微积分辅导教程（第一册）

王海敏 金义明 主编

浙江工商大学出版社
Zhejiang Gongshang University Press

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导教程/王海敏，金义明主编. 一杭州：浙江工商大学出版社，2009.11
ISBN 978-7-81140-093-9

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①王…②金… Ⅲ. 微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 195135 号

微积分辅导教程

王海敏　金义明　主编

责任编辑	许　静
责任校对	张振华
封面设计	刘　韵
责任印制	汪　俊
出版发行	浙江工商大学出版社 (杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012) (Email：zjgsupress@163.com) (网址：http://www.zjgsupress.com) 电话：0571－0571－88904980,88831806(传真)
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州广育多莉印刷有限公司
开　　本	787×960　1/16
印　　张	16
字　　数	283 千字
版 印 次	2009 年 11 月第 1 版　2010 年 7 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81140-093-9
定　　价	25.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571－88804227

前　　言

微积分是高等院校文科(经管类)学生的重要基础课,是培养学生抽象概括能力、逻辑思维能力、运算能力和空间想象力的重要课程,能否学好这门课程,将直接影响后继课程的学习。由于其内容的高度抽象性与概括性、严密的逻辑性、独特的"数学语言"等,往往使学生望而生畏,成为学生进入大学后的第一只"拦路虎"。

为了帮助学生学好微积分,本书定位在使其成为学生学习微积分的"导学"。内容提要部分精要概括本章内容,包括基本概念、重要定理和公式,突出重点,既简洁又翔实。典型例题解析部分精选了各类典型例题,覆盖面广,有详细的分析和解答过程,并总结具有一般意义的解题方法,对开拓思路、提高解题能力大有裨益。部分例题综合性强,有些有一定的难度和深度,对考研复习有很好的参考价值。教材的每章复习题难度较大,复习题解答部分给出了每章的复习题的详细解答。书末附有教材练习的全部参考答案。另外还附有模拟试卷五套及试卷详解,可以检测知识的掌握程度,有效地提高学生的应试能力。

本书第一、二章及复习题一、二解答由丁正中编写;第三、四章及复习题五和模拟试卷(一)及解答由王海敏编写;第五章和模拟试卷(二)及解答由朱灵编写;教材习题答案与提示、复习题三、四解答和模拟试卷(三)及解答由金义明编写;模拟试卷(四)及解答由华就昆编写;模拟试卷(五)及解答由王波编写,本书最后由王海敏、金义明修改定稿。

本书可作为文科(经管类)大学生学习微积分课程的参考书。

由于时间紧迫,书中存在的疏漏与不妥之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编　者

于浙江工商大学

2009 年 9 月

内容简介

本书为配合《微积分新编教程》教材编写而成。全书共十章，每章由内容提要、概念析疑、典型例题解析三个部分组成，书末附有教材习题答案与提示、复习题解答以及模拟试卷及解答。

本书可作为各类高等院校文科（经管类）《微积分》配套用书，也可作为硕士研究生入学考前复习用书和自学考试有关人员的复习课本。

目录
Contents

第一章　函数

内容提要

1. 函数的概念及表示法

(1) 函数的定义

设有两个变量 x 与 y，如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时，变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

这时称 x 为自变量，y 是因变量，称 x 的取值范围 D 是函数 $f(x)$ 的定义域，y 的取值范围为函数 $f(x)$ 的值域.

一个函数是由它的定义域和对应法则所确定的，也就是说，若两个函数的定义域相同，在该定义域上的对应法则也相同，则这两个函数相等.

(2) 函数的表示法

常用的函数表示法有四种：解析法（公式法），列表法，图象法，文字叙述法. 如，函数 $y=[x]$ 的对应法则是"y 为不超过 x 的最大整数"，这就是一种文字叙述法，它比较简洁.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性

设 $y=f(x)$ 在某区间 I 内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的（或单调减少的）.

区间 I 内单调增加的函数的图象是在区间 I 内上升的曲线，区间 I 内单调减少的函数的图象是在区间 I 内下降的曲线.

