理工科考研辅导系列

运筹学

知识精要与真题详解

主　编　金圣才
副主编　尹守华

赠送
圣才学习卡
20元
圣才学习网：www.100xuexi.com
圣才考研网：www.100exam.com

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

理工科考研辅导系列

运筹学知识精要与真题详解

主　编　金圣才
副主编　尹守华

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

全书分为十二章，每章包括三部分内容。第一部分是重点与难点解析；第二部分是名校考研真题详解；第三部分是名校期末考试真题详解。

本书精选了清华大学、上海交通大学、华中科技大学、大连理工大学、天津大学、南京大学、中国科学技术大学、中国科学院、北京航空航天大学、哈尔滨工业大学、北京理工大学、复旦大学、北京交通大学、武汉理工大学、南京航空航天大学、东北大学、北京邮电大学、西南交通大学、西北工业大学、山东大学、河海大学、东北财经大学、中国石油大学（华东）、电子科技大学、安徽大学、中南大学、四川大学、吉林大学等院校近年的运筹学考研真题（含管理基础、管理综合等考研专业课试卷中包含的运筹学试题）和期末考试真题，并进行了解答。通过这些真题及其详解，读者可以了解和掌握相关院校考研、期末考试的出题特点和解题方法。

圣才考研网（www.100exam.com）是本书的支持网站。圣才考研网是圣才学习网（www.100xuexi.com）旗下的考研专业网站，提供全国各高校考研考博历年真题（含答案）、专业课笔记讲义及其他复习资料、网上辅导课程等全套服务的大型考研辅导平台。本书和配套网络课程特别适合备战考研和大学期末考试的读者，对于参加相关专业同等学力考试、自学考试、资格考试的考生也具有很高的参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学知识精要与真题详解 / 金圣才主编. -- 北京
: 中国水利水电出版社, 2011.6
（理工科考研辅导系列）
ISBN 978-7-5084-8652-9

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①运筹学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O22-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第100100号

书　名	理工科考研辅导系列 **运筹学知识精要与真题详解**
作　者	主　编　金圣才　副主编　尹守华
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010)68367658（营销中心）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010)88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京圣才时代教育科技有限公司
印　刷	北京纪元彩艺印刷有限公司
规　格	184mm×260mm　16开本　28.5印张　711千字
版　次	2011年6月第1版　2011年6月第1次印刷
印　数	0001—3000册
定　价	58.00元

编　委　会

前　　言

高校考研专业课的历年试题一般没有提供答案，虽然各校所用参考教材各异，但万变不离其宗，很多考题也是大同小异。我们参考相关教材和资料，收集和整理了众多高校历年考研真题和期末考试试题，并进行了详细的解答，以减轻考生寻找试题及整理答案的痛苦。让读者用最少的时间获得最多的重点题、难点题(包括参考答案)，是本书的目的所在。

本书精选了清华大学、上海交通大学、华中科技大学、大连理工大学、天津大学、南京大学、中国科学技术大学、中国科学院、北京航空航天大学、哈尔滨工业大学、北京理工大学、复旦大学、北京交通大学、武汉理工大学、南京航空航天大学、东北大学、北京邮电大学、西南交通大学、西北工业大学、山东大学、河海大学、东北财经大学、中国石油大学(华东)、电子科技大学、安徽大学、中南大学、四川大学、吉林大学等院校近年的运筹学考研真题(含管理基础、管理综合等考研专业科目试卷中包含的运筹学试题)和期末考试试题，并进行了解答。通过这些真题及其详解，读者可以了解和掌握相关院校考研、期末考试的出题特点和解题方法。

全书共十二章，每章包括三部分内容。第一部分主要是根据各高校的教学大纲、考试大纲等，对本章的重点和难点进行归纳，并进行简要解析；第二部分主要是精选知名院校近年的考研真题，并进行详细解答；第三部分主要是精选知名院校近年的本科期末考试真题，并进行详细解答。

