十一五

浙江省重点教材建设项目

数学建模与数学实验

Mathematical Modeling and Mathematics Experiments

◎主　编　宣　明
副主编　王新成　阮　婧
林　斌　项海飞

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学建模与数学实验

主　编　宣　明

副主编　王新成　阮　婧

林　斌　项海飞

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本书是高职院校数学建模与数学实验课程建设的标志性成果，全书共9章。第1章，数学建模与数学实验简介；第2章，数学建模任务；第3章，MATLAB数学实验；第4章，LINGO数学实验；第5章，EXCEL数学实验；第6章，微分方程模型；第7章，数据拟合方法；第8章，数据统计与回归分析；第9章，数学建模案例分析。各章节均附有大量的习题。本书的作者均是温州职业技术学院第一线的优秀数学建模指导教师，本书的特色是以数学建模任务为驱动开展的教学活动。

本书可作为高职数学建模和数学实验课程的教材，也可作为高职数学建模竞赛的培训教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模与数学实验／宣明主编．—杭州：浙江大学出版社，2010．9

ISBN 978-7-308-07952-5

Ⅰ．①数… Ⅱ．①宣… Ⅲ．①数学建模—高等学校：技术学校—教材 ②高等数学—实验—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ．①O141．4 ②O13-33

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第174941号

数学建模与数学实验

主　编　宣　明

副主编　王新成　阮　婧　林　斌　项海飞

责任编辑　黄兆宁
封面设计　雷建军
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路148号　邮政编码310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　18．75
字　　数　468千
版 印 次　2010年9月第1版　2010年9月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07952-5
定　　价　32．00元

前　言

数学建模与数学实验课程作为新型的课程进入大学课堂，就是要加强培养学生用数学工具分析解决实际问题的意识和能力。这既顺应时代发展的潮流，也符合教育改革的要求，更适应高职“工学结合”教学改革的思路。我们根据高职项目化教学等教学改革要求，并结合我院（温州职业技术学院）10年来参加全国大学生数学建模竞赛的教学体会和6年开设数学建模课程的教学经验，编写了《数学建模与数学实验》讲义（内部教材），在学院已经试用3年以上，并对书中内容进行了3次修改和完善；2009年《数学建模与数学实验》被浙江省教育厅列为浙江省高校重点教材建设。

在教材编写过程中，主要体现以下特点：

1. 以数学建模任务为驱动，学习相关数学理论与数学实验，完成任务。

2. 突出数学工具在分析解决实际问题的的作用。

3. 所涉及的理论知识能够适应高职学生的学习，数学建模任务所需的理论知识有：一元微积分理论、一阶微分方程理论、数据拟合和回归理论、统计基础理论、优划基本理论。

4. 数学实验基本上是适应高职生的相应理论知识的基础实验。

教学建议

1. 数学建模课是以数学建模任务来开展教学活动的，数学建模任务含有MATLAB实现任务，LINGO实现任务，EXCEL实现任务；由于内容的连贯性不强，书中的章节可以跳跃式地选用，在课堂上未讲授的内容可作为课外阅读材料。

2. 数学建模课为72学时，教学可从数学建模任务出发，小组组织学习相关知识，完成数学建模任务并提交实践小论文。

3. 数学实验课为36学时，教学可侧重MATLAB数学实验、LINGO数学实验、EXCEL数学实验的学习，并提交实验报告。

本书编写的具体分工如下：宣明撰写第1、2、3、5、9章；林斌撰写第4章；王新成撰写第6章；项海飞撰写第7章；阮婧撰写第8章。宣明负责全书质量把关和组织编写协调工作。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳切希望广大读者对教材提出宝贵的意见和建议，以便修订时加以完善。

编　者

2010年7月

目 录

第 1 章 数学建模与数学实验简介

随着科学技术的飞速发展和社会的进步，数学不但在各传统领域（如工程技术、经济建设等）发挥着越来越重要的作用，而且不断地向新的领域（如生物、医学、金融、交通、人口、地质等）渗透. 数学与计算机技术相互结合，形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术，并成为当代高新技术的重要组成部分. 同时“数学模型”、“数学实验”、“数学建模”这些词汇也越来越多地出现在现代人的生活、工作和社会活动中，如出租车计价的数学模型、个人所得税缴纳的数学模型、人口预报的数学模型、基金使用计划的数学模型等，可见在建立数学模型，使用数学实验方法解决实际问题过程中，数学建模是一个不可缺少的有效手段.