值得注意的是，函数的单调性是相对于区间而言的. 一个函数可能在一个区间内单调，而在另外的区间内没有单调性；也可能在一个区间内单调增加，而在另外的区间内单调减少.

(2) 奇偶性

设 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 内有定义，如果对于 I 内任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

(3) 周期性

设 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有定义，若存在一个正的常数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，则称 $f(x)$ 是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

对于周期函数的图象，只需关心它在一个周期内的图象，其他区间的图象可由平移得到.

(4) 有界性

设 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果 $\exists M>0$，使得对于 $\forall x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

要注意的是，函数的有界性是一个与区间 I 相联系的概念.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 Z_φ，若 $Z_\varphi\subseteq D_f$，则对于 $\forall x\in D_\varphi$，有 $u=\varphi(x)$ 与 x 对应，而 $u\in Z_\varphi\subseteq D_f$，故又有确定的 y 与 u 对应，对任意 $\forall x\in D_\varphi$，都有确定的 y 与 x 对应，按照函数的定义，确定了 y 是 x 的函数. 此函数是通过中间变量 u 建立的 y 与 x 的对应关系，因而，称此函数为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$.

若 $u=\varphi(x)$ 的值域 Z_φ 只有部分含在 $f(u)$ 的定义域 D_f 内，此时仍能确定复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，只不过这时它的定义域也只是 D_φ 的一部分.

4. 反函数

设 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中的任意一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的 x 值，则此时按照函数的定义，也确定了 x 是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此也称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 要注意的是，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图象相同.

5. 基本初等函数和初等函数

(1) 基本初等函数

称以下六种函数为基本初等函数：

① 常值函数 $y=C$（C 为常数）.

② 幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）.

③ 指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

④ 对数函数 $y=\log_a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

⑤ 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

⑥ 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

（2）初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域不同的区间内，其对应法则 f 有着不同的初等函数表达式，则称此函数为分段函数.

概念析疑

问 1 函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是否相同？

答：不相同. 这是因为前一个函数定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，后一个函数定义域是 $(0,+\infty)$. 它们的定义域不相同，故函数也不相同.

问 2 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同？

答：不相同. 这是因为尽管这两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但函数对应规律不相同. 例如，对于自变量的某一个取值 $x=-1$，$f(-1)=-1\neq g(-1)=1$.

问 3 在说明 $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是相同函数时，下面的理由是否充分："因为这两个函数的定义域均是 $(-\infty,+\infty)$，它们的值域均是 $[0,+\infty)$，故它们是相同的函数".

答：这样的说理不充分，严格说是不正确的. 正确的解释如下："因为这两个函数的定义域均是 $(-\infty,+\infty)$；对于定义域中任意的取值 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|x|=\sqrt{x^2}$，即这两个函数的对应规律也是相同的，所以它们是相同的函数.

仅以两个函数的定义域与值域均相同为理由来说明某两个函数是相同函数，这种说法的不正确性可从以下反例看出：$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域与值域均相同，但它们不是相同的函数.

问 4 正切函数是否是单调递增函数？

答：它不是单调递增函数.因为如取 $x_1=\frac{\pi}{4}$ 和 $x_2=\frac{3\pi}{4}$，则就有 $x_1<x_2$，但却有 $\tan x_1=1>\tan x_2=-1$，这充分说明 $y=\tan x$ 不是单调递增函数.

值得注意的是，$y=\tan x$ 在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 上却是单调递增的（k 为任意取定的整数）.这个结论与前面结论并不矛盾，因为此时所讨论的函数是“$y=\tan x$ 在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 上的限制”，它与 $y=\tan x$ 是不相同的函数（定义域不同），故它们的单调性不一样是不足为怪的.

问 5 如何说明 $f(x)=2^x$ 既非奇函数，又非偶函数？

答：在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中取出 $x_0=1$ 与 $-x_0=-1$，因为 $f(1)=2$，$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$，即 $f(1)\neq f(-1)$，故 $f(x)=2^x$ 不是偶函数；又因为 $f(1)\neq -f(-1)$，故 $f(x)=2^x$ 也不是奇函数.

