状元学习方案

ZHUANGYUAN XUEXIFANGAN

九年级数学 下

人教版

YZLI0890147166

学案=方法+考点

状元=有方法+知考点

★内含教材习题答案★

北京出版集团公司
北京教育出版社

状元学习方案

ZHUANGYUAN XUEXIFANGAN

九年级数学 下

人教版

主　　编：刘　强
本册主编：韩守慧　李彦明

北京出版集团公司
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

状元学习方案:人教版.九年级数学.下/刘强主编.
—北京:北京教育出版社,2011.9
ISBN 978-7-5303-9031-3

Ⅰ.①状… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 203314 号

状元学习方案
九年级数学(人教版)下
刘 强 主编
*
北京出版集团公司 北京教育出版社 出版
(北京北三环中路 6 号)
邮政编码:100120
网址:www.bph.com.cn
北京出版集团公司总发行
全 国 各 地 书 店 经 销
三河市沟河印刷厂
*
880×1230 32 开本 10.625 印张 210000 字
2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5303-9031-3
定价:20.80 元

质量监督电话:(010)62698883 58572750 58572393

状元学习方案

学案=方法+考点
状元=有方法+知考点

通过对状元的走访和研究发现，状元的学习和一般学生的学习有所不同。状元在学习和考试中能“正常”发挥甚至“超常”发挥，很少“失常”发挥，这与状元自身总结的一系列学习方案有着密切的关系。高效的学习和探究，源于对知识本质的领悟和对方法规律的掌握。

状元学习方案　　九年级数学(人教版)·下

栏目功能说明

状元学法

概括本节要点，指明学习方向，链接背景知识，让你整体把握，有的放矢，对本节知识的学习做到心中有数。

状元笔记

采用“讲、例、练”三结合的方式，系统梳理和剖析本节知识，对易错进行警示，从教材出发又适当拓展延伸，让你事半功倍，轻松突破重点难点。

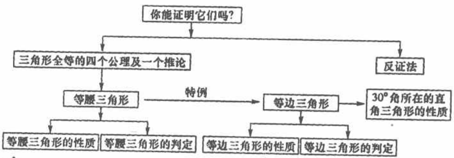
状元实践

再现本节知识在中考中曾经出现过的考查类型、角度和深度。只有知道过去曾经考过什么，做到心中有数，方能立于不败之地。

状元学习方案　　九年级数学上

1.1　你能证明它们吗

状元学法　提纲挈领　一目了然



状元笔记　善于归纳　活学活用

知识点1　三角形全等的四个公理及一个推论(★★)

全等三角形的判定方法有四个:三个公理 SSS、SAS、ASA 及推论 AAS.判定两个三角形全等时应依据已知条件准确地选择判定方法.全等三角形的性质公理:全等三角形的对应边相等,对应角相等.在应用该公理时,一定要满足“对应”的条件,否则将得出错误的结论.

易错警示:“AAA”及“SSA”不能用来判定两个三角形全等.

评注:在两个三角形中,已知“三对对应角相等”(简记“AAA”)及“两边和其中一边的对角对应相等”(简记“SSA”)不能用来判定两个三角形全等.比如图 1-1-1 中的 $DE // BC$,则 $\angle ADE=\angle B$, $\angle AED=\angle C$, $\angle A=\angle A$,但显然 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 不全等;比如图 1-1-2 中 $AD=AC$,这样在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ABC$ 中,有 $AB=AB$, $AD=AC$, $\angle ABD=\angle ABC$,但是显然 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 也不全等.

状元实践　借鉴中考　未雨绸缪

等腰三角形、等边三角形的性质及判定是判定线段、角相等的重要依据,而判定线段、角相等又是判定其他几何结论的两块基石,因此等腰三角形的性质、判定是中考的重要考点,另外含 30°角的直角三角形的性质给出了直角三角形中边角之间的关系,是几何计算的重要依据,因此也是中考的重要考点.考查本节知识的题型多样,填空题、选择题、推理证明题、计算题都有可能,分值一般在 3~10 分之间,属中等难度的题.