本书具有如下主要特点：

(1)难点归纳，简明扼要。每章前面均对本章的重点难点进行了整理。综合众多参考教材，归纳了本章几乎所有的考点，便于读者复习。

(2)所选题目均为知名院校近年的考研或期末考试真题，这些题目具有很强的代表性。通过这些真题及其详解，读者可以在很大程度上判断和把握相关院校考研和大学期末考试的出题特点和解题要求。

(3)对所有考试真题均进行了详细解答。了解历年真题不是目的，关键是要通过真题解答掌握和理解相关知识点，因此，本书不但精选了真题，同时还对所有的真题均进行了详细解答。

(4)题量较大，来源广泛。本书试题主要选自近30余所高校的历年考研真题、名校题库以及结合众多教材和相关资料编写而成。可以说本书的试题都经过了精心挑选，博选众书，取长补短。

由于题量较大，解答详细，错误、遗漏不可避免，诚请读者指正，不妥之处可与编者联系，不甚感激。

圣才学习网(www.100xuexi.com)是一家为全国各类考试和专业课学习提供名师网络辅导班、面授辅导班、在线考试等全方位教育服务的综合性学习型门户网站，包括圣才考研网、中华工程资格考试网、中华经济学习网、中华证券学习网、中华金融学习网等50个子网站。

圣才考研网(www. 100exam. com)是圣才学习网旗下的考研专业网站，是一家提供全国各个高校考研考博历年真题(含答案)、名校热门专业课笔记讲义及其他复习资料、网上辅导课程(专业课、经典教材)等全套服务的大型考研平台。

编者

2011 年 1 月

理工科考研辅导系列

- 电路名校考研真题详解
- 模拟电子技术名校考研真题详解
- 数字电子技术名校考研真题详解
- 自动控制原理名校考研真题详解
- 通信原理名校考研真题详解
- 数字信号处理名校考研真题详解
- 信号与系统名校考研真题详解
- 电磁场与电磁波名校考研真题详解
- 无机化学名校考研真题详解
- 有机化学名校考研真题详解
- 分析化学名校考研真题详解
- 化工原理名校考研真题详解
- 物理化学名校考研真题详解
- 生物化学名校考研真题详解
- 材料力学名校考研真题详解
- 理论力学名校考研真题详解
- 结构力学名校考研真题详解
- 运筹学知识精要与真题详解
- 机械设计知识精要与真题详解
- 机械原理知识精要与真题详解
- 细胞生物学知识精要与真题详解
- 分子生物学知识精要与真题详解
- 微生物学知识精要与真题详解
- 高等代数知识精要与真题详解
- 数学分析知识精要与真题详解
- 传热学知识精要与真题详解
- 工程热力学知识精要与真题详解
- 量子力学知识精要与真题详解
- 流体力学知识精要与真题详解
- 普通物理知识精要与真题详解

目　　录

前言
第一章　线性规划及单纯形法 …… 1
　第一节　重点与难点解析 …… 1
　第二节　名校考研真题详解 …… 7
　第三节　名校期末考试真题详解 …… 80
第二章　对偶理论与灵敏度分析 …… 92
　第一节　重点与难点解析 …… 92
　第二节　名校考研真题详解 …… 96
　第三节　名校期末考试真题详解 …… 143
第三章　运输问题 …… 147
　第一节　重点与难点解析 …… 147
　第二节　名校考研真题详解 …… 149
　第三节　名校期末考试真题详解 …… 176
第四章　目标规划 …… 183
　第一节　重点与难点解析 …… 183
　第二节　名校考研真题详解 …… 185
　第三节　名校期末考试真题详解 …… 193
第五章　整数规划 …… 200
　第一节　重点与难点解析 …… 200
　第二节　名校考研真题详解 …… 206
　第三节　名校期末考试真题详解 …… 223
第六章　动态规划 …… 227
　第一节　重点与难点解析 …… 227
　第二节　名校考研真题详解 …… 232
　第三节　名校期末考试真题详解 …… 255
第七章　图与网络分析 …… 260
　第一节　重点与难点解析 …… 260
　第二节　名校考研真题详解 …… 263
　第三节　名校期末考试真题详解 …… 313
第八章　排队论 …… 321
　第一节　重点与难点解析 …… 321
　第二节　名校考研真题详解 …… 325
　第三节　名校期末考试真题详解 …… 334