问 6 既是奇函数，又是偶函数的函数是否存在？

答：存在的.例如常值函数 $y=0$，又例如 $f(x)=\sqrt{4-x^2}\ \sqrt{x^2-4}$.

后一函数既是奇函数，又是偶函数的理由如下：因为此时定义域 $D(f)=\{-2,2\}$，是关于原点对称的，并且对任意自变量取值 $x\in D(f)$（其实只有两种可能取值 $x_1=-2$ 和 $x_2=2$），总有 $f(-x)=0=f(x)$，故该函数是偶函数.另一方面，还总有 $-f(-x)=0=f(x)$，故该函数也是奇函数.

问 7 下列说法是否正确：“因为 $y=2^x$ 是单调递增函数，所以这个函数是无界的”？

答：这样说理不正确.因为单调递增函数未必是无界的.例如 $y=\arctan x$ 是单调递增的，然而它是有界的.

上述问题的正确说法如下：不论指定正数 M 为多大，取 $x_0=\log_2(M+1)\in D(f)=(-\infty,+\infty)$，这时 $|f(x_0)|=2^{x_0}=2^{\log_2(M+1)}=M+1>M$，故函数 $f(x)=2^x$ 是无界的.

问 8 如果函数 $y=f(x),x\in X_1$ 与 $y=g(x),x\in X_2$ 可以复合，那么所得的复合函数 $y=g(f(x))$ 的定义域是否是内层函数的定义域 $D(f)=X_1$？

答：是的.有的人认为未必如此，并且企图以复合函数 $y=\lg(3x-6)$ 的定义域 $(2,+\infty)$ 与内层函数 $y=3x-6$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 不同为例来说明之.这种错误的产生原因是忽视了讨论这个问题的前提是“可以复合”这四个字.他所列举的所谓“反例”中，$y=3x-6,x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $y=\lg x,x\in(0,+\infty)$ 是不能复合的.其实 $y=\lg(3x-6)$ 是 $y=3x-6,x\in(2,+\infty)$，与 $y=$

$\lg x, x \in (0, +\infty)$ 的复合函数，这正好说明我们的结论是正确的.

问 9　有的参考书上说：函数“$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 不是初等函数，因为它不是由一个式子表示而是由两个式子表示的”. 这种解释法对吗?

答：尽管结论是正确的，但此种解释不对. 诚然，一个初等函数的函数关系总是可用一个解析式来表示的，因此，无法用一个解析式表示函数关系的函数决不是初等函数. 但是“此函数的函数关系现在不是由一个式子表示的”与“此函数的函数关系一定不能由一个式子表示”这两句话的含义是不同的. 这个例子中的函数为什么一定不能用一个解析式来表示的理由并没有被阐明. 函数用两个解析式来分段表示可以改用一个解析式来表示的例子是不胜枚举的. 例如：$F(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}=\sqrt{x^2}$.

事实上，本例中的函数 $f(x)$ 确实不是初等函数. 读者用下一章的函数连续性以及有关初等函数的一个重要结论：“初等函数必定是连续函数”（现在函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续）便可得到正确的解释.

问 10　一次函数 $y=kx+b$（k,b 为非零常数）是否是基本初等函数?

答：尽管这个函数是初等数学教科书中最早介绍的一个很基本的函数，但根据“基本初等函数”的定义，它不是一个基本初等函数. 事实上，它是基本初等函数 $y=k, y=x$ 和 $y=b$ 经过一次乘法和一次加法运算而产生的一个初等函数.

问 11　(1) 任何严格单调的函数必有反函数吗?(2) 若函数 $y=f(x)$ 有反函数，那么它一定严格单调吗?

答：(1) 此断言正确. 因为此时显然对于不同的自变量，相应的因变量 y 的值必不同，故反函数必定存在.

(2) 此断言不正确. 反例如下：

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

这个函数有反函数：

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases},$$

然而 $y=f(x)$ 既非单调递增函数（因有 $f(0)>f(1)$），又非单调递减函数 $\left(\text{因有 } f(-1)>f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$（建议读者画出函数图象后进行观察）.

