普通高等教育土木与交通类"十二五"规划教材

有限元法基础

主　编　王贵君
副主编　隋红军　刘建明

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

十二五

普通高等教育土木与交通类"十二五"

有限元法基础

主　编　王贵君

副主编　隋红军　刘建明

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书讲解有限元法的基本原理和基本方法，强调有限元法程序的编写，内容简明、扼要，是一本实用的有限元法入门教材。

全书由绪论、6 章及 3 个附录组成，介绍了有限元法的发展、现状及应用领域，弹性力学基本方程与虚功原理的矩阵表示，弹性一维问题有限元法，弹性力学平面问题有限元法及程序设计，平面杆系结构有限元法及其程序设计，精密平面单元和三维单元以及非线性问题的有限元解法。附录为高斯数值积分法，弹性力学平面问题有限元法上机实习以及平面杆系结构有限元法上机实习。

本书可作为土建、水利、道桥、工程力学等专业本科生及研究生的教材，也可作为有关工程技术人员有限元技术入门的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

有限元法基础 / 王贵君主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2011.9
普通高等教育土木与交通类“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5084-9042-7

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①有限元法－高等学校－教材 Ⅳ. ①O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第200800号

书　　名	普通高等教育土木与交通类“十二五”规划教材 **有限元法基础**
作　　者	主编　王贵君　副主编　隋红军 刘建明
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www. waterpub. com. cn E－mail：sales@ waterpub. com. cn 电话：（010）68367658（发行部）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京市北中印刷厂
规　　格	184mm×260mm　16 开本　9.5 印张　225 千字
版　　次	2011 年 9 月第 1 版　2011 年 9 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	**19.00** 元

前言

随着电子计算机技术的进步而发展起来的有限元法，数学逻辑严谨，物理概念清晰，易于理解和掌握，应用范围广泛。编者有幸在20世纪80年代初就学习、研究、应用有限元法，90年代初又为本科生开设有限元法课程。通过多年的学习、研究、应用和教学实践，积累了一些经验。本教材就是在总结经验，借鉴、参考同类教材的基础上编写的。

在近几年的教学实践中，编者发现三个问题。第一个问题是，尽管关于有限元法的著作、教材较多，但对于一般工科院校的土木工程专业本科生来说，找一本合适的教材并不容易。第一，大多数有限元法教材的理论性较强，一般工科院校的本科生接受起来比较困难。第二，一般工科院校的有限元法课程的学时数也就在32~40学时之间，教材内容偏多，使用起来很不方便。第三，大多数有限元法教材中上机实习方面的内容较少，给实践教学带来困难。第二个问题是，尽管当前用于有限元法编程的计算机语言已有了很大的发展，VC、C++、VB等高级计算机语言得到了广泛的应用，但这些计算机语言在应用时必须先安装相应的软件，而且需要很大的存储空间，不如使用FORTRAN77、QBASIC等计算机语言（这些语言简单易懂，小巧灵活，使用方便，适用于本科生课堂有限元法教学）。第三个问题是，尽管当前大型商业有限元法软件很多，其功能强大，前处理、后处理方便，但大都结构复杂，安装使用不方便，并且占用很大的存储空间，本科生在学时有限的课堂和上机教学活动中很难熟练掌握。本科生应注重掌握有限元法的基本原理和基本方法，所以小巧、实用的有限元法教学程序比大型软件更合适。

针对这些问题，本教材编写的基本思路是：

（1）注重适用性，适用于一般工科院校土木工程或相关专业的本科教学。

（2）内容精练，适合于32~40学时，注重基本原理和基本方法。

（3）注重实践性，强调有限元法程序的编写，通过教学程序加以训练。

全书由绪论、6章及3个附录组成：第1章，弹性力学基本方程与虚功原理的矩阵表示；第2章，弹性体一维问题有限元法——有限元法的基本概念；第3章，弹性力学平面问题有限元法及程序设计；第4章，平面杆系结构有限元法及其程序设计；第5章，精密平面单元和三维单元；第6章，非线性问题