第九章　存储论 ………… 336
第一节　重点与难点解析 ………… 336
第二节　名校考研真题详解 ………… 340
第三节　名校期末考试真题详解 ………… 346
第十章　对策论 ………… 348
第一节　重点与难点解析 ………… 348
第二节　名校考研真题详解 ………… 351
第三节　名校期末考试真题详解 ………… 354
第十一章　决策论 ………… 356
第一节　重点与难点解析 ………… 356
第二节　名校考研真题详解 ………… 361
第三节　名校期末考试真题详解 ………… 374
第十二章　非线性规划 ………… 376
第一节　重点与难点解析 ………… 376
第二节　名校考研真题详解 ………… 380
附录 ………… 386
1. 南京大学2008年《管理与运筹学基础(运筹学)》考研试题与答案 ………… 386
2. 清华大学2005年《运筹学》考研试题与答案(回忆版) ………… 391
3. 天津大学2007年《运筹学基础》考研试题与答案 ………… 397
4. 上海交通大学2006年《运筹学与概率统计》考研试题与答案(运筹学部分) ………… 403
5. 大连理工大学2006年《运筹学基础及应用》考研试题与答案 ………… 406
6. 哈尔滨工业大学2008年《运筹学》考研试题与答案 ………… 411
7. 中国科学院—中国科学技术大学2005年《管理综合A》考研试题与答案(运筹学部分) ………… 419
8. 中国科学院—中国科学技术大学2004年《管理综合A》考研试题与答案(运筹学部分) ………… 424
9. 华中科技大学2007年《运筹学》考研试题与答案 ………… 429
10. 北京理工大学2007年《运筹学》考研试题与答案 ………… 436
11. 东北财经大学2007—2008学年第1学期《运筹学》期末考试试题与答案 ………… 444

第一章　线性规划及单纯形法

第一节　重点与难点解析

一、线性规划的数学模型

1. 线性规划的数学模型

$$\max(\min)z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(=,\geqslant)b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

其中：$x_j(j=1,2,\cdots,n)$为决策变量；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为工艺系数；$b_i(i=1,2,\cdots,m)$为资源限量；$c_j(j=1,2,\cdots,n)$为价值系数。

2. 线性规划的数学模型的三要素

(1)决策变量：需决策的量，即待求的未知数，一般记为 x_1、x_2 等。

(2)目标函数：需优化的量，即欲达的目标，用决策变量的表达式表示，一般记为 z。

(3)约束条件：为实现优化目标需受到的限制，用决策变量的等式或不等式表示。

3. 建立线性规划问题的数学模型步骤

(1)确定问题的决策变量。

(2)确定问题的目标，并表示为决策变量的线性函数。

(3)找出问题的所有约束条件，并表示为决策变量的线性方程或不等式。

二、线性规划模型的标准型

1. 线性规划问题的标准形式

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_j & (i=1,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

标准型应满足以下条件：

(1)目标函数为 max 型(注意：有些教材上规定是求极小值)。

(2)约束条件均为等式。

(3)变量 x_j 取值全为非负值。

(4)约束条件右端常数项 b_i 全为非负值。

2. 将非标准型转化为标准型

对不符合标准形式(或称非标准形式)的线性规划问题，可分别通过下列方法化为标准形式。

(1)目标函数为求极小值，即为 $\min z = CX = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$，因为求 $\min z$ 就等价于求 $\max(-z)$，令 $z' = -z$，即化为：$\max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$。

(2)若某个约束方程的右端项 $b_i < 0$，则在此等式或不等式两端同乘以(-1)，则等式或不等式的右端项必大于零。

(3)若约束条件是小于等于型，则在该约束条件不等式左边加上一个新变量—称为松弛变量，将不等式改为等式。如：$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leqslant 8 \Rightarrow x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8$。

(4)若约束条件是大于等于型，则在该约束条件不等式左边加上一个新变量—称为剩余变量，将不等式改为等式。如：$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \geqslant 8 \Rightarrow 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 8$。

一般地，$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \geqslant b_i \Rightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$，$x_{n+i} \geqslant 0$。