问 12　函数 $y=x^x, x\in(0,+\infty)$ 是指数函数还是幂函数?它是不是基本初等函数?是不是初等函数?

答: $y=x^x, x\in(0,+\infty)$ 既非指数函数又非幂函数,通常我们称它为"幂指函数".它不是基本初等函数(因为它不是幂函数,也不是指数函数,更不是其他四种基本函数之一),但它是一个初等函数,因为

$$y=x^x=2^{\log_2(x^x)}=2^{x\cdot\log_2 x},$$

这表明它是基本初等函数 $y=x$ 与 $y=\log_2 x$ 的乘积,再与基本初等函数 $y=2^x$ 的复合结果,故它是一个初等函数.

问 13 若 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义,且在任一有限区间上都有界,则 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必定有界吗?

答: 此断言不正确.例如 $y=x$ 在任一有限区间 (a,b) 上是有界的,这是因为:若取 $M=\max(|a|,|b|)$,则对任意 $x\in(a,b)$ 有:$a<x<b$,从而 $|x|\leqslant\max(|a|,|b|)=M$,即 $y=x$ 在 (a,b) 上有界.但 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界的.这是因为不管 $M>0$ 有多大,总有 $x_0=M+1\in(-\infty,+\infty)$,此时 $|y|=|f(x_0)|=|x_0|=M+1>M$,即 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

问 14 有人说 $y=\tan x$ 是周期函数,它又是递增函数.此话正确吗?

答: 此话不正确.任何一个函数,如若是周期函数,则必不能是递增函数.这两个性质,对于一个函数是不能兼有的.事实上 $y=\tan x$ 是周期函数,但不是递增函数.我们可以说"$y=\tan x$ 在任何一个确定区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 上(k 为任意确定的一个整数)是递增函数",不过此话与上面的"$\tan x$ 是递增函数"已是两个概念了.我们说到的函数,从本质上讲,是两个函数.一个是"$y=\tan x$",另一个是"$y=\tan x$ 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 上的限制"(k 为任意然而是固定的整数),这两个函数的定义域是不同的,故不是相同的函数.

问 15 如果函数 $y=f(x)$ 的定义域可以分成若干不相交的区间,在每一个这样的区间上,$f(x)$ 都是递增的,则能否说 $y=f(x)$ 在其定义域上是递增的?

答: 此话不正确.读者自己考虑一下函数 $y=\tan x$ 这一反例即可自明.

问 16 如果函数 $y=f(x)$ 的定义域可以分成有限个区间,在每个这样的区间上,$f(x)$ 都是有界的,则能否说 $y=f(x)$ 在其定义域上是有界的?

答: 这时 $y=f(x)$ 必定是有界的.不妨设定义域 $D(f)$ 分成两个区间:$D(f)=A\cup B$,A 与 B 均为区间,$y=f(x)$ 在 A 上以及在 B 上均有界.根据函数有界定义,必定存在正数 M_A 及 M_B,使得

$$|f(x)|\leqslant M_A,\quad 对于任意 x\in A 成立;$$

$$|f(x)|\leqslant M_B,\quad 对于任意 x\in B 成立.$$

取 $M = \max(M_A, M_B)$，则不论 x 如何取法，只要 $x \in D(f)$，就必定有 $|f(x)| \leqslant M_A$，或 $|f(x)| \leqslant M_B$. 总之，就有 $|f(x)| \leqslant M$，这表明 $y = f(x)$ 在其定义域上有界.

注：如果将问题中的“有限个”改成“无限个”，则即便在每个部分区间上函数均有界，亦不能说函数在其定义域上有界，例如此时可考察函数 $y = 2x$，$x \in (-\infty, +\infty)$，它是无界的，然后它在每一个部分区间 $[k, k+1)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上均是有界的.

