2009-06	28.00	51
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	48.00	89
500个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
数论入门	2011-03	38.00	99
解析数论引论	2011-03	48.00	100
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
俄罗斯函数问题集	2011-03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011-01	48.00	79
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
初等数学研究(Ⅰ)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010-05	30.00	68
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86

方程式论	2011-03	28.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗华理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从忻数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

◎ 目 录

I	线性代数	//1
	A. 体	//1
	B. 向量空间	//2
	C. 齐次线性方程	//2
	D. 向量的相关性与无关性	//3
	E. 非齐次线性方程	//6
	F. 行列式	//7
II	体论	//13
	A. 扩体	//13
	B. 多项式	//14
	C. 代数元	//15
	D. 分裂体	//19
	E. 多项式分解成不可约因子的唯一可分解性	//20
	F. 群特征标	//21
	G. 命题 13 的应用与例子	//23
	H. 正规的体扩张	//25
	I. 代数扩张和可分扩张	//31
	J. Abel 群及其在体论上的应用	//35
	K. 单位根	//39
	L. Noether 方程	//41
	M. Kummer 体	//43
	N. 正规基的存在	//47
	O. 平移命题	//48

III 应用 //50

A. 要用到的群论中的某些命题 //50

B. 方程用根式的可解性 //53

C. 方程的 Galois 群 //55

D. 尺规作图 //59

附录 纪念李同孚先生 //63

编辑手记 //68

线性代数

A. 体

I

体是一个集,对它的元定义了叫做加法和乘法的两种运算. 这运算同实数系(它本身就是域的一个例子)里的加法和乘法相类似. 在每个体 K 之中总有两个唯一确定了的叫做 0 和 1 的元,它们与 K 的另一些元相加或相乘的作用恰如实数系中相应的元所示. 这种类似不足之处有二:

(1) 并未假设每个体中的乘法都是可交换的.

(2) 体还可能只由有限多个元所组成.

说得更确切些,体是一个集,它的元对于加法组成 Abel 群,而且不把零算在里面的元组成乘法群,还有这两个群的运算是用分配律来联系着的. 容易看到,零与任意元之积仍为零.

一个体中的乘法如果是可交换的,就把它叫做交换体. 如果要特地强调乘法非交换的这种可能性,那就称之为斜体.

B. 向量空间

设 V 是以 $A, B, \dots$ 为元的 Abel 加法群, K 是以 $a, b, \dots$ 为元的体. 对于 K 的每个元 a 与 V 的每个元 A 还假设定义了积 aA 作为 V 的一元. 如果下列的假设成立, 集 V 就叫做 K 上的(左) 向量空间

$$a(A + B) = aA + aB$$

$$(a + b)A = aA + bA$$

$$a(bA) = (ab)A$$

$$1A = A$$

如果 V 是 K 上的向量空间, 读者就容易证实, $oA = 0$ 与 $a0 = 0$ 成立, 其中 o 与 0 分别是 K 与 V 中的零元. 例如前一个关系式从下列方程推出

$$aA = (a + o)A = aA + oA$$

如果把积 aA 换成适合类似规律而定义的积 Aa , V 就叫做 K 上的右向量空间. 如果左与右向量空间在讨论中不同时出现, 就简称之为“向量空间”.

C. 齐次线性方程

如果在体 K 中给定 $n \cdot m$ 个元 $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. 要求下列方程组在 K 中的解 x

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(1) 叫做以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为未知元的齐次线性方程组. 如果(K 中有满足这组方程的)元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 不都是 o , 就叫非平凡解, 否则叫平凡解.

命题 1 如果未知元的个数多于方程的个数, 线性齐次方程组有非平凡解.

证明所根据的方法是读者还在中学时就学过的, 即用未知元的逐次消去法. 如果 $n(n > 0)$ 个变量的方程一个也没有(即 $m = 0$), 那么未知元就不受任何限制, 可把它们全部取做 1 .

按完全归纳法来进行证明. 假设未知元的个数多于 k 个而方程只有 k 个的那种方程组当 $k < m$ 时总有非平凡解. 在方程组(1)中设 $n > m$ 而且把表达式 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ 记做 $L_i (i = 1, 2, \dots, m)$. 我们来找那些不全为 o 的, 使

得 $L_1 = L_2 = \cdots = L_m = 0$ 的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 如果对于每个 i 和 j 都有 $a_{ij} = 0$, 那么(在 K 中)任意选取的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 就总是解. 如果这些 a_{ij} 不全为 0 , 因为变更这些方程的次序或未知元的编码并不影响联立解的存在与否, 所以可设 $a_{11} \neq 0$. 要对给定的方程组能求得非平凡解, 必须而且只须对于下列方程组能求得非平凡解

$$\begin{aligned} L_1 &= 0 \\ L_2 - a_{21}a_{11}^{-1}L_1 &= 0 \\ &\vdots \\ L_m - a_{m1}a_{11}^{-1}L_1 &= 0 \end{aligned}$$

这是因为: 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是刚才列出的方程组的解, 由 $L_1 = 0$ 就使得其余所有方程中的第二项都消失, 因此有 $L_2 = L_3 = \cdots = L_m = 0$. 反之, 如果(1)成立, 这组新的方程就显然成立. 读者注意到新方程组是由后 $m-1$ 个方程“消去” x_1 而建立的. 把后 $m-1$ 个方程当做 $x_2, \cdots, x_n$ 的方程组来看, 如果它有非平凡解, 那么取 $x_1 = -a_{11}^{-1}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)$ 就得到整个方程组的解. 然而按归纳假设, 这后 $m-1$ 个方程是有非平凡解的, 由此得到本命题.