(5)若决策变量 x_k 无非负要求，即 x_k 可正可负，则可令两个新的变量：$x' \geqslant 0$，$x'' \geqslant 0$，作 $x_k = x'_k - x''_k$，在原有的数学模型中，x_k 均用 $x'_k - x''_k$ 来代替。而在非负约束中增加 $x'_k \geqslant 0$，$x''_k \geqslant 0$。

(6)对 $x \leqslant 0$ 的情况，令 $x' = -x$，则 $x' \geqslant 0$。

三、线性规划的图解法

1. 图解法的步骤

只含两个变量的线性规划问题，可以通过在平面上作图的方法求解，步骤为：

(1)以变量 x_1 为横坐标轴，x_2 为纵坐标轴，适当选取单位坐标长度建立平面直角坐标系。由变量的非负性约束知，满足该约束条件的解均在第一象限内。

(2)图示约束条件，找出可行域(所有约束条件共同构成的图形)。

(3)画出目标函数等值线，并确定目标函数增大(或减小)的方向。

(4)可行域中使目标函数达到最优的点即为最优解。

2. 关于线性规划问题可行域与解之间的性质

(1)若可行域非空且有界，则可行域是一个多边形，其定点个数是有限个；若可行域非空但无界，其定点个数也只有有限个。

(2)若可行域非空且有界，则必有最优解；若可行域无界，则可能有最优解，也可能无最优解。

(3)若线性规划问题有最优解(不论可行域是有界还是无界)，其最优解必可以在某个定点上达到。最优解的个数或唯一的或有无穷多个。

3. 线性规划问题的解

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad ①$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \qquad ② \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \qquad ③ \end{cases}$$

(1)可行解与可行域：满足式②、式③的解，称为线性规划问题的可行解，所有可行解的集合称为可行域。

(2)最优解：使目标函数值达到最优，即满足式①的可行解称为最优解。

(3)基：设线性规划约束方程组中的系数矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $m(m < n)$，则 A 中任一个 m 阶可逆矩阵 B 称为线性规划问题的一个基矩阵，简称为基。

(4)基(基本)解：取 A 中一个基 $B=(p_{j1},p_{j2},\cdots,p_{jm})$，对应的基变量为$(x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jm})$，当基变量取值均为0，且满足约束条件②的一个解 X，称为是关于基 B 的一个基本解。对于 A 中每一个基 B，只能找出一个基本解 X，而 A 中最多有 C_{nm} 个基，因此线性规划问题最多只有个 C_{nm} 个基本解。

(5)基可行解：满足非负约束③的基本界称为基本可行解。

(6)可行基：对应于基可行解的基称为可行基。

四、单纯形法

1. 单纯形法基本原理

(1)基本思想。

将模型的一般形式变成标准形式，再根据标准型模型，从可行域中找一个基本可行解，并判断是否是最优。如果是，获得最优解；如果不是，转换到另一个基本可行解，当目标函数达到最大时，得到最优解。

(2)迭代原理。

1)确定初始基可行解。

当线性规划问题的所有约束条件均为“≤”号时，松弛变量对应的系数矩阵即为单位矩阵，以松弛变量为基变量可确定基可行解。

对约束条件含“≥”或“=”号时，可构造人工基，人为产生一个 $m\times m$ 单位矩阵，用大 M 法或两阶段法获得初始基可行解。

2)最优性检验与解的判别(目标函数极大型)。

当所有变量对应的检验数均非正时，现有的基可行解即为最优解。若存在某个非基变量的检验数为零时，线性规划问题有无穷多最优解；当所有非基变量的检验数均严格小于零时，线性规划问题具有唯一最优解。

若存在某个非基变量的检验数大于零，而该非基变量对应的系数均非正，则该线性规划问题具有无界解(无最优解)。

当存在某些非基变量的检验数大于零，需要找一个新的基可行解，即要进行基变换。

2. 单纯形法迭代步骤

(1)求出初始可行解，列出初始单纯形表，如表1－1所示。设 $x_1\sim x_m$ 为基变量，$x_{m+1}\sim x_n$ 为非基变量。

表1－1

		c_1	σ_j	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	b_i	θ_i
c_B	X_B(基)	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n		
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	b_1	
c_2	x_2	0	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	b_2	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
c_m	x_m	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	b_m	
σ_j		0	$\cdots$	0		$\cdots$			

