中等专业学校适用

数学

第2册

基础数学

辽宁省中专数学教材编写组 编

机械工业出版社

中 等 专 业 学 校 适 用

数 学

第 2 册

基 础 数 学

辽宁省中专数学教材编写组　编

机 械 工 业 出 版 社

（京）新登字054号

本册为基础数学第2册，内容包括立体几何、解析几何 数列等内容，共五章。本书内容精炼，适合教学，并配备了大量的习题，有利于巩固学习的效果。

本书可作为中等专业学校的教学用书。

数　学

第2册

基 础 数 学

辽宁省中专数学教材编写组　编

*

责任编辑：韩雪清　　责任校对：贾立萍　肖　琳

封面设计：刘　代　　版式设计：冉晓华

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本787×1092 1/32·印张8 1/2·字数 185 千字

1992年7月北京第1版·1992年7月北京第1次印刷

印数 00,001—12,830·定价：3.95元

*

ISBN 7-111-03191-1/O·76

主编：陶增骈
副主编：张咸卓、李大发、由震云
编委：（按姓氏笔划为序）
于殿生、王化久、王福琛、马　骦
方桂梅、刘崇尧、由震云、刘晓东
李大发、李玉臣、李学之、李廷雄
朱学喜、张咸卓、孟繁杰、胡晋延
赵广春、陶增骈、贾景华、崔润泉
蔡恒利

前　言

本教材是以1991年国家教育委员会职业教育司审订的《工科中等专业学校数学教学大纲》为依据，根据中等专业学校数学教学内容要降低理论、加强应用、整体优化的原则，在辽宁省教育委员会的指导下，组织辽宁省部分中等专业学校长期从事中专数学教学的高级讲师、讲师进行编写的。在编写内容上注意了与现行初中数学教材的衔接；在保证基础知识的基础上，加强了基本应用；在推理论证的方式选择上，力求避繁就简、科学直观。为了适应当今科学技术发展的需要，在本书的附录里，增添了计算器使用的内容。

本教材分基础数学（第1、2、3册）和应用数学（第4册）两部分，招收初中毕业生的学校用1～4册，招收高中毕业生的学校用3～4册。

本册为基础数学第2册、包括立体几何、解析几何、数列等内容。参加本册编写的有：马骊、李学之、陈君彦、崔文海、贾景华。本册主编为辽宁省轻工业学校马骊、铁岭农机学校李学之，主审为渤海船舶工业学校邓崇尧。

由于时间仓促、水平所限，不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

辽宁省中专数学教材编写组

1992．3

目　　录

第十章　空间图形

在平面几何里，我们研究了一些平面图形的概念、画法、性质、计算和它们的应用。平面图形是由同一平面内的点和线所构成的图形。可是在日常生活和生产实践中，还会遇到所有点不完全在同一个平面内的几何图形，这种图形叫作**空间图形**(或**立体图形**)。例如，桌子、书、自行车等物体的几何形状都是空间图形。

空间图形是由空间的点、线和面所组成的图形，也可看成是空间的点集。以前学过的平面图形是空间图形的一部分。

本章将研究空间图形的概念、画法、性质、计算和它们的应用。

§10-1　平　　面

一、平面及其表示法

常见的桌面、黑板面、窗玻璃面、平静的水面等，都给我们以平面的形象，可是从它们抽象出的几何里的平面却是无边的，也就是说，几何里的平面是可以无限延展的，上述的各物体的面只是平面的一部分。

当我们从适当的位置观察桌面或黑板面时，感觉到它们都很象平行四边形。因此，在空间图形中，通常把一个平面画成平行四边形，并且用一个希腊字母α、β、γ、…写在平行四边形某一顶角的内部来表示。如图10-1a、b、c的平面α、β和γ。有时也用平行四边形的顶点的字母来表示一

个平面，如图10-1d的平面可以表示为平面$ABCD$或简写为平面AC(简写时要用对角的两个字母)。至于点和直线的表示法仍和平面几何一样，即用一个大写的拉丁字母A、B、C、…表示点；用一个小写的拉丁字母a、b、c、…或用两个大写的拉丁字母AB、CD、…来表示直线。