例13 (2010·楚雄)已知等腰三角形的一个内角为 70°,则另外两个内角的度数是(　　)

A. 55°, 55°　　B. 70°, 40°　　C. 55°, 55°或 70°, 40°　　D. 以上都不对

【分析】应分两种情况讨论:(1)当顶角为 70°时,则两个底角为 55°, 55°;(2)当底角为 70°时,顶角为 40°.

2

今天教育的内容百分之八十都应该是方法——方法比事实更重要。

——纳依曼(联合国教科文组织总干事)

北教控股

状元学习方案

学案=方法+考点
状元=有方法+知考点

通过对状元的走访和研究发现，状元的学习和一般学生的学习有所不同。状元在学习和考试中能“正常”发挥甚至“超常”发挥，很少“失常”发挥，这与状元自身总结的一系列学习方案有着密切的关系。高效的学习和探究，源于对知识本质的领悟和对方法规律的掌握。

栏目功能说明

状元心得

总结本节的规律方法和易错误区，以表格的形式清楚展示，使学生在学习时事半功倍。

状元思维

针对本节知识与科技发展、生活实际相联系的问题，或是学科内、学科间的综合问题，进行探究讨论，举例说明。

状元素养

精选名人轶事，数学趣话，让学生在掌握课本知识的同时，更能拓展视野，培养学习兴趣。

答案专区

详细分析解题思路，点拨解题方法，方便学生自学，让学生不但知其然，且知其所以然，并养成良好、规范的答题习惯。

第一章　证明(二)

状元心得 图解归纳　了然于胸

规律方法总结	易错误区总结
掌握的打“√”	犯过的打“!”
1. 全等三角形的判定及性质.(　) 2. 等腰三角形的性质及判定.(　) 3. 等边三角形的性质及判定.(　) 4. 在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半.(　) 5. 反证法的定义及简单应用.(　) 6. 等腰三角形的性质及判定的综合应用.(　)	1. 判定两三角形全等时，用了“SSA”.(　) 2. 误把等腰三角形当成等边三角形.(　) 3. 在一些稍难的题目中，不知如何添加辅助线.(　) 4. 误认为只要有一角为60°的三角形即为等边三角形.(　) 5. 已知等腰三角形一角的度数(为锐角)求其他角时，没分情况讨论.(　) 6. 已知等腰三角形两边求周长时，没结合三角形三边关系的定理，或漏掉了其中一种情况.(　)

状元素养 补充知识　拓展视野

诺贝尔为何没设数学奖

诺贝尔奖在全世界有很高的地位，许多科学家梦想着能获得诺贝尔奖。数学被誉为“科学女皇的骑士”，却得不到每年瑞典科学院颁发的诺贝尔奖，过去没有，将来也不会有，因为瑞典著名化学家诺贝尔留下的遗嘱中，没有提出设立数学诺贝尔奖。

状元思维 提高素质　培养兴趣

探究1　等腰三角形中常用辅助线的添加方法(重难点)

方法1：通常作顶角平分线、底边中线、底边高线(最常用)。

例9 已知：如图1-1-15所示，$AB=AC$，$BD\perp AC$于点D，求证：$\angle BAC=2\angle DBC$。

【分析】若作顶角$\angle BAC$的平分线交BC于E，则$AE\perp BC$，然后利用直角三角形两锐角互余，可得$\angle 2=\angle DBC$，而$\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC$，故可证出。

证明：作$\angle BAC$的平分线AE交BC于E，

则$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC$.

又$\because AB=AC$，

$\therefore AE\perp BC$.

答案专区 详解详析　启迪思维

1. 解：(1)当顶角为50°时，其余两角为$\frac{180°-50°}{2}=65°$；当底角为50°时，则另一底角也为50°，顶角为$180°-2\times 50°=80°$。故其余两角的度数为65°，65°或50°，80°。

(2)100°的这个角一定为顶角，此时底角为$\frac{180°-100°}{2}=40°$，故其余两角的度数为40°，40°。

7

今天教育的内容百分之八十都应该是方法——方法比事实更重要。

——纳依曼(联合国教科文组织总干事)

北教控股

目 录

第二十八章　锐角三角函数

第二十九章　投影与视图

第二十六章　二次函数

本章整体解说

二次函数是描述现实世界变量之间关系的重要数学模型，是已学一次函数、反比例函数的继续. 本章内容共分 3 节：26.1 二次函数及其图象；26.2 用函数观点看一元二次方程；26.3 实际问题与二次函数.