的有限元解法；附录Ⅰ高斯数值积分法，附录Ⅱ弹性力学平面问题有限元法上机实习和附录Ⅲ平面杆系结构有限元法上机实习。

本教材中包含两个用 FORTRAN77 编写的和两个用 QBASIC 编写的完整的有限元法教学程序，读者可根据需要选用，也可以将这几个程序用其他计算机语言改写。

在编写过程中，我们参考和引用了一些现有教材及参考文献中的资料，在此一并谨向这些原作者们表示衷心的感谢。

限于编者水平，本教材中缺点与错误在所难免，望读者不吝赐教。

王贵君

2011 年 8 月

于天津

目 录

绪　论

0.1 概　述

人们进行力学分析的方法有很多种，但归结起来可分为两类，即解析法和数值法。由于实际结构物的形状和所受荷载往往比较复杂，除了少数简单的问题之外，按解析法求解是非常困难的，所以，数值法已成为不可替代的广泛应用的方法，并得到不断发展。数值分析方法包括有限差分法、有限元法、边界元法、离散元法、流形元法等。

有限元法就是伴随着电子计算机技术的进步而发展起来的一种数值分析方法。它的数学逻辑严谨，物理概念清晰，易于理解和掌握，应用范围广泛，能够灵活地处理和求解各种复杂问题，特别是它采用矩阵形式表达基本公式，便于运用计算机编程运算。这些优点赋予了有限元法强大的生命力。

有限元法又称为有限单元法、有限元素法等，是从英文 Finite Element Method 翻译而来的。

有限元法按基本未知量的选择可以划分为三种：以节点位移为基本未知量的位移法，以节点力为基本未知量的力法，和以部分节点位移及部分节点力为基本未知量的混合法。由于位移法的有限元法计算程序比较简单，因此有限元位移法应用最广。

有限元位移法的基本原理为，假想把连续体分割成数目有限的小块体（称为**有限单元或单元**），彼此间只在数目有限的指定点（称为**节点或结点**，本书通用节点）处互相联结，将单元上作用的外力化为**等效节点力**，在单元内部用一个简单的函数来近似表示位移分量的分布规律，按照**本构方程**建立单元节点力和位移之间的关系，把所有单元的这种关系组集起来，得到一组以节点位移为未知量的代数方程组，解此方程组，即可得到节点位移，由此即可求得单元的应变、应力。

有限元法按基本方程的建立方法，又可以分为直接法、变分法和加权余量法。直接法就是把各个单元的节点力与节点位移之间的关系式以一定的次序进行直接叠加，求出整个结构的基本方程。前述有限元位移法就是一种常用的直接法。本书主要介绍有限元位移法的基本原理与程序实现。

0.2 有限元法的发展与现状

有限元法基本思想的提出，通常认为始于 20 世纪 40 年代。雷尼柯夫（Hrenikoff，1941）首次提出用桁架方法求解弹性问题。柯兰特（Courant，1943）采用三角形域内分段连续函数求解扭转问题，第一次用有限元法思想处理连续体问题。阿基里斯（Argyris，1955）作了很多能量原理与矩阵分析方面的研究，并于 1960 年与克尔西（Kelsey）一起

发表了《结构分析的能量原理（Energy Theorems and Structural Analysis）》一书，为有限元法理论基础的建立作出了贡献。1956 年，特纳（Turner）、克拉夫（Clough）、马丁（Martin）和托普（Topp）等将刚架分析中的位移法扩展到弹性力学平面问题，并用于飞机的结构分析和设计。

1960 年，克拉夫第一次使用有限元法（Finite Element Method）这个称谓。此后，大量学者、专家开始使用这一方法来处理工程结构、流体、热传导、电磁学等问题。贝塞林（Besseling，1963）、卞学璜（Pian，1963、1969）等人将有限元法与弹性力学变分原理联系起来，为有限元法数学基础的建立作出了贡献。晋凯维奇（Zienkiewicz）和张佑启（Cheung）于 1967 年发表了世界上第一部有限元法的专著。