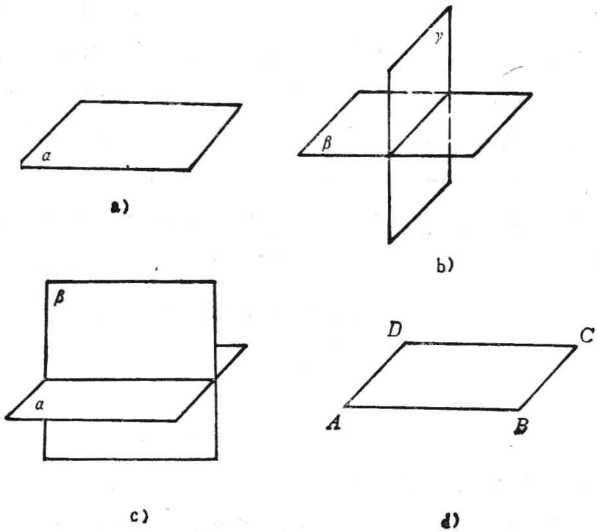

图 10-1

画一个水平放置的平面时，一般要把平行四边形的锐角画成45°，水平放置的横边的长度画成等于邻边的二倍，如图10-1d的平面AC就是按$\angle DAB=45°$，$AB=2AD$画成的。

画一个直立的平面时，可把平面画成矩形或平行四边形，并且一条竖边要画成与水平平面的横边垂直，如图10-1c的平面β或图b中的平面γ。

如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，那么被遮

住部分的线应画成虚线或不画，如图10-1b、c所示。

二、水平放置的平面图形的直观图的画法

将空间图形画在一个平面内，即用一个平面图形来表示空间图形，这样的平面图形不是空间图形的真实图形，但却有较强的立体感，我们把它叫作空间图形的直观图。图10-2就是正方体的直观图。

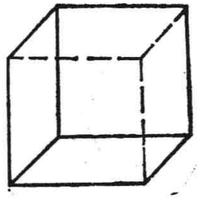

图 10-2

要画空间图形的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法。我们只介绍直观图的一种画法，这种画法的规则是：

（1）在已知图形中取互相垂直的Ox、Oy轴，画直观图时，把它们画成相应的$O'x'$、$O'y'$轴，使$\angle x'O'y'=45°$（或135°），它们所在的平面表示水平平面。

（2）在已知图形中平行于Ox或Oy轴的线段，在直观图中分别画成平行于$O'x'$或$O'y'$轴的线段。

（3）在已知图形中平行于Ox轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于Oy轴的线段，在直观图中长度画成原来的一半。

例1 画水平放置的正六边形的直观图。

画法 （1）在已知正六边形$ABCDEF$中，取对角线AD所在的直线为Ox轴，AD的垂直平分线GH为Oy轴。画对应的$O'x'$轴和$O'y'$轴，使$O'x'$轴水平放置，$\angle x'O'y'=45°$。

（2）以O'为中心，在$O'x'$轴上取$A'D'=AD$。在$O'y'$轴上以O'为中心，取$G'H'=\frac{1}{2}GH$。过G'、H'分别作$B'C'\parallel O'x'$，$E'F'\parallel O'x'$，并且依G'为中心，取$B'C'=BC$，

依H'为中心，取$E'F'=EF$。

（3）连结$A'B'$、$C'D'$、$D'E'$、$F'A'$所得六边形$A'B'C'D'E'F'$就是正六边形$ABCDEF$的直观图（如图10-3所示）。

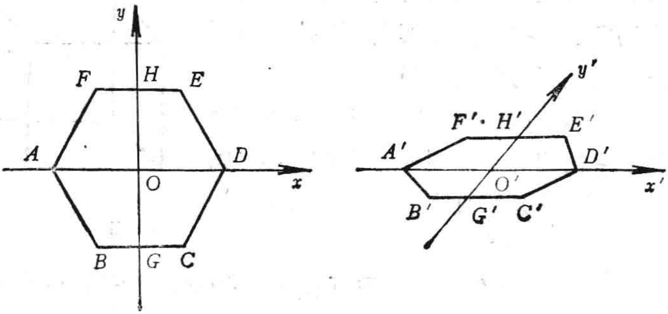

图 10·3

例2 画水平放置的三角形的直观图。

画法 （1）在已知$\triangle ABC$中取BC所在的直线为Ox轴，作$AO\perp BC$，AO所在的直线为Oy轴。画$O'x'$轴和$O'y'$轴，使$O'x'$轴水平放置，$\angle x'O'y'=45°$。

（2）在$O'y'$轴上取$O'A'=\frac{1}{2}OA$，在$O'x'$轴上取$O'B'=OB$，$O'C'=OC$。

（3）连结$A'B'$、$A'C'$，则$\triangle A'B'C'$就是$\triangle ABC$的直观图，如图10-4所示。

例3 画水平放置的圆的直观图。

画法 （1）如图10-5所示，画圆O的Ox轴和Oy轴，设Ox轴与圆O的交点为A、B。将AB八等分（可以n等分）。过各分点作Oy轴的平行线，分别与圆O相交得一组平行的弦。作$O'x'$轴和$O'y'$轴，使$\angle x'O'y'=45°$。