1.1 数学模型

初等代数中碰到过这样的航行问题：

甲、乙两地相距 750km，船从甲到乙顺水航行需 30h，从乙到甲逆水航行需 50h，问船速和水速各是多少？

解 设用 $x$km/h 表示船速，$y$km/h 表示水速，船运行中仅考虑水流的影响，列出方程：

$$\begin{cases}(x+y)\times 30 = 750 \\ (x-y)\times 50 = 750\end{cases}$$

求解得到 $x = 20, y = 5$.

答：船速每小时 20km，水速每小时 5km.

当然，真正实际问题的数学模型通常要复杂得多，但是建立数学模型的基本内容已经包含在解上述问题的过程中了. 那就是：根据目标和问题的背景作出必要的简化假设（航行中设船速和水速为常数）；用字母表示待求的未知量（x, y 代表船速和水速）；利用相应的物理或其他规律（匀速运动的距离等于速度乘以时间），列出数学式子（二元一次方程组）；求出数学上的解答（$x = 20, y = 5$）；用这个答案解释原问题（船速每小时 20km，水速每小时 5km）；最后还要用实际现象来验证上述结果.

数学模型（Mathematical Model）是用数学术语对部分现实世界近似的描述. 即用如函数、图形、代数方程、微分方程等数学式子来描述所研究的客观对象或系统在某一方面的存在规律.

1.2 数学建模和数学建模竞赛

1.2.1 数学建模

数学建模(Mathematical Modeling)是利用数学知识与方法解决实际问题的一种有效实践,即建立模型、求解该模型并得到结论以及验证结论是否正确的全过程.

数学建模的全过程大体上可归纳为以下步骤:

第 1 步,对某个实际问题进行观察、分析;

第 2 步,对实际问题进行必要的抽象、简化,作出合理的假设;

第 3 步,确定要建立的模型中的变量和参数;

第 4 步,根据某种"规律",建立变量和参数间确定的数学关系;

第 5 步,解析或近似地求解该数学问题;

第 6 步,数学结果能否展示、解释预测实际问题中出现的现象,或用某种方法来验证结果是否正确;

第 7 步,如果第 6 步的结果是肯定的,那么就可以付之试用;如果是否定的,那就要回到第1 至 6 步进行仔细分析,重复上述建模过程.

可见,数学建模过程中最重要的三个要素,也是三个最大的难点是:

1. 怎样从实际情况出发作出合理的假设,从而得到可以执行的合理的数学模型;

2. 怎样简明、合理、快捷地求解模型中出现的数学问题;

3. 怎样验证模型是合理、正确、可行的.

要想比较成功地运用数学建模去解决真正的实际问题,还需学习"双向翻译"的能力,即能够把实际问题用数学的语言表述出来,而且能够把数学建模得到的结果,用普通人能够懂的语言表述出来.

例如,哥尼斯堡有一条普雷格尔河,这条河有两个支流,在城中心汇合成大河,河中间有一小岛,河上有七座桥,如图 1-1 所示. 18 世纪哥尼斯堡的很多居民总想一次不重复地走过这七座桥,再回到出发点. 可是试来试去总是办不到,于是有人写信给当时著名的数学家欧拉,欧拉于1736 年建立了一个数学模型解决了这个问题. 他把 A、B、C、D 这四块陆地抽象为数学中的点,把七座桥抽象为七条线,如图 1-2 所示.

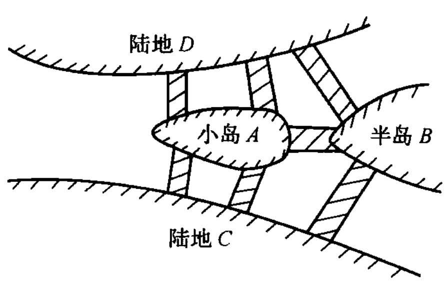

图 1-1 七桥

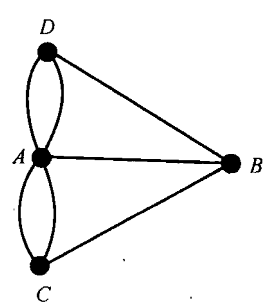

图 1-2 抽象后的七桥

人们步行七桥问题,就相当于图 1-2 的一笔画问题,即能否将图 1-2 所示的图形不重复

地一笔画出来.这样的抽象并不改变问题的实质.