20 世纪 70 年代后，随着计算机技术的快速发展，有限元法得到了更充分的应用与发展，尤其是在非线性、流变性和振动等方面，都取得了长足的进展。欧登（Oden，1972）出版了世界上第一部非线性连续介质有限元法的专著。

有限单元法经过几十年的发展，不断开拓新的应用领域，其范围已由杆件结构问题扩展到了弹性力学乃至塑性力学问题，由平面问题扩展到空间问题，由静力学问题扩展到动力学问题、稳定问题，由固体力学问题扩展到流体力学、热力学、电磁学等问题。如今它已成为广大科技工作者的有力工具，解决了大量实际问题。

0.3 有限元法的应用领域

经过多年的发展，固体力学有限元法的应用范围已经由杆件问题发展到弹性力学平面问题，并进一步扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题、波动问题、接触问题，研究的对象从线性弹性材料扩展到非线性、弹塑性、黏弹性、黏弹塑性材料及复合材料问题，由小变形扩展到大变形。有限元法也已经从固体力学扩展到流体力学、热学、电磁学、生物医学等领域，并且可以解决多种介质和场的耦合问题。可以说，有限元法作为一种有效的数值分析方法已成为人们进行科学研究、工程计算、工程设计的重要手段，在机械工程、土木工程、航空结构、热传导、电磁场、流体力学、流体动力学、地质力学、原子工程和生物医学工程等各个领域中得到了越来越广泛的应用。

第 1 章　弹性力学基本方程与虚功原理的矩阵表示

1.1　弹性力学的基本方程

一点的应力、应变、位移状态可用该点的应力、应变、位移分量来表示（当然也可以用主应力、应力不变量来表示）。一点的应力状态如图 1.1 所示。注意，以下公式等号右侧是矩阵，不是张量。

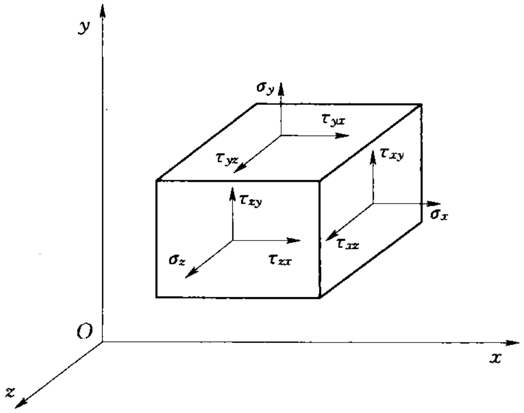

图 1.1　一点的应力状态

应力分量

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \tag{1.1}$$

应变分量

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \tag{1.2}$$

位移分量

$$\{f\}=[u \quad v \quad w]^T \tag{1.3}$$

几何方程

$$\{\varepsilon\}=\left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right]^T \tag{1.4}$$

弹性问题物理方程

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{1.5}$$

式中

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

为弹性矩阵。

对于平面应力问题

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \tag{1.7}$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \tag{1.8}$$

$$\{\varepsilon\} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]^T \tag{1.9}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{1.10}$$

式中

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

对于平面应变问题，只需将式（1.11）中的 E 换成$\frac{E}{1-\mu^2}$，μ 换成$\frac{\mu}{1-\mu}$，即可得到平面应变问题的物理方程。