(2)计算检验数 σ_j，进行最优性检验。若已获得最优解(或确定无最优解)，则停止；否则进行(3)。

$$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i\cdot a_{ij}\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

(3)换基。根据 $\max(\sigma_j>0)=\sigma_k$ 的原则，确定 x_k 为换入变量，计算 $\theta_i=\dfrac{b_i}{a_{ik}}(a_{ik}>0)$；按规则 $\theta=\min\{\theta_i\}=\dfrac{b_l}{a_{lk}}$，确定 x_l 为换出变量。

(4)通过初等行变换将系数矩阵中变量 x_k 对应列变换为第 l 个元素为 1 的单位列向量，用 x_k 取代 x_l 为新的基变量，列出新的单纯形表，回到(2)。

3. 单纯形法的进一步讨论

(1)基本原理。

确定初始基可行解时，如果约束条件都是“≤”，可以直接找到一个单位矩阵。但如果约束条件是“≥”或“=”时，就要加入人工变量。

例如：

$$\max z=CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}p_jx_j=b\\ X\geqslant 0\end{cases} \qquad ①$$

为得到单位矩阵，在每个方程左边加上一个人工变量 $x_{n+i}(i=1,\cdots,m)$：

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ \qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\ x_j\geqslant 0,j=1,\cdots,n+m\end{cases} \qquad ②$$

以 x_{n+1}，$x_{n+2}\cdots$，x_{n+m}为基变量，x_1，$x_2\cdots$，x_n 为非基变量，得到一个初始基可行解 $X_0=(0,\cdots,0,b_1,\cdots,b_m)'$，从 X_0 出发进行迭代。

但是这两个约束方程是不等价的，只有在最优解中，人工变量都取 0 值时，才认为这两个问题的最优解是相同的。关于这一点有以下结论：

以式②为约束方程组的线性规划问题的最优解中，人工变量都处在非基变量的位置(即取 0 值)，则原问题①有最优解，且将②的最优解去掉人工变量部分即为①的最优解。

若②问题的最优解中，包含有非零的人工变量，则原问题①无可行解。

若②问题的最优解的基变量中，包含有人工变量，但该人工变量取值为 0，这时可将某个非基变量引入基变量来替换该人工变量，从而得到原问题的最优解。

迭代时，怎样才能把人工变量从基变量中快速的迭代出去，通常有两种方法，大 M 法和两阶段法。

(2)大 M 法。

用单纯形法求解线性规划问题：

$$\max z=-3x_1+x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 4\\ -2x_1+x_2-x_3\geqslant 1\\ 3x_2+x_3=9\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

先化标准形为：

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad ①$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 & ② \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 & ③ \\ 3x_2 + x_3 = 9 & ④ \\ x_1, x_2, \cdots, x_5 \geqslant 0 & ⑤ \end{cases}$$

分析此标准形的系数矩阵及增广矩阵：

$$\begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

在系数矩阵 A 中不存在单位矩阵（3 阶），为 A 的基。在这种情况下，需要加入人工变量，而 $p_4=(1,0,0)^T$。令 $p_6=(0,1,0)^T$，$p_7=(0,0,1)^T$。$(p_4p_6p_7)=I_3$，则需要加入人工变量 x_6，x_7，这时相当于在③中加上了变量 x_6，在④中加上了变量 x_7。则约束条件变为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 & ⑥ \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 & ⑦ \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 & ⑧ \\ x_1, x_2, \cdots, x_7 \geqslant 0 & \end{cases}$$

由于约束条件⑦、⑧在添加人工变量前已是等式为使等式得到满足，因此在最优解中人工变量取值必须为 0。因此，令目标函数中人工变量的系数为任意值大的负值，用“$-M$”代表。这时需将目标函数修改为 $\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$（$M$ 代表任意大的正数），“$-M$”称为罚因子，即只要人工变量取值大于 0，目标函数值就不能实现最优。

故数学模型为：

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_1, x_2, \cdots, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