本章的重点是二次函数的图象、性质、关系式的确定，与一元二次方程的关系等；本章的难点是二次函数图象的性质在解决实际问题中的应用以及综合问题的解决等.

学习本章应重视从大量丰富的现实背景和广泛联系多学科的问题中去感受二次函数的意义，通过用表格、表达式及图象等方法表示二次函数，体会函数的各种表示方法之间的联系和特点. 尤其要重视二次函数图象的绘制，这不仅有助于加深对二次函数图象及性质的理解，更能养成数形结合的思想，从而在解决实际问题中受益.

26.1 二次函数及其图象

状元学法 提纲挈领 一目了然

二次函数
- 定义—$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$
- 图象—抛物线
- 性质—见列表
- 关系式的确定—待定系数法

二次函数的性质

内容	开口方向	顶点坐标	对称轴	最大(小)值	备注
①$y=ax^2$	$a>0$,向上; $a<0$,向下.	$(0,0)$	$x=0$	$a>0$,有最小值0; $a<0$,有最大值0.	
②$y=ax^2+k$	$a>0$,向上; $a<0$,向下.	$(0,k)$	$x=0$	$a>0$,有最小值k; $a<0$,有最大值k.	可以看作①向上(下)平移$\|k\|$个单位
③$y=a(x-h)^2+k$	$a>0$,向上; $a<0$,向下.	(h,k)	$x=h$	$a>0$,有最小值k; $a<0$,有最大值k.	可以看作②向左(右)平移$\|h\|$个单位
④$y=ax^2+bx+c$	$a>0$,向上; $a<0$,向下.	$\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	$x=\frac{-b}{2a}$	$a>0$,有最小值M; $a<0$,有最大值M.	可以将④化为③的形式
说明	$M=\frac{4ac-b^2}{4a}$				

状元笔记 善于归纳 活学活用

知识点1 二次函数的概念(★)

形如$y=ax^2+bx+c$(a、b、、c是常数,$a\neq 0$)的函数叫做x的二次函数,a叫做二次项的系数,b叫做一次项的系数,c叫做常数项.

说明:(1)二次函数是关于自变量x的二次式,且二次项系数$a\neq 0$;

(2)二次函数中自变量的取值范围是全体实数;

(3)当$b=0$,$c=0$时,二次函数$y=ax^2(a\neq 0)$是最简形式.

例1 判断下列函数中,哪些是二次函数?

(1)$y=5x+1$;(2)$y=4x^2-1$;(3)$y=2x^3-3x^2$;(4)$y=5x^4-3x+1$.

【分析】根据二次函数的概念,进行判断可知,只有(2)是二次函数,(1)是一次函数,(3)、(4)都不是二次函数.

解:(2)是二次函数,(1)、(3)、(4)都不是二次函数.

点拨:解答本题的关键是正确理解二次函数的概念.

例 2 若函数 $y=(a-1)x^{m-3}+5x-89$ 是二次函数，求 a 的取值范围及 m 的值.

易错警示：二次函数的二次项系数不为 0.

【分析】由二次函数的概念可知，$a-1\neq0$，$m-3=2$.

解：由题意得 $a-1\neq0$，$a\neq1$；$m-3=2$，$m=5$，

因此，a 的取值范围是 $a\neq1$，m 的值为 5.

点拨：解答本题的关键是正确理解二次函数概念中的系数与次数.

跟踪训练

1. 已知函数 $y=ax^2+bx+c$(其中 a、b、c 为常数)，当 a ________时，此函数是二次函数；当a ________，b ________时，此函数是一次函数；当 a ________，b ________，c ________时，此函数是正比例函数.
2. 已知函数 $y=(m+2)x^{m^2+m}$ 是关于 x 的二次函数，则满足条件的 m 值为________.
3. 从边长为 15 cm 的正方形铁片中间剪去一个边长为 x cm 的小正方形铁片，则剩下的四方框铁片的面积 $y(\text{cm}^2)$与 $x(\text{cm})$间的函数关系式为________.
4. 下列函数关系式中，二次函数的个数是(　　)