1.2 弹性体的虚功原理

弹性体的虚功原理可以表述为：如果弹性体处于平衡状态，那么，外力在允许的微小虚位移上所做的功等于整个弹性体内的应力在虚应变上所做的功。

设弹性体在体积力$\{p\}$、表面力$\{q\}$和集中力$\{F\}$这些外力作用下处于平衡，在体内引起位移$\{f\}$、应力$\{\sigma\}$和应变$\{\varepsilon\}$。此时，假定弹性体内有某种虚位移$\delta\{f\}=[\delta u \quad \delta v \quad \delta w]^T$，其相应的虚应变为$\delta\{\varepsilon\}=[\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\varepsilon_z \quad \delta\gamma_{xy} \quad \delta\gamma_{yz} \quad \delta\gamma_{zx}]^T$。于是，虚功原理可表达为

$$\iiint\delta\{f\}^T\{p\}\,\mathrm{d}V + \iint\delta\{f\}^T\{q\}\,\mathrm{d}A + \delta\{f\}^T\{F\} = \iiint\delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,\mathrm{d}V \tag{1.12}$$

对于平面问题，设其厚度为 t，则上式成为

$$\iint\delta\{f\}^T\{p\}\,t\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\delta\{f\}^T\{q\}\,t\mathrm{d}s + \delta\{f\}^T\{F\} = \iint\delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.13}$$

第 2 章　弹性体一维问题有限元法
——有限元法的基本概念

2.1　一维问题有限元法算例

下面将一个简单的弹性体一维问题用有限元法求解，以说明有限元法的基本原理。

设有一根受自重作用的等截面直杆，上端固定，下端自由，如图 2.1 所示。单位杆长的重力为 q，杆长为 L，横截面积为 A，材料弹性模量为 E。试求该直杆各横截面上的应力。

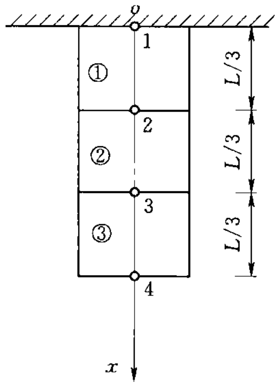

图 2.1　算例图

材料力学的精确解答：

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= \frac{q}{2EA}(2Lx - x^2) \\ \varepsilon(x) &= \frac{q}{EA}(L - x) \\ \sigma(x) &= \frac{q}{A}(L - x) \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

现在我们用有限元法求解。

第一步：

用若干个分点将该直杆分割成为许多个有限长度的小微段（这里各小段的长度不一定相等），并将每个小段的重力等效地移置到分点上去。分点称为**节点**，小段称为**单元**，移置到节点后的荷载称为**节点荷载**。本例中分成 3 个小段。

由式（2.1）知，无论怎样分割该直杆，每个单元的位移都是 x 的二次函数。但若节点较多，单元较短，对每个单元来讲，我们就可以用线性函数近似地描述实际的单元位移。

我们用ⓔ$_{ij}$表示任一单元，其中ⓔ为单元编号①、②、③，下标 ij 为其两端点的节点编号 12、23、34。

设线性单元位移函数为

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{2.2}$$

式中，α_1、α_2 为待定常数，可由该单元节点的位移值 u_i、u_j 来确定。

单元位移函数也适于单元节点，则

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

解得

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{x_j}{x_j - x_i}u_i - \frac{x_i}{x_j - x_i}u_j \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{x_j - x_i}u_i + \frac{1}{x_j - x_i}u_j \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

代回到式（2.2）中，并记$\{f\}=u$，得

$$\{f\} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_j - x}{x_j - x_i} & \dfrac{x - x_i}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

其中，$\dfrac{x_j - x}{x_j - x_i}$和$\dfrac{x - x_i}{x_j - x_i}$与 x 成线性关系，反映了单元的位移形态，称为**形函数**，并令