问 17　“周期函数一定没有反函数”，此话正确吗？

答：此话正确. 一个函数若有反函数存在，即该函数可以进行“反函数运算”，其先决条件是：不同的自变量之值，相应唯一确定的函数值亦必不相同. 但对一个周期函数而言，必存在一个正数 a，使对定义域中自变量的任意取值 x，都有 $f(a+x) = f(x)$，即两个不相等的自变量取值 x 与 $x+a$，相应的函数值相等了. 这说明一个周期函数没有反函数存在.

问 18　“正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数是反正弦函数 $y = \arcsin x$”；“余弦函数 $y = \cos x$ 的反函数是反余弦函数 $y = \arccos x$”；“正切函数 $y = \tan x$ 的反函数是反正切函数 $y = \arctan x$”；“余切函数 $y = \cot x$ 的反函数是反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$”. 这些话正确吗？

答：这些话均不正确. 问 17 中已把理由阐明了. 实际上，这些话应改成如下说法，或者说，说话者想说的确切含义是如下说法：

“正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的限制的反函数是 $y = \arcsin x$”；“余弦函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的限制的反函数是 $y = \arccos x$”；“正切函数 $y = \tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的限制的反函数是 $y = \arctan x$”；“余切函数 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上的限制的反函数是 $y = \operatorname{arccot} x$”.

问 19　为什么要取正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的限制，而不是在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，$\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right]$ 上或别的什么单调区间上的限制，从而规定它的反函数为反正弦函数 $y = \arcsin x$？（注意这些区间上限制的反函数均是存在的，但他们均不能称为反正弦函数.）

答：我们已经知道由于周期性，正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数是不存在的，但 $y = \sin x$ 在某些单调区间上的限制，可以考虑并研究它们的反函数. 这些反函数中，我们要命名一个最基本，最有代表性的为反正弦函数并记之为 $y = \arcsin x$. 它应该是 $y = \sin x$ 的某个区间上限制的反函数，这里“某个区间”的选取原

则是：

(1) 应是单调区间，以保证反函数的存在；(2) 区间长度尽可能的大，以保证有代表性；(3) 最靠近原点，以保证基本性. 根据这三点考虑，研究一下正弦函数的图象，这“某个区间”自然就只有一个选择结果：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 将 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的限制的反函数称为“反正弦函数 $y=\arcsin x$”，它确实具有代表性. 例如“$y=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的限制的反函数”(它是存在的)，只不过“$y=\arcsin x$ 在 $[0,1]$ 上的限制”，又如“$y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ 上限制的反函数”(它亦存在)，可以表示为 $y=\pi-\arcsin x$. 所以 $y=\sin x$ 在其他单调区间上限制的反函数，类似地借用 $y=\arcsin x$ 符号，也都可以有一个“明确”的解析表示式，这里就不再一一阐述了.

明白了上面的道理，读者不难推而广之地理解其他三个反三角函数成员命名时取各自不同限制区间的理由，即称：“$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上限制的反函数”为反余弦函数 $y=\arccos x$；“$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上限制的反函数”为反正切函数 $y=\arctan x$；“$y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上限制的反函数”为反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$. 这里仍是相同的三条选取区间原则，但由于函数不同，导致最终在不同的区间上进行限制而后取其反函数.

问 20　根据函数 $f(x)$ 与它的反函数 $f^{-1}(x)$(假定存在) 的关系有下面两个恒等式：$f(f^{-1}(x))=x,\forall x\in D(f^{-1})$ 和 $f^{-1}(f(x))=x,\forall x\in D(f)$. 于是

$$\sin(\arcsin x)=x,x\in D(\arcsin x)=[-1,1],$$

但为什么下面等式却不一定成立：

$$\arcsin(\sin x)=x,x\in D(\sin x)=(-\infty,+\infty)?$$

答：函数 $y=\sin(\arcsin x)$ 可视为函数 $f(x)=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 与函数 $f^{-1}(x)=\arcsin x,x\in[-1,1]$ 的复合，复合函数的外层函数是 $f(x)=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，内层函数是 $f^{-1}(x)=\arcsin x,x\in[-1,1]$(注意：$f(x)=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数存在且根据规定确为 $f^{-1}(x)=\arcsin x,x\in[-1,1]$) 由此根据问题中的第一个恒等式：

$$f^{-1}(f(x))=x,\ \forall x\in D(f^{-1}),$$

自然应有 $\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1,1]$.