与原线性规划问题等价。利用单纯形法计算。

(3) 两阶段法。

第一阶段：先求解一个目标函数中只包含人工变量的 LP 问题，即令目标函数中其他变量的系数取零，人工变量的系数取某个正的常数（一般取 1）在保持原问题约束条件不变的情况下求这个目标函数极小化时解。显然在第一阶段中，当人工变量取值为 0 时，目标函数值也为 0 这是的最优解就是原 LP 问题的一个基可行解。若第一阶段求解结果最优解的目标函数值不为 0，也即最优解的基变量中含非 0 的人工变量，表明原 LP 问题无可行解。

第二阶段：当第一阶段求解结果表明问题有可行解时，第二阶段是在原问题中去除人工变量，并从此可行解（即第一阶段的最优解）出发，继续寻找问题的最优解。

例如上述问题中，约束条件加入了人工变量 x_6，x_7 之后，采用两阶段法。

第一阶段：线性规划问题为：

$$\min \omega = x_6 + x_7 \rightarrow \max(-\omega) = -x_6 - x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_1, x_2, \cdots, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解得 $x=(1,3,0,0,0,0,0)$ 是原线性规划问题的一个基可行解。

第二阶段：目标函数为 $\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$ 约束条件是第一阶段的最终单纯形表中，将人工变量 x_6，x_7 对应的列去掉。剩下的元素构成的约束条件。

$$\begin{cases} x_4 - \dfrac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 = 3 \\ x_1 + \dfrac{2}{3}x_3 + \dfrac{1}{2}x_5 = 1 \\ x_{1-5} \geqslant 0 \end{cases}$$

再用单纯形法求解，得出非基变量的检验数 $\sigma_j < 0$，则有唯一的最优解 $\overline{X} = \left(0, \dfrac{5}{2}, \dfrac{2}{3}, 0, 0\right)^T$，代入目标函数得：$z = \dfrac{3}{2}$。

(4)单纯形法计算中的几个问题。

1)目标函数极小化时解的最优性判别。

当所求的线性规划问题的目标函数求极小值时，只需以所有检验数 $\sigma_j \geqslant 0$ 作为判别表中解是否最优的标志。

2)退化与循环。

一个基可行解如果存在取0的基变量，则称为是退化的基本可行解。相应的基称为退化基。

在退化情况下，用单纯形法进行迭代时，经过若干次后又回到原来的可行基：如 B_1，B_2，…，B_n，此时目标函数值并没用改变，这样的问题称为退化带来的循环问题。

退化解出现的原因一般是模型中存在多余的约束，使多个基可行解对应同一顶点。这样，按最小比值来确定出基变量时，有时会存在两个以上相同的最小比值，从而使下一个表的基可行解中出现一个或多个基变量等于0的退化解。当存在退化解时，就有可能出现计算循环。

为避免出现循环，采用1974年勃兰特提出的简便有效的规则：①当存在多个检验数 $\sigma_j \geqslant 0$ 时，始终选择下标值为最小的变量作为换入变量；②当 θ 值出现两个以上相同的最小比值时，始终选择下标值为最小的变量作为换出变量。

3)无可行解的判别。

当线性规划问题中添加人工变量后，无论用大 M 法或两阶段法，初始单纯形表中的解因含非零人工变量，故实质上是非可行解。当求解结果出现所有 $\sigma_j \leqslant 0$ 时，如基变量中仍含有非零的人工变量(两阶段法求解时的第一阶段目标函数值不等于0)，表明问题无可行解。

第二节　名校考研真题详解

【1－1】(上海交通大学2005年考研试题)参数线性规划问题(参数 $t \geqslant 0$)：

$$\max z(t) = (3+2t)x_1 + (5-t)x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ 2x_2 \leqslant 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_j \geqslant 0 (j=1,2) \end{cases}$$

(1)令 $t=0$ 用单纯形法求解。

(2)考虑 t 的不同取值对最优解的影响。

解：(1)令 $t=0$，标准化为：

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ x_j \geqslant 0 (j=1,2,\cdots,5) \end{cases}$$