$$N_i = \frac{x_j - x}{x\_x_i}, \qquad N_j = \frac{x - x_i}{x_j - x} \tag{2.6}$$

若再记形函数矩阵为

$$[N] = [N_i \quad N_j] \tag{2.7}$$

节点位移列阵为

$$\{\Delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

则有

$$\{f\} = [N]\{\Delta\}^e \tag{2.9}$$

这就是用**节点位移**表示的**单元位移**。

下面我们用虚位移原理把每个单元的重力等效地移置到节点上去。

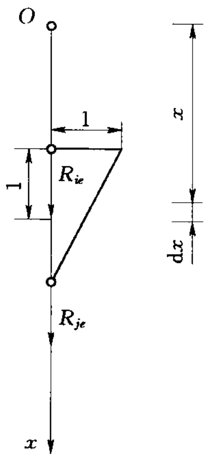

图 2.2　在节点上应用虚位移原理

对单元ⓔ$_{ij}$，如果该单元重力荷载移置到节点 i、j 的节点荷载分别为 R_{ie}、R_{je}，规定沿坐标轴 x 的正向为正，那么，单元荷载移置就是要分析计算 R_{ie}、R_{je}的值。

先求 R_{ie}。为便于计算，假设单元ⓔ$_{ij}$发生这样的虚位移：节点 i 沿 x 方向移动一个单位而节点 j 不动，即 $\delta u_i = 1$，$\delta u_j = 0$（图 2.2）。按照前面设选的单元位移函数，单元虚位移也可得到与式（2.9）形式相同的关系式，即

$$\delta\{f\}=[N]\delta\{\Delta\}^e \tag{2.10}$$

式中

$$\delta(f) = \delta u, \quad \delta(\Delta)^e = \begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

由于 $\delta u_i = 1$，$\delta u_j = 0$，所以得

$$\delta u = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \tag{2.12}$$

于是，单元重力所做虚功为

$$\int_{x_i}^{x_j} \delta u \cdot q \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_j} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} q \mathrm{d}x = \frac{q}{2}(x_j - x_i)$$

R_{ie}所做虚功为 $1 \cdot R_{ie}$，而 R_{je}不做功。根据虚功原理，移置前单元荷载所做虚功应该等于移置后节点荷载所做虚功，即有

$$R_{ie} = \frac{q}{2}(x_i - x_j) \tag{2.13}$$

同理，可求得

$$R_{je}=\frac{q}{2}(x_j-x_i) \tag{2.14}$$

若记

$$\{R\}^e=\begin{Bmatrix}R_{ie}\\R_{je}\end{Bmatrix}$$

则单元荷载列矩阵为

$$\{R\}^e=\frac{q}{2}(x_j-x_i)\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

由此可见，只要把单元重力 $q(x_j-x_i)$ 平均移置到节点上即可。

对于本例，有

$$R_{1①}=R_{2①}=R_{2②}=R_{3②}=R_{3③}=R_{4③}=\frac{qL}{6}$$

再考虑处于固定端的节点 1 还受有约束反力 $R=-qL$，于是，单元荷载移置后，各节点的节点荷载分别为

$$\left.\begin{aligned}R_1&=R+R_{1①}=-\frac{5}{6}qL\\R_2&=R_{2①}+R_{2②}=\frac{1}{3}qL\\R_3&=R_{3②}+R_{3③}=\frac{1}{3}qL\\R_4&=R_{4③}=\frac{qL}{6}\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

第二步：

用几何方程、物理方程与虚功原理分析单元的应变、应力和节点力与节点位移的关系。

由几何方程，将式（1.9）代入，有

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}[N]}{\mathrm{d}x}\{\Delta\}^e \tag{2.17}$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}[N]}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[N_i\quad N_j]=\left[\frac{-1}{x_j-x_i}\quad\frac{1}{x_j-x_i}\right]=[B_i\quad B_j] \tag{2.18}$$

$$[B_i]=\left[\frac{-1}{x_j-x_i}\right],\quad [B_j]=\left[\frac{1}{x_j-x_i}\right] \tag{2.19}$$