(1)$y=\sqrt{3}x^2+2xz+5$；(2)$y=-5+8x-x^2$；(3)$y=(3x+2)(4x-3)-12x^2$；(4)$y=ax^2+bx+c$；(5)$y=mx^2+x$；(6)$y=bx^2+1(b\neq0)$；(7)$y=x^2+kx+20$(k 为常数)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

5. 下列结论正确的是(　　)

A. 二次函数自变量的取值范围是非零实数

B. 二次函数自变量的取值范围是所有实数

C. 形如 $y=ax^2+bx+c$ 的函数叫做二次函数

D. 二次方程是二次函数的特例

6. 对于函数 $y=ax^2+bx+c$，下列说法正确的是(　　)

A. y 是 x 的二次函数

B. y 是 x 的一次函数

C. 当 $b\neq0$ 时，y 是 x 的二次函数

D. 当 $c\neq0$，$a+c=0$ 时，y 是 x 的二次函数

7. 在如图 26.1－1 所示的平面直角坐标系中，函数图象的解析式应是(　　)

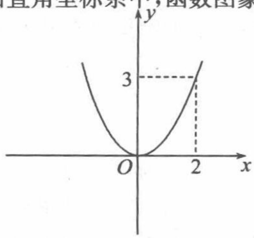


图 26.1－1

A. $y=\frac{3}{2}x$　　B. $y=\frac{2}{3}x^2$

C. $y=\frac{4}{3}x^2$　　D. $y=\frac{3}{4}x^2$

知识点2　二次函数的图象(★★)

二次函数的图象是抛物线，其画法一般用描点法(有电脑可以用几何画板等软件)，画图步骤为：列表、描点、连线.

易错警示：描点法的三个步骤为列表、描点、连线.

例3 画二次函数 $y=x^2$ 的图象.

解：(1)列表：在 x 的取值范围内列出函数的对应值表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	9	4	1	0	1	4	9	…

(2)在直角坐标系中描点：用表里各组对应值作为点的坐标，在平面直角坐标系中描点.

(3)连线：用光滑的曲线顺次连接各点，得到函数 $y=x^2$ 的图象，如图 26.1—2 所示.

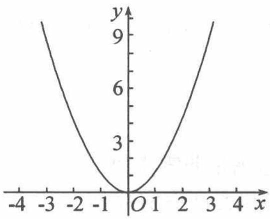


图 26.1—2

点拨：观察这个函数的图象，它有以下特点：这样的曲线是一条抛物线，它有一条对称轴，且对称轴和图象有一个交点，这个交点就是它的顶点. 因此，这个抛物线的对称轴是 y 轴，它的顶点是原点.

例4 在同一直角坐标系内画出下列二次函数的图象：

$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2+2$，$y=\frac{1}{2}x^2-2$.

观察三条抛物线的相互关系，并分别指出它们的开口方向及对称轴、顶点的位置. 根据上面图形的规律，你能说出抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$，$y=-\frac{1}{3}x^2+2$ 的开口方向及对称轴、顶点的位置吗？

【分析】根据作图的步骤，在同一坐标系中可以画出三个函数的图象，从式子中可以看出，它们只是常数项不同，反映在图象中的不同应是由于它引起的.

解：用描点法可以作出三个函数的图象，如图 26.1—3 所示.

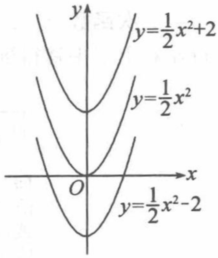


图 26.1－3

$y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象的开口向上，对称轴为 y 轴、顶点为原点 $(0,0)$；

$y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图象的开口向上，对称轴为 y 轴、顶点为点 $(0,2)$；

$y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的图象的开口向上，对称轴为 y 轴、顶点为点 $(0,-2)$.

从三个函数的图象可以看出，它们的形状相同，只是顶点的位置不同.

根据上面图形的规律，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 的图象的开口向上，对称轴为 y 轴、顶点为点 $(0,k)$；$y=-\frac{1}{3}x^2+2$ 的图象的开口向下，对称轴为 y 轴、顶点为点 $(0,2)$.