哥尼斯堡七桥问题是一个具体的实际问题,属于数学模型的现实原型.经过理想化抽象所得到的如图 1-2 所示的一笔画问题便是七桥问题的数学模型.在一笔画的模型里,只保留了桥与地点的连接方式,而其他一切属性则全部抛弃了.所以从总体上来说,数学模型只是近似地表现了现实原型中的某些属性,而就所要解决的实际问题而言,它是更深刻、更正确、更全面地反映了现实,也正由此,对一笔画问题经过一定的分析和逻辑推理,得到此问题无解的结论之后,可以返回到七桥问题,得出七桥问题的解答,不重复走过七座桥回到出发点是不可能的.

1.2.2　数学建模竞赛

自古以来,各种竞赛方式历来是各行各业培养、锻炼和选拔人才的重要手段.凡竞赛实际上都有准备阶段、临场发挥和赛后总结、提高三个阶段.全国大学生数学建模竞赛也不例外.

1. 全国大学生数学建模竞赛简介

全国大学生数学建模竞赛每年 9 月第二个星期五至下一周星期一(共 3 天,72h) 举行,竞赛面向全国大专院校的学生,不分专业(但竞赛分甲、乙两组,甲组竞赛任何大学生均可参加,乙组竞赛只针对大专生).竞赛是由三名大学生组成一队,可以自由地收集资料、调查研究,使用计算机、互联网和任何软件,在三天时间内分工合作,共同完成一篇论文.

该竞赛首次举办于 1992 年,由中国工业与应用数学学会(CSIAM) 组织实施.1994 年起由教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办.1999 年开始设立大专组的竞赛.该项竞赛已经成为全国高等院校中规模最大的课外科技活动.

表 1-1　1992—2009 年参加全国大学生数学建模竞赛情况

年　份	参赛校数	参赛队数
1992	79	314
1993	101	420
1994	196	867
1995	259	1234
1996	337	1683
1997	373	1874
1998	400	2103
1999	460	2657
2000	517	3210
2001	529	3861
2002	572	4448
2003	638	5406
2004	724	6881
2005	795	8492
2006	864	9985
2007	969	11742
2008	1022	12834
2009	1135	15042

2009 年全国有 33 个省、自治区、直辖市(包括香港和澳门特区)1135 所院校、15042 个队(其中甲组 12272 队、乙组 2770 队)、超过 4.5 万名来自各个专业的大学生参加竞赛，是历年来参赛人数最多的，如表 1-1 所示.

2. 数学建模竞赛的宗旨及意义

数学建模竞赛的宗旨是：创新意识，团队精神，重在参与，公平竞争.

数学建模竞赛的特点是题目由工程技术、管理科学中的实际问题简化加工而成，对数学知识要求不深，一般没有事先设定的标准答案，但留有充分余地供参赛者发挥其聪明才智和创造精神.

数学建模竞赛对高职教育的意义在于：高等职业教育的培养目标是为生产和服务第一线培养具备综合职业能力和全面素质的高级实用性人才. 而数学建模就是要求大学生参与到具体的生产生活中去，并解决实际问题，它所包含的数学训练、数学思想、数学方法将来都会发挥积极的作用，使大学生终身受益；从某种意义上来说，数学建模竞赛是提前让大学生了解今后走向工作岗位所需要的能力和品质.

3. 全国大学生数学建模竞赛的三个阶段

(1) 培训阶段

① 细水长流和集中培训相结合. 所谓"细水长流"，就是开设公共选修课或必修课；"集中培训" 就是在赛前用一定的时间对参赛者进行提高能力的集训.

② 培训内容包括：扩充理论知识(比如数值方法、统计分析等)，加强常用软件的操作(比如 MATLAB、LINGO、EXCEL 等)，解决实际问题，编写论文. 培训的主要形式可以是：数学建模任务的提出、学习相关理论和相应软件操作，以论文的形式完成任务. 重要的是在这过程中始终以 3 人学习小组为单位.

③ 组织 1 至 2 次的模拟考试，让学生适应实战情形.

(2) 三天的拼搏

这是学生独立去迎接竞赛的挑战，既体现培训的成果，也充分展现了学生的应变能力，当然有时候也有运气问题. 主要应该做好以下事情：

① 要有充分时间来审题，展开充分的讨论，写下曾经讨论过的所有假设，及设想的各种做法.