再用单纯形法求解，如表1－2所示。

表1－2

C_j			3	5	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	0	1	0	0	－
0	x_4	12	0	[2]	0	1	0	←6
0	x_5	18	3	2	0	0	1	9
$C_j - Z_j$			3	5↑	0	0	0	
0	x_3	4	1	0	1	0	0	4
5	x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	－
0	x_5	6	[3]	0	0	-1	1	←2
$C_j - Z_j$			3↑	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	
0	x_3	2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
5	x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	
3	x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$C_j - Z_j$			0	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	

所以，最优解为 $X^* = (2,6,2,0,0)^T$，$\max z = 3\times2+5\times6+2\times0=36$。

(2)将 t 代入(1)中得到最优表，继续求解，如表1－3所示。

表 1－3

C_j			$3+2t$	$5-t$	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	0	0	1	$\left[\frac{1}{3}\right]$	$-\frac{1}{3}$	6
$5-t$	x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
$3+2t$	x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-
C_j-Z_j			0	0	0	$\frac{7}{6}t-\frac{3}{2}\uparrow$	$-\frac{2}{3}t-1$	
0	x_4	6	0	0	3	1	-1	-
$5-t$	x_2	3	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\left[\frac{1}{2}\right]$	6
$3+2t$	x_1	4	1	0	1	0	0	-
C_j-Z_j			0	0	$\frac{9}{2}-\frac{7}{2}t$	0	$\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}$	
0	x_4	12	0	2	0	1	0	
0	x_5	6	0	2	-3	0	1	
$3+2t$	x_1	4	1	0	1	0	0	
C_j-Z_j			0	$5-t$	$-2t-3$	0	0	

当$\begin{cases}\frac{7}{6}t-\frac{3}{2}\leqslant 0\\ -\frac{2}{3}t-1\leqslant 0\\ t\geqslant 0\end{cases}$，即 $0\leqslant t\leqslant\frac{9}{7}$时，$X^*$不变，即：

$$X^*=(2,6,2,0,0)^T,\ \max z=(3+2t)\times 2+(5-t)\times 6=36-2t$$

若 t 增大，则$\frac{7}{6}t-\frac{3}{2}$将大于 0。

当$\begin{cases}\frac{9}{2}-\frac{7}{2}t\leqslant 0\\ \frac{1}{2}t-\frac{5}{2}\leqslant 0\\ t\geqslant 0\end{cases}$，即$\frac{9}{7}<t\leqslant 5$ 时，有：

$$x^*=(4,3,0,6,0)^T,\ \max z=(3+2t)\times 4+(5-t)\times 3=27+5t$$

若 t 再增大，则$\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}$将大于 0。

当$\begin{cases}5-t<0\\ -2t-3<0\\ t\geqslant 0\end{cases}$，即 $t>5$ 时，有：

$$x^* = (4,0,0,12,6)^T,\ \max z = (3+2t)\times 4 = 12+8t$$

【1－2】(上海交通大学 2004 年考研试题)对含参数线性规划问题(参数 $t\geqslant 0$)：

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 - t \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 6 + t \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(1)令 $t=0$ 用单纯形法求解。

(2)讨论 t 对最优解、最优值的影响(即给出 t 在不同取值范围内的最优解、最优值)。

解：(1)令 $t=0$，标准化为：

$$\max z = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_j \geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{cases}$$

采用单纯形法求解，如表 1－4 所示。

表 1－4

	C_j		1	3	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	6	1	1	1	0	6
0	x_4	6	-1	[2]	0	1	←3
	C_j-Z_j						
0	x_3	3	$\left[\frac{3}{2}\right]$	0	1	$-\frac{1}{2}$	←2
3	x_2	3	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	－
	C_j-Z_j		$\frac{5}{2}\uparrow$	0	0	$-\frac{3}{2}$	
1	x_1	2	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
3	x_2	4	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	C_j-Z_j		0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	

所以有：$X^* = (2,4,0,0)^T$，$\max z = 2+3\times 4 = 14$。

(2)$\Delta b' = B^{-1}\Delta b' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}$。

代入(1)中最优单纯形表，继续求解，如表 1－5 所示($t\geqslant 0$)。