点拨：从本题的图象可知，当二次函数的常数项不同时，它们的图象相同，但对称轴相同，但顶点位置不同.

跟踪训练

8. 分别在同一直角坐标系中，画出下列各组两个二次函数的图象.
  (1) $y=-2x^2$ 与 $y=-2x^2-2$；
  (2) $y=3x^2+1$ 与 $y=3x^2-1$.

9. 在同一直角坐标系中，函数 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$ 的图象与函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象有何关系？

知识点3　二次函数的图象和性质(★★)

(1) 二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图象和性质

二次函数 $y=ax^2$ 图象(如图 26.1－4)的对称轴是 y 轴，当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 的图象开口向上，在对称轴的左边，曲线自左向右下降；在对称轴的右边，曲线自左向右上升，顶点是抛物线上位置最低的点.图象的这些特点，反映了当 $a>0$ 时，函数 $y=ax^2$ 的性质：当 $x<0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大；当 $x=0$ 时，函数值 $y=ax^2$ 取得最小值，最小值是 $y=0$.

同样，当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 的性质与 $a>0$ 时相反.

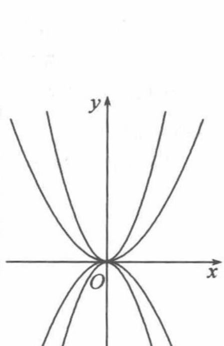
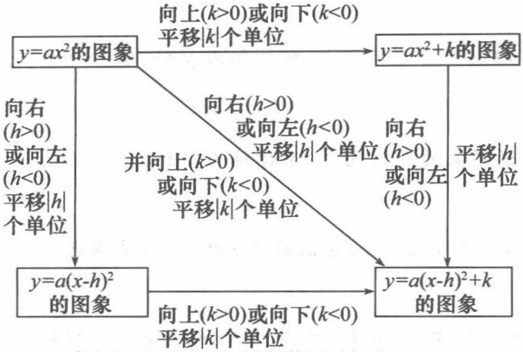


图 26.1－4

(2) 二次函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$ 的图象和性质

二次函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的图象可以看作是二次函数 $y=ax^2$ 的图象进行左右上下平移得到的，平移的规律如下：



(3)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象和性质

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 通过配方可以化为 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 即 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 图象的性质与 $y=a(x-h)^2+k$ 的类似.

例 5 已知函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$，$y=-\frac{1}{4}(x+2)^2$ 和 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$.

(1)在同一直角坐标系中画出它们的函数图象；

(2)分别说出各个函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标；

(3)试说明分别通过怎样的平移，可以由函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图象得到函数 $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2$ 和函数 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的图象；

(4)分别说出各个函数的性质.

【分析】根据描点法可以作出 3 个函数的图象，由图象可以看出它们的开口方向、对称轴和顶点坐标，再根据图形的平移规律和图象确定怎样平移，最后根据图象判断它们的性质.

解：(1)根据描点法可以作出 3 个函数的图象，如图 26.1—5 所示.

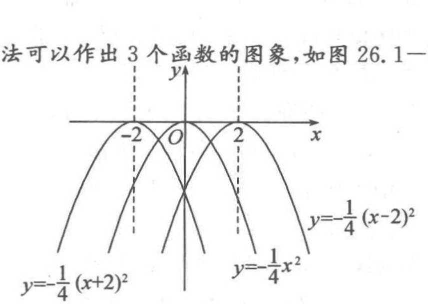


图 26.1—5

(2)函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图象开口向下，对称轴为 y 轴，顶点坐标为(0,0)；

函数 $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=-2$，顶点坐标为(−2,0)；

函数 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为(2,0).

(3)将函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图象沿 x 轴向左平移 2 个单位得函数 $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2$ 的图象，将函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图象沿 x 轴向右平移 2 个单位得函数 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的图象.

(4)观察 3 个函数的图象可知其性质：在对称轴的左侧，函数值 y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，函数值 y 随 x 的增大而减小；3 个函数均有最大值，最大值 $y=0$.

点拨：本题中的 3 个函数式只是对称轴不同，因此，将一个图象平移便可得到其余两个函数的图象，其性质相同.