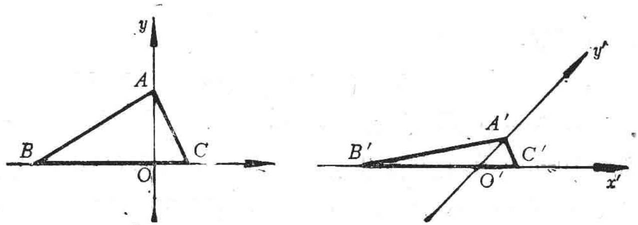

图 10-4

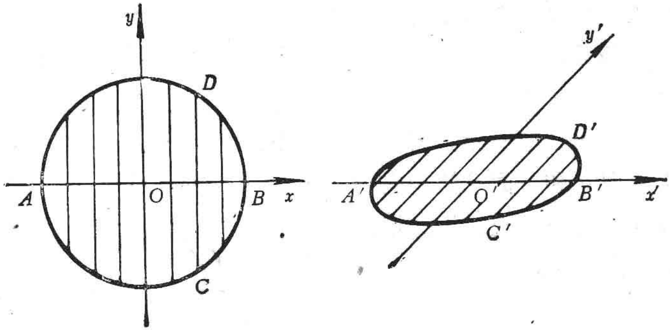

图 10-5

（2）以O'为中点在$O'x'$轴上取$A'B'=AB$，并且把$A'B'$八等分。过各分点作$O'y'$轴的平行线，再以$O'x'$轴上的各分点为中点，在各平行线上分别截取相对应的圆O的各弦原弦长的一半，如$C'D'=\frac{1}{2}CD$。

（3）顺次连结上述线段的端点所成的平滑曲线，就是圆O的直观图。

为了使直观图清楚，画图过程中所引的辅助线（包括$O'x'$轴和$O'y'$轴）在直观图画成后应当擦去。

三、平面的基本性质

我们把平面的三个基本性质当作公理，作为研究空间图

形的理论基础。

公理一 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内。

如图10-6所示，直线 l 上有 A、B 两个点均在平面 α 内，那么 l 上所有的点都在平面 α 内。这时我们说直线在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l。点 A 在直线 l 上记为 $A\in l$。点 A 在平面 α 内记为 $A\in\alpha$，A 不在平面 α 内记为 $A\notin\alpha$，直线 l 在平面 α 内记为 $l\subset\alpha$。

公理二 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线。

如图10-7所示，若平面 α 与平面 β 有一个公共点 A，那么平面 α 和平面 β 就相交于过 A 点的一条直线 l。记为 $\alpha\cap\beta=l$。

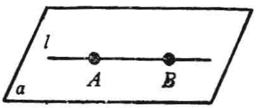

图 10-6

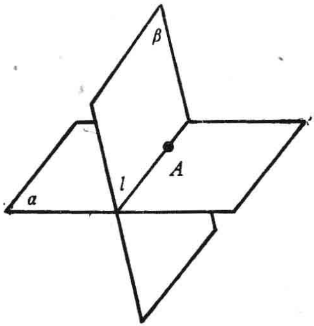

图 10-7

公理三 过不在同一直线上的任意三点，可以作一个平面，并且只可以作一个平面。

如图10-8所示，平面 α 是由不在同一直线上的三点 A、B、C 所作的平面。这里所说的“可以作一个平面”是指存在着一个平面，而“只可以作一个平面”

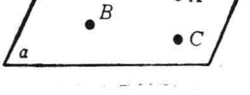

图 10-8

是指存在的平面只有一个。有时又用“确定一个平面”来代替“可以作一个平面，并且只可以作一个平面”。这个公理又可以说成：不在同一直线上的任意三点，可以确定一个平面。

我们常见的三脚凳和测量用的三脚架都是这个公理的应用。

推论一 过一条直线和这条直线外一点可以作一个平面，并且只可以作一个平面。

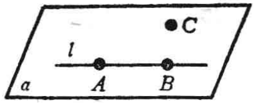

图 10-9

如图10-9所示，C是直线l外一点，在l上任意取两点A、B。根据公理三，过不在同一直线上的三点A、B、C可以作一个平面α。因为A、B两点都在平面α内，所以根据公理一可知直线l在平面α内，即经过直线l和线外一点C可以作一个平面α。

再证明唯一性，因为A、B在直线l上，所以经过直线l和点C的平面一定经过A、B、C。根据公理三，经过不在同一直线上的三点A、B、C只可以作一个平面，所以经过直线l和点C只可以作一个平面。因此过直线和直线外一点可以作一个平面，并且只可以作一个平面。