同样，记 $\{\varepsilon\}=\varepsilon$，则有

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\Delta\}^e \tag{2.20}$$

式中

$$[B]=[B_i\quad B_j] \tag{2.21}$$

称为**应变矩阵**，它反映了单元应变与节点位移之间的关系。

一维弹性问题的物理方程为

$$\sigma=E\varepsilon$$

其矩阵形式为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{2.22}$$

式中，$[D]=E$，为弹性矩阵。

将式（2.20）代入式（2.22），得

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\Delta\}^e \tag{2.23a}$$

或

$$\{\sigma\}=[C]\{\Delta\}^e \tag{2.23b}$$

式中

$$[C]=[C_i \quad C_j]=[[D][B_i] \quad [D][B_j]]=\left[\frac{-E}{x_j-x_i} \quad \frac{E}{x_j-x_i}\right] \tag{2.24}$$

称为**应力矩阵**，它反映了单元应力与节点位移之间的关系。

下面利用虚功原理分析单元的节点受力与节点位移之间的关系。

图 2.3　节点位移与节点力

直杆分割成 3 个单元之后，相邻单元之间的作用力通过节点来传递。我们把节点对单元和单元对节点的作用力都称为**节点力**，节点 i、j 处的节点力分别用 p_i、p_j 表示（图 2.3），并规定节点对单元的节点力以沿 x 轴正向为正。对单元来讲，节点力为外力，若记

$$\{P\}^e=\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix}$$

则外力所做的虚功为

$$[\delta\{\Delta\}^e]^T\{P\}^e=p_i\cdot\delta u_i+p_j\cdot\delta u_j$$

而内力所做虚功为

$$\int_{x_i}^{x_j}[\delta\{\varepsilon\}]^T\{\sigma\}A\mathrm{d}x$$

根据虚功原理，单元虚功方程为

$$[\delta\{\Delta\}^e]^T\{P\}^e=\int_{x_i}^{x_j}[\delta\{\varepsilon\}]^T\{\sigma\}A\mathrm{d}x \tag{2.25}$$

由于 $\{\sigma\}=[C]\{\Delta\}^e$，而单元虚应变与节点位移之间也有与式（2.20）形式相同的关系，即

$$\delta[\varepsilon]=[B]\delta\{\Delta\}^e \tag{2.26}$$

所以，由式（2.25）可得

$$[\delta\{\Delta\}^e]^T\{P\}^e=[\delta\{\Delta\}^e]^T\int_{x_i}^{x_j}[B]^T[C]A\mathrm{d}x\cdot\{\Delta\}^e \tag{2.27}$$

由于节点虚位移是任意的，所以，上式为

$$\{P\}^e=\int_{x_i}^{x_j}[B]^T[C]A\mathrm{d}x\cdot\{\Delta\}^e \tag{2.28}$$

若记

$$[K]^e=\int_{x_i}^{x_j}[B]^T[C]A\mathrm{d}x \tag{2.29}$$

则得

$$\{P\}^e=[K]^e\{\Delta\}^e \tag{2.30}$$

其中 $[K]^e$ 为**单元刚度矩阵**，它反映了单元的节点力与节点位移之间的关系。

根据应变矩阵 $[B]$ 和应力矩阵 $[C]$，可计算单元刚度矩阵 $[K]^e$，由式（2.29），可得

$$[K]^e = EA\int_{x_i}^{x_j}[B]^T[B]\mathrm{d}x = EA[B]^T[B](x_j - x_i) = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

式中

$$k_{ii} = k_{jj} = \frac{EA}{x_j - x_i},\quad k_{ij} = k_{ji} = \frac{-EA}{x_j - x_i} \tag{2.32}$$

第三步：

由节点平衡方程建立并求解以节点位移为未知量的线性代数方程组。

由于单元对节点的节点力与节点对单元的节点力互为作用力与反作用力，所以，如果用 p_{ie}、p_{je} 分别表示单元ⓔ对其节点 i、j 的节点力，那么，各节点的受力情况如图 2.4 所示。可知