② 针对题目要求进行数学建模，回答题目中的问题.

③ 论文是关键，要有一位队员负责写论文，特别是要写好摘要.

④ 因为三天时间太短，不可能将所有想法都实现，应把未实现的想法记录下来，以备赛后阶段之用.

(3) 赛后继续阶段

竞赛结束，从某种意义上说是真正收获的开始. 理由有二：其一是，绝大多数同学在参赛的三天中有很多想法，由于时间的限制，无法一一实现，已经做好的成果来不及深入研究；其二是，师生可以在一起切磋、讨论问题. 对于教师来说，竞赛题目的深入往往提供了很好的科研项目；对于学生来说，是实施"大学生素质拓展计划" 的有效尝试.

4. 数学建模论文的撰写方法

在写作论文时，建模小组的各成员应齐心协力，既要各司其职，又要通力合作. 按照数学

建模竞赛章程规定，数学建模论文主要组成部分有如下几方面：

(1) 题目

论文题目是一篇论文给出的涉及论文范围及水平的第一重要信息，要求简短精练、高度概括、准确得体、恰如其分. 既要准确表达论文内容，恰当反映所研究的范围的深度，又要尽可能概括、精练. 例如《基金使用计划的优化模型》、《飞越北极问题的数学模型》等.

(2) 摘要

摘要是论文内容不加注释和评论的简短陈述，其作用是使读者不阅读论文全文即能获得必要的信息. 在数学建模论文中，摘要是非常重要的一部分. 数学建模论文的摘要应包含以下内容：所研究的实际问题、建立的数学模型、求解模型的方法、获得的基本结果以及对模型的检验或推广. 论文摘要需要用概括、简练的语言反映这些内容，尤其要突出论文的优点或闪光点. 2001 年起，为了提高论文评选效率，要求将论文第一页全用作摘要，摘要中可出现图、表和数学公式，对字数无明确限制.

摘要在整篇论文中占有重要权重，需要认真书写.

(3) 问题重述

数学建模竞赛要求解决给定的问题，所以论文中应叙述给定问题. 撰写这部分内容时，不要照抄原题，应把握住问题的实质，再用较精练的语言叙述问题.

(4) 模型假设

建模时，要根据问题的特征和建模目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，对问题进行必要的简化，做出一些合理的假设. 模型假设部分要求用精练、准确的语言列出问题中所给出的假设，以及为了解决问题所做的必要、合理的假设. 假设做得不合理或太简单，会导致产生错误的或无用的模型；假设做得过分详尽，试图把复杂对象的众多因素都考虑进去，会使工作很难或无法继续下去，因此常常需要在合理与简化之间作出恰当的折中.

例如，飞越北极问题，假设飞机飞行高度不变，飞行不受其他干扰；饮酒驾车问题假设在晚上 7 点半晚饭时大李第二次喝酒.

(5) 分析与建立模型

这一阶段即根据假设，用数学的语言、符号描述对象的内在规律，得到一个数学结构. 建模时应尽量采用简单的数学工具，使建立的模型易于被人理解. 在撰写这一部分时，对所用的变量、符号、计量单位应作解释，特定的变量和参数应在整篇文章中保持一致. 为使模型易懂，可借助于适当的图形、表格来描述问题或数据.

它是论文的核心部分，能体现建模的创造性.

(6) 模型求解

模型求解即使用各种数学方法或软件包求解数学模型. 此部分应包括求解过程的公式推导、算法步骤及计算结果. 为求解而编写的计算机程序应放在附录部分. 有时需要对求解结果进行数学上的分析，如结果的误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏度分析等.

它是问题的结果，有时是最值得关注的数据.

(7) 模型检验

模型检验即把求解和分析结果翻译回到实际问题，与实际的现象、数据比较，检验模型的合理性和适用性. 如果结果与实际不符，问题常出在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模. 这一步对于模型是否真的有用十分关键.

(8) 模型推广

模型推广即将该问题的模型推广到解决更多的类似问题,或讨论给出该模型在更一般情况下的解法,或指出可能的深化、推广及进一步研究的建议.

(9) 参考文献

在正文中提及或直接引用的材料或原始数据,应使用"[1]、[2]、……"的形式注明出处,并将相应的出版物列举在参考文献中.需标明出版物的著者姓名、名称、页码、出版日期、出版单位等.