注 方程组(1)中所有系数 a_{ij} 是 x_j 左方的因子. 对于其中所有系数是右方因子的方程组, 于是各个项换写成 $x_j a_{ij}$, 用类似的证明使同样的命题成立. 如果既有左方系数又有右方系数出现, 那么在非交换的情形就作不出这样的命题.

D. 向量的相关性与无关性

体 K 上的向量空间 V 中向量 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 叫做**相关的**, 如果 K 中有不全为 0 的元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 存在, 使得 $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = 0$ 成立. 否则把向量 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 叫做**无关的**.

体 K 上的向量空间 V 的**维数** 了解为 V 中无关向量的最大个数. 确切地说, 向量空间的维数是无穷的, 如果 V 中有任意多个无关的向量存在; 如果 V 中有一组 n 个无关向量存在, 而每组超过 n 个的向量总是相关的, V 就是 n 维的.

V 中一组元 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 叫做 V 的**生成系**, 如果 V 的每个元 A 总能通过在 K 中适当地选取元 $a_i (i = 1, \cdots, m)$ 由 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 线性地表示出来, 即

$$A = \sum_{i=1}^m a_i A_i$$

命题 2 如果 V 有生成系 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 那么这个生成系中无关向量的最大数就是 V 的维数.

注 如果所有的 $A_i = 0$, V 就只由零向量组成. 如关系 $1 \cdot 0 = 0$ 所示, 零向量是相关的, 因此 V 的维数为 0.

否则, 设 r 为生成系 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 的无关向量最大数, 通过重新编码就能实现 $A_1, A_2, \dots, A_r$ 是无关的. 因为已设 r 是 A_i 中无关最大数, $r+1$ 个向量 $A_1, A_2, \dots, A_r, A_i$ 就相关, 因此有关系

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_r A_r + b \cdot A_i = 0$$

其中系数不全为 0. 如果 $b = 0$, $A_1, A_2, \dots, A_r$ 就相关了. 因此 $b \neq 0$, 上式可写成

$$A_i = -b^{-1}(a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_r A_r)$$

从此得到, $A_1, A_2, \dots, A_r$ 也是生成系; 因为 V 中任一向量的线性表式中的 A_i 总可代以 $A_1, A_2, \dots, A_r$ 的线性组合.

设 $B_1, B_2, \dots, B_t$ 是 V 中某一组向量, $t > r$. 于是有 a_{ij} 使得 $B_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} A_i$. 要证明这些向量 $B_1, B_2, \dots, B_t$ 相关, 就要证 K 中有不全为 0 的 x_i 存在, 使得

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_t B_t = 0$$

成立. 在这方程中用 $\sum_{i=1}^r a_{ij} A_i$ 代 B_j , 就得到 A_i 的一个线性组合, 其中 $\sum_{j=1}^t x_j a_{ij}$ 为 A_i 的系数. 因此只需求得使方程组 $\sum_{j=1}^t x_j a_{ij} = 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ 成立的非平凡解 x_j . 由于 $t > r$ 和命题 1, 这样的 x_j 是存在的.

既然个数比 r 多的向量组都相关, 而向量 $A_1, A_2, \dots, A_r$ 又无关, 所以 r 就是 V 的维数.

注 n 维向量空间的任意 n 个无关向量 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成生成系. 因为任一向量 A 总与向量 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相关, 从而相关式中 A 的系数不能为零. 由 A 的解就证明了 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成生成系.

向量空间 V 的一个子集叫做子空间, 如果它是这向量空间的子群而且这子集的任一元与体元相乘仍不出此子集. 如果 $A_1, A_2, \dots, A_s$ 是向量空间 V 的元, 所有形如 $a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_s A_s$ 的元就显然构成 V 的子空间. 由维数的定义得知, 子空间的维数不超过全向量空间的维数.

设 V 是有限维 n 的向量空间, W 是具有同一维数 n 的 V 的子空间. 于是 $W = V$. 这子空间含有 n 个无关向量, 它们其实构成 V 的生成系.

体 K 中 s 个元的序列 $(a_1, a_2, \dots, a_s)$ 叫做行向量. 所有这些 s 个元的序列由下列定义构成向量空间:

$$(1) (a_1, a_2, \dots, a_s) = (b_1, b_2, \dots, b_s) \text{ 当且仅当 } a_i = b_i (i = 1, 2, \dots, s).$$

$$(2) (a_1, a_2, \dots, a_s) + (b_1, b_2, \dots, b_s) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_s + b_s).$$

$$(3) b(a_1, a_2, \dots, a_s) = (ba_1, ba_2, \dots, ba_s) \text{ 对于 } K \text{ 中的元 } b.$$

把 s 个元的序列写成纵列

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}$$

就叫做列向量.

命题 3 体 K 中所有 n 个元的序列构成的行(列)向量空间 K^n 是 K 上的 n 维向量空间.

证明 n 个元(所谓单位向量)

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

是无关的而且生成 K^n . 此两者都由关系

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$$

得以证明.

体 K 中的元作成的长方形阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做矩阵. 矩阵的右行秩是指由体元右乘矩阵的行 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 时, 各行之间得到的无关行向量的最大数. 相应的定义左行秩, 右列秩与左列秩.

命题 4 矩阵的右列秩等于左行秩, 而且左列秩等于右行秩. 如果体是可交换的, 这四个数就相等, 而且叫做矩阵的秩.

证明 用 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 来记矩阵的列向量, $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 记其行向量. 列向量 0 是

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此相关性 $C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n = 0$ 就等价于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

的解. 矩阵中行的次序变更引出同一方程组, 因此并不改变矩阵的列秩. 行秩也