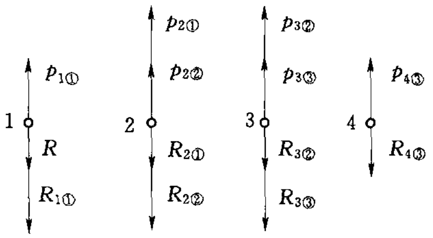

图 2.4　节点荷载与节点力

$$\left.\begin{aligned} &p_{1①} = R + R_{1①} = R_1 \\ &p_{2①} + p_{2②} = R_{2①} + R_{2②} = R_2 \\ &p_{3②} + p_{3③} = R_{3②} + R_{3③} = R_3 \\ &p_{4③} = R_{4③} = R_4 \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

令

$$\{R\} = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4]^T$$

称为总体荷载列阵。

由式（2.30）及式（2.33），就可得到节点位移与荷载的关系。

要使式（2.30）能代入式（2.33），须将单元刚度矩阵升阶：

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^{①} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{①} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} 0 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{Bmatrix}^{②} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{②} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}^{③} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}^{③} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

将它们代入式（2.33），使得到以节点位移为未知量的线性方程组，即

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{①} & k_{12}^{①} & 0 & 0 \\ k_{21}^{①} & k_{22}^{①} + k_{22}^{②} & k_{23}^{②} & 0 \\ 0 & k_{32}^{②} & k_{33}^{②} + k_{33}^{③} & k_{34}^{③} \\ 0 & 0 & k_{43}^{③} & k_{44}^{③} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \tag{2.34}$$

若记

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11}^{①} & k_{12}^{①} & 0 & 0 \\ k_{21}^{①} & k_{22}^{①}+k_{22}^{②} & k_{23}^{②} & 0 \\ 0 & k_{32}^{②} & k_{33}^{②}+k^{③} & k_{34}^{③} \\ 0 & 0 & k_{43}^{③} & k_{44}^{③} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

$$\{\Delta\}=\{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}^T, \quad \{R\}=\{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4\}^T$$

则得

$$[K]\{\Delta\}=\{R\} \tag{2.36}$$

式中，$[K]$为总体刚度矩阵，它反映总体节点位移与总体荷载之间的关系；$\{\Delta\}$为总体节点位移列阵；$\{R\}$为总体节点荷载列阵。

根据各单元刚度矩阵可计算总体刚度矩阵。由于各单元的长度均为 $L/3$，则由式（2.32）可得

$$\left.\begin{aligned} k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=\frac{3EA}{L} \\ k_{12}=k_{21}=k_{23}=k_{32}=k_{34}=k_{43}=-\frac{3EA}{L} \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

将式（2.16）和式（2.37）代入式（2.36），便得

$$\frac{3EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\frac{qL}{6}\begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

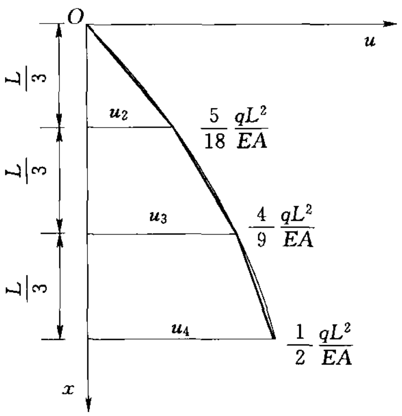

图 2.5　有限元计算结果

这个线性方程组不能直接求解，因为系数矩阵$[K]$是一个行列式的值为零的奇异矩阵（任一行或任一列所有元素之和为零）。但由于已知 $u_1=0$，所以，我们可以划去 u_1 所对应的第一行和第一列，划去$\{\Delta\}$与$\{R\}$中的第一行，不让节点 1 的平衡方程进入线性方程组，则有

$$\frac{3EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\frac{qL}{6}\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

第四步：

由线性方程组解得节点位移

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\frac{qL^2}{18EA}\begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

这就是有限元法的计算结果。

如果把节点 2、3、4 的坐标值 $x=L/3$，$x=2L/3$，$x=L$ 分别代入式（2.1），那么，材