但函数 $y = \arcsin(\sin x) = x, x \in (-\infty, +\infty)$ 是函数 $y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$ 与 $y = \arcsin x, x \in [-1,1]$ 的复合(内层为 $y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$,外层为 $y = \arcsin x$, $x \in [-1,1]$),这里内层函数如视为 $y = f(x)$,则 $f^{-1}(x)$ 是不存在的!更无从谈起 $f^{-1}(x) = \arcsin x$ 而去利用问题中第二个恒等式 $f^{-1}(x) = x, x \in D(f)$ 这个一般性的结论了.

当然,如若将"$\arcsin(\sin x) = x, x \in (-\infty, +\infty)$",改成"$\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$",则就可以利用第二个恒等式(取 $f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,从而 $f^{-1}(x) = \arcsin x, x \in [-1,1]$)的结论来说明改动后式子的正确性.

类似的理由可解释以下三个等式是不正确的:

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\arctan(\tan x) = x, \quad x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arccot}(\cot x) = x, \quad x \in (k\pi, k\pi + \pi).$$

但以下三个等式是正确的:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in (-1,1),$$

$$\tan(\tan x) = x, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cot(\operatorname{arccot} x) = x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

典型例题解析

例 1　函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$,若 $f(1) = -5$,求 $f(f(5))$.

解　$$f(f(5)) = f(f(3+2)) = f\left(\frac{1}{f(3)}\right) = f\left(\frac{1}{f(1+2)}\right)$$

$$= f(f(1)) = f(-5) = \frac{1}{f(-5+2)} = \frac{1}{f(-3)}$$

$$= f(-3+2) = f(-1) = \frac{1}{f(-1+2)} = \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{5}.$$

例 2　若 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 2x-2, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$,求:(1) $f(2x+1)$;(2) $f(f(x))$.

解　(1) $f(2x+1)=\begin{cases}0, & 0\leqslant 2x+1<1\\ \dfrac{1}{2}, & 2x+1=1\\ 2(2x+1)-2, & 1<2x+1\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}0, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ 4x, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}.$

(2) $f(f(x))=\begin{cases}0, & 0\leqslant f(x)<1\\ \dfrac{1}{2}, & f(x)=1\\ 2f(x)-2, & 1<f(x)\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{3}{2}\\ 2(2x-2)-2, & \dfrac{3}{2}<x\leqslant 2\end{cases}$

$$=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{3}{2}.\\ 4x-6, & \dfrac{3}{2}<x\leqslant 2\end{cases}$$

例 3　已知函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D(f)=\left(-2,\dfrac{1}{2}\right]$,试求:(1) $f(x^2-2x)$ 的定义域 D_1;(2) $f(\cos x)$ 的定义域 D_2.

解　(1) 根据复合函数的概念,D_1 是所有使 $x^2-2x\in\left(-2,\dfrac{1}{2}\right]$的 x 取值全体,解得 $D_1=\left[1-\sqrt{\dfrac{3}{2}},1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right]$.

(2) 由

$$\begin{cases}\cos x>-2\\ \cos x\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\infty<x<+\infty\\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{3},\end{cases}$$

得 $D_2=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right]$.

例 4　设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求下列函数定义域:(1) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;　(2) $f(cx)(c\neq 0)$;　(3) $f(f(x))$.

解　(1) 由$\begin{cases}x\neq 0\\ \dfrac{1}{x}\neq -1\end{cases}$得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的定义域:$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 由 $cx\neq -1$ 知 $f(cx)$ 的定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{c},+\infty\right)$.

(3) 由$\begin{cases}x\neq -1\\ f(x)\neq -1\end{cases}$ 即$\begin{cases}x\neq -1\\ \dfrac{1}{1+x}\neq -1\end{cases}$ 得 $f(f(x))$ 的定义域为所有 $x\neq -1$ 且 $x\neq -2$ 的实数.