跟踪训练

10. 将抛物线 $y=x^2-2x+3$ 向左平移两个单位，再向上平移两个单位，得到的图象对应的函数关系式是什么？抛物线 $y=x^2-2x+3$ 怎样平移可得到抛物线 $y=x^2$？
11. 开口向上的抛物线 $y=(m^2-2)x^2+2mx+1$ 的对称轴经过点(−1,3)，则 $m=$________.

例 6 (1)你能画出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$ 的图象，并说明这个函数具有哪些性质吗？

(2)不画出图象，你能直接说出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$ 的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标吗？

【分析】我们已经知道函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$ 的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标. 根据这些特点，可以采用描点作图的方法作出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$ 的图象，进而观察得到这个函数的性质.

解：(1)①列表：在 x 的取值范围内列出函数的对应值表：

x	…	−2	−1	0	1	2	3	4	…
y	…	$-6\frac{1}{2}$	−4	$-2\frac{1}{2}$	−2	$-2\frac{1}{2}$	−4	$-6\frac{1}{2}$	…

②描点：用表格里各组对应值作为点的坐标，在平面直角坐标系中描点.

③连线：用光滑的曲线顺次连接各点，得到函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$ 的图象. 如

图26.1－6.

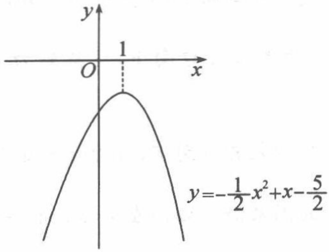


图 26.1－6

观察函数图象，得到这个函数的性质：

当 $x<1$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大；当 $x>1$ 时，函数值 y 随 x 的增大而减小；当 $x=1$ 时，函数取得最大值，最大值 $y=-2$.

(2)因为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)^2-2$，所以这个函数的图象开口向下，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为$(1,-2)$.

点拨：(1)列表时，应根据对称轴是 $x=1$，以 1 为中心，对称地选取自变量的值，求出相应的函数值，相应的函数值是相等的.

(2)直角坐标系中 x 轴、y 轴的长度单位可以任意定，且允许 x 轴、y 轴选取的长度单位不同. 所以要根据具体问题，选取适当的长度单位，使画出的图象美观.

跟踪训练

12. 填空：

(1)抛物线 $y=x^2-2x+2$ 的顶点坐标是________；

(2)抛物线 $y=2x^2-2x-\frac{5}{2}$ 的开口________，对称轴是________；

(3)已知抛物线 $y=-x^2+2x+c^2$ 的对称轴和 x 轴相交于点$(m,0)$，则 m 的值为________；

(4)已知 $y=(k+2)x^{k^2+k-4}$ 是二次函数，且当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大，则 $k=$________，其顶点坐标为________对称轴为________；

(5)二次函数 $y=ax^2+4x+a$ 的最大值是-3，则 $a=$________.

13. 通过配方，写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(1)$y=3x^2+2x$；　　(2)$y=-x^2-2x$；

(3)$y=-2x^2+8x-8$；　　(4)$y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$.

14. 若抛物线 $y=x^2-2x+c$ 与 y 轴的交点为$(0,-3)$，则下列说法不正确的是(　　)

A. 抛物线开口向上　　B. 抛物线的对称轴是 $x=1$

C. 当 $x=1$ 时，y 有最大值为-4　　D. 抛物线与 x 轴的交点为$(-1,0)$，$(3,0)$

知识点4　二次函数的解析式(★★★)

要确定二次函数的解析式，一般使用待定系数法进行求解，常用以下三种方法：

(1)已知抛物线上三个点的坐标，设一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；

(2)已知抛物线的顶点坐标或最大(小)值，设顶点式 $y=a(x-h)^2+k$；

(3)已知抛物线与 x 轴的两交点的横坐标 x_1,x_2，设两根式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

例7 如图 26.1—7，二次函数的图象过 A,B,C 三点，点 A 的坐标为$(-1,0)$，点 B 的坐标为$(4,0)$，点 C 在 y 轴正半轴上，且 $AB=OC$.

(1)求点 C 的坐标；

(2)求二次函数的解析式，并求出函数的最大值.