类似地可以推得下面的推论：

推论二 两条相交直线可以确定一个平面，如图10-10所示。

推论三 两条平行直线可以确定一个平面，如图10-11所示。

例4 证明：如果一条直线和两条平行直线相交，那么这三条直线共面（即在同一个平面内）。

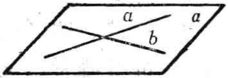

图 10-10

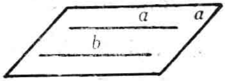

图 10-11

已知 m、n、l 为三条直线，并且 $m \parallel n$，$l \cap m = A$，$l \cap n = B$，如图10-12所示。

求证 m、n、l 共面。

证明 $\because$ $m \parallel n$

$\therefore m$ 和 n 可以确定一个平面 α

$\because A \in m$，$B \in n$

$\therefore A \in \alpha$，$B \in \alpha$

又 $\because$ $A \in l$ $B \in l$

$\therefore$ $l \subset$ 平面 α

因此，三直线 m、n、l 共面。

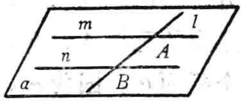

图 10-12

练 习

1. 画水平放置的正方形、正三角形的直观图（只画图，不写画法）。

2. 将书的一角接触桌面（书看成是一个平面），这时书所在的平面与桌面所在的平面有几个公共点？

3. 过一条直线可以作多少个平面？

4. 过一点可以作多少个平面？过二点可以作多少个平面？

习 题 10-1

1. 画水平放置的下列平面图形（见图10-13）的直观图（不写画法）：

（1）等腰梯形(图a) （2）四边形(图b) （3）正五边形(图c)

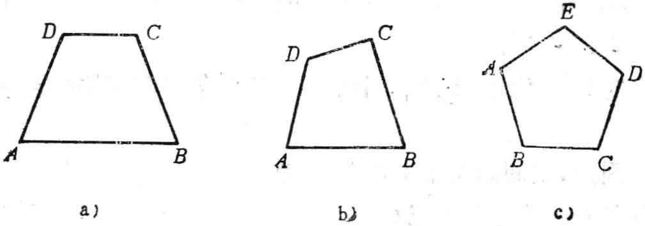

图 10-13

2．下面说法是否正确？为什么？

（1）任意三点确定一个平面。

（2）如果三条直线相交于一点，那么这三条直线必在一个平面内。

（3）如果一条线段在一个平面内，那么这条线段的延长线也在这个平面内。

（4）任意三角形必然是一个平面图形。

3．四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

4．过已知直线外一点和这直线上的三点分别作三条直线，证明这三条直线共面。

5．空间有四个点，它们中间的任何三点都不在一条直线上，这样的四个点能够确定多少个平面？

6．怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一个平面内？

§10-2　直线和直线的位置关系

一、两条直线的位置关系

我们知道，在同一平面内的两条不重合的直线的位置关系只有平行和相交两种。可是，在空间的两条不重合直线之间，还有另外一种位置关系。观察图10-14所表示的立方体，

线段AA_1和线段B_1C_1所在的直线不同在一个平面内，它们既不相交，又不平行。

定义 不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线。

因此，空间的两条不重合的直线的位置关系有以下三种：

（1）相交——在同一个平面内，只有一个公共点。

（2）平行——在同一个平面内，没有公共点。

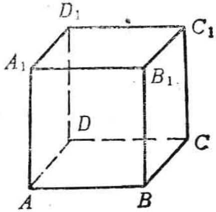

图 10-14

（3）异面——不同在任何一个平面内，没有公共点。

画异面直线时，要显示出它们不同在一个平面内的特点，要画成如图10-15中a、b、c所示的情形，要避免如图10-15中d、e所示的画法。

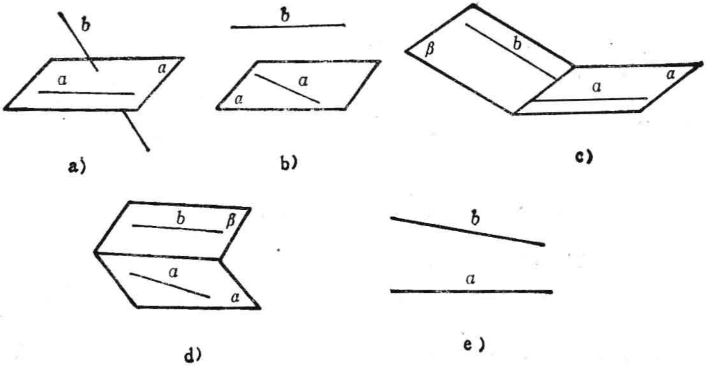

图 10-15