例 5　设 $y=f(x)=\begin{cases}x+1, & |x|<1\\ x^2, & 1<|x|<2\end{cases}$, $y=g(x)$ 的定义域为某个开区间,若已知 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 可以复合成函数 $y=g(f(x))$,求复合函数的定义域 $D(g(f))$.

解　因为 f 与 g 可以复合,故 $y=g(f(x))$ 的定义域即为 $y=f(x)$ 的定义域. 根据 $y=f(x)$ 的分段解析表达式易知:

$$\begin{aligned}D(g(f))&=D(f)=\{x\mid |x|<1\}\cup\{x\mid 1<|x|<2\}\\&=(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2).\end{aligned}$$

例 6　设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+a\cdot 4^x}{3}$,如果当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$f(x)$ 有意义,求实数 a 的取值范围.

解　由已知,不等式 $1+2^x+a\cdot 4^x>0$ 在$(-\infty,1)$上恒成立.

令 $t=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$,则 $t>\dfrac{1}{2}$, $t^2+t+a>0$,即不等式 $t^2+t+a>0$ 在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立,但二次三项式 $g(t)=t^2+t+a$ 在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上递增,故当且仅当$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}+a>0$ 时,上述结论成立,由此得 $a>-\dfrac{3}{4}$.

例 7　判断下列函数是否有界,并根据定义详细说明你的理由:

(1) $y=2^{\frac{1}{x}}$;　　　　(2) $y=-\dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$.

解　(1) 无界.

对于任意给定的正数 $M>1$,取 $x_0=\dfrac{1}{\log_2(M+1)}$,就有

$$|y(x_0)|=2^{\frac{1}{x_0}}=M+1>M,$$

根据定义,$y=2^{\frac{1}{x}}$ 无界.

(2) 有界.

取 $M=5$,则对于 $\forall x\in\mathbf{R}$,都成立

$$\left|-\frac{1+3x^2}{1+x^2}\right|=\left|3-\frac{2}{1+x^2}\right|\leqslant 3+\frac{2}{1+x^2}\leqslant 3+2=M,$$

根据定义，$y=-\dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$ 有界.

例 8 设函数 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1\\ \log_a x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是递减函数，求正数 a 的最大取值范围.

解 根据已知条件，应有 $\begin{cases}3a-1<0\\ 0<a<1\\ (3a-1)\cdot 1+4a\geqslant \log_a 1\end{cases}$，即 $\begin{cases}a<\dfrac{1}{3}\\ 0<a<1\\ a\geqslant \dfrac{1}{7}\end{cases}$. 所以正数 a 的最大取值范围是 $\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3}\right)$.

例 9 设函数 $f(x)=|x-a|$，$g(x)=x^2+2ax+1(a>0)$，且 $f(0)=g(0)$，(1) 求常数 a；(2) 求 $f(x)+g(x)$ 的单调递减区间.

解 (1) 由 $f(0)=g(0)$，同时注意到 $a>0$，得 $a=1$.

(2) $f(x)+g(x)=|x-1|+x^2+2x+1=\begin{cases}x^2+x+2, & x\leqslant 1\\ x^2+3x, & x>1\end{cases}$，

由于 $y=x^2+x+2$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递增；$y=x^2+3x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)+g(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$.

例 10 利用反正弦函数的概念，写出递减函数 $y=\sin x$，$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的反函数.

解 因为 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$，而 $-\dfrac{\pi}{2}<\pi-x<\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\pi-x=\arcsin y，即\ x=\pi-\arcsin y，$$

故 $y=\sin x$，$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的反函数是 $y=\pi-\arcsin x$.

例 11 说明函数 $y=f(x)=\begin{cases}1-\arctan x, & 0<x<1\\ \arccos x, & -1<x\leqslant 0\end{cases}$ 具有反函数，并求出反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的解析表达式.

解 因为 $y=1-\arctan x$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，$y=\arccos x$ 在区间 $(-1,0]$ 上也单调递减，且 $1-\arctan 0=1<\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$，所以，函数