参考文献的著录格式为:

[编号] 作者.书名.出版地:出版社,出版年

期刊杂志论文的表述方式为:

[编号] 作者.篇名.刊名,出版年卷(期):页码

网上资源的表达式为:

[编号] 作者.文章名.网页.下载年 - 月 - 日

(10) 附录

附录是正文的补充,与正文有关而又不便于编入正文的内容都收集在这里,包括计算机程序、比较重要但数据量较大的中间结果等.为便于阅读,应在源程序中加入足够的注释和说明语句.

1.3 数学实验

长久以来,数学一直被认为是一门高度抽象的学科.对大多数人来说,无论是研究数学还是学习数学,都是从公理体系出发,沿着"定义→定理→证明→推理"这样一条逻辑演绎的道路进行.公理化体系的建立,充分展示了数学的高度抽象性和严谨的逻辑性,使数学成为有别于其他自然科学的独树一帜的科学领域.

但是,在完美的公理化体系的包装下,数学家们发现问题、处理问题、解决问题的思维轨迹往往被掩盖了.在学习中,常常有学生问道:当初的数学家是怎样想到这个问题的?他们是怎样发现和证明的?事实上,理性的认识需要充分的感性认识作为基础,数学的抽象来源于对具体数学现象的归纳和总结.我们学数学不仅要学习它的理论体系,而且要学会数学的思考方法.那么,我们能不能采用归纳的方法和实验的手段来学习和理解数学呢?数学实验课正是出于这样的目的而开设的一门课程.

1.3.1 数学实验

数学实验(Mathematical Experiments)是指为获得某种数学理论、验证某种数学猜想、解决某种数学问题,人们利用计算机系统作为实验工具,数学软件作为实验平台,数学理论作为实验原理,所进行的一种数学探索活动.

现在常用的数学软件有 MATHEMATICA,MATLAB,LINGO,EXCEL 等.

1.3.2 数学实验的内容与教学模式

1. 数学实验的内容

数学实验的内容包括基础实验和综合实验.

① 基础实验:以高等数学的基础内容为主要实验素材,掌握数学软件的基本命令,熟悉软件的公式演算、数值计算、图形绘制等基本功能.

② 综合实验:以实际应用问题为主要实验素材,如个人所得税计算、选址问题、易拉罐尺寸的最优设计、基金使用计划等让学生亲身体验用数学解决实际问题的全过程,培养学生建立数学模型、综合运用数学知识和解决实际问题的能力.

2. 数学实验教学模式

数学实验摆脱了传统数学教学中"老师讲、学生听、老师写、学生抄"的状况,借助数学软件和计算机构建了"问题 — 实验 — 交流 — 猜想 — 验证 — 拓展"的教学新模式,该模式包括以下六个环节.

(1) 问题

问题是实验的前提和条件,是实验教学的首要环节,问题情景的设计要有利于学生学习兴趣的激发,有助于唤起学生的积极思维.

(2) 实验

实验是指按实验目标和要求所进行的具体操作和演示,是实验教学的核心环节.

(3) 交流

交流是指学生与学生、学生与教师的交流.实验是在教师的指导下进行,信息的传送和反馈是不可缺的.数学交流是现代数学教学中的一个新课题,把实验与交流结合起来凸现了数学知识的形成过程.

(4) 猜想

猜想是指对实验结论的猜测和假说,提出猜想是科学发现的重要步骤,是实验教学的关键环节.猜想这一环节与实验、交流密不可分,常常相互交融在一起,有时甚至是先提出猜想再通过实验验证.猜想是一种灵感,要产生灵感,除了必须具有一定的数学修养外,还应该对面临的问题有比较深刻的理解.

(5) 验证

验证是指在提出猜想之后,通过演绎推理来验证猜想的正确性或通过举反例来否定猜想,这是数学实验中不可缺少的环节,是获得正确结论的关键步骤.

(6) 拓展

拓展是指在验证猜想之后,将实验结论作进一步的引申和迁移,旨在培养学生的发散性思维和探索能力,使知识和能力得到进一步的升华.

数学实验创造了让学生独立操作、分析和处理问题的良好环境,冲破了传统教学思想和教学方法的束缚,给学生提供了有利于自主学习和探索的条件.