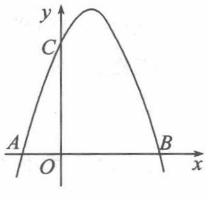


图 26.1—7

【分析】本题是典型的求二次函数解析式的问题，设一般形式，用待定系数法求解.

解：(1)由题意知 $AB=5$，所以 $OC=5$，即点 C 的坐标为$(0,5)$；

(2)设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，把 A,B,C 三点的坐标分别代入解析式，得

$$\begin{cases}a\times(-1)^2+b\times(-1)+c=0,\\ a\times 4^2+b\times 4+c=0,\\ a\times 0^2+b\times 0+c=5,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-\dfrac{5}{4},\\ b=\dfrac{15}{4},\\ c=5.\end{cases}$$

所以，二次函数的解析式为 $y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}x+5$.

因为 $y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}x+5=-\frac{5}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{125}{16}$，

所以，抛物线的开口向下，顶点$\left(\frac{3}{2},\frac{125}{16}\right)$是图象的最高点，则当 $x=\frac{3}{2}$ 时，函数 y 取得最大值$\frac{125}{16}$.

点拨：用“待定系数法”确定二次函数的解析式，是学习二次函数最基本、最重要的方法之一，同学们一定要牢固地掌握. 在求二次函数的解析式时，要善于灵活地选择表达式，以达到快捷、简便求解的目的，如本题选用交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 也很方便.

跟踪训练

15. 根据下列条件求关于 x 的二次函数的解析式：

(1)当 $x=1$ 时，$y=0$；$x=0$ 时，$y=-2$；$x=2$ 时，$y=3$；

(2)如图 26.1—8，抛物线的函数表达式是(　　)

A. $y=x^2-x+2$　　B. $y=-x^2-x+2$

C. $y=x^2+x+2$　　D. $y=-x^2+x+2$

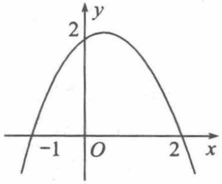


图 26.1—8

例 8 已知抛物线的顶点坐标为(2,3),且经过点(3,1),求其解析式.

【分析】已知顶点坐标时,设顶点式比较简便,用待定系数法求解.

解:设二次函数的解析式为 $y=a(x-h)^2+k$. 因顶点坐标为(2,3),

所以设二次函数的解析式为 $y=a(x-2)^2+3$,

由条件经过点(3,1),得

$1=a(3-2)^2+3$,解得 $a=-2$,

故所求抛物线的解析式为 $y=-2(x-2)^2+3$,即 $y=-2x^2+8x-5$.

点拨:本题中用顶点式比较简便,也可以设一般式,但求解过程比较复杂.解答如下:设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$. 由已知可得 $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=3\\ 9a+3b+c=1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=-2\\ b=8\\ c=-5\end{cases}$,所以 $y=-2x^2+8x-5$.

跟踪训练

16. 根据下列条件求关于 x 的二次函数的解析式:

(1)抛物线顶点坐标为(−1,−2),且通过点(1,10);

(2)当 $x=3$ 时,$y_{最小值}=-1$,且图象过(1,7).

例 9 已知二次函数图象与 x 轴交于(−1,0),(3,0),且经过点(1,−5),求其解析式.

【分析】此题是已知二次函数图象与 x 轴的两交点坐标,用两根式(有时也称为交点式或两点式)$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$比较简便.

解:设二次函数的解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$. 又经过点(1,−5),

得 $-5=a(1+1)(1-3)$,解得 $a=\dfrac{5}{4}$.

故所求二次函数的解析式为 $y=\dfrac{5}{4}(x+1)(x-3)$,

即 $y=\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{15}{4}$.

点拨:已知二次函数图象与 x 轴的两交点坐标或两交点间的距离及对称轴时,用两根式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$比较简便. 此题也可以使用一般式求解,但比较复杂.

跟踪训练

17. 根据下列条件求关于 x 的二次函数的解析式:

(1)二次函数图象与 x 轴交点的横坐标分别是 $x_1=-3$,$x_2=1$,且与 y 轴的交点为(0,−2);

(2)图象过点(4,0)、(1,0)、(3,4).