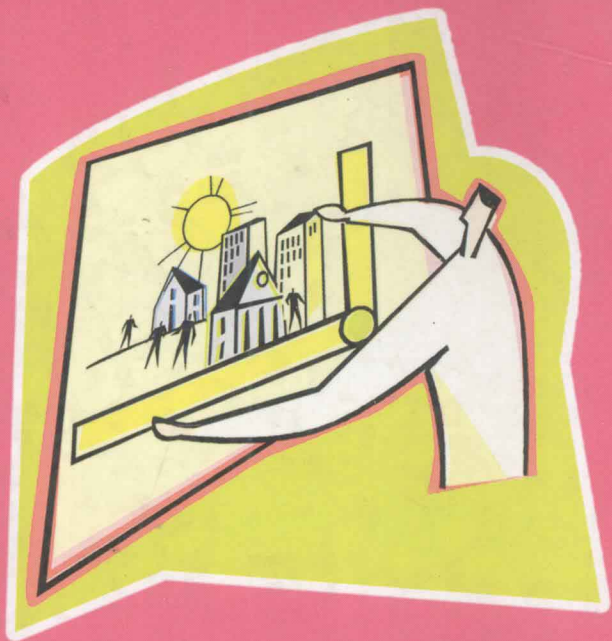


高一 模块教材

高中新课标



数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：马永培 倪复丽

不等式的证明 与解不等式

中国大百科全书出版社

不等式的证明与解不等式

《新课标数学模块教材》丛书编委会

总主编:毛文凤 博士

执行主编:李君华 教授

执行副主编:肖柏荣(江苏教育学院数学系教授,江苏省中学数学教学专业委员会副理事长)

袁 桐(扬州新东方中学数学特级教师,江苏省名教师)

周敏泽(常州高级中学数学特级教师,全国模范教师)

徐沥泉(无锡市教学研究中心数学特级教师,全国数学学科方法论研究中心常务副主任兼秘书长)

丛书编委:李君华 肖柏荣 袁 桐 周敏泽 徐沥泉
刘云章 马永培 朱平天 杨润生 葛福生
周冠廷 孙志人 刘国祥 何继刚 卫 岗
蔡伟元 周公贤 刘威伯 顾曼生 管义桂
顾继玲 方彩云 张新华 陈小红 徐德同

本册编著:马永培(南京师范大学数科院教授)

倪复丽(南京工程学院基础部数学副教授)

总编辑:徐惟诚 社 长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

不等式的证明与解不等式/毛文凤主编.-北京:中国
大百科全书出版社,2005

新课标高中数学模块教材

ISBN 7-5000-7215-5

I.不... II.毛... III.数学课—高中—教学参考资料
IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142231 号

策划设计:可一图书 (<http://www.keyibook.com>)

责任编辑:蒲晖

新课标高中数学模块教材
不等式的证明与解不等式

* * *

中国大百科全书出版社出版

全国新华书店经销

<http://www.ceph.com.cn>

北京阜成门北大街 17 号 邮编:100037 电话:010-88390797

山东省沂源县教育印刷厂

* * *

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷

890×1240 毫米 32 开本 10 印张 200 千字

ISBN 7-5000-7215-5/G·813

定 价:14.00 元

序

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵,已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中,编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书,从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学,应注重概念清晰、计算正确、论证有据;数学作为一种文化,应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的,是符合新课标理念的。当然,归根结底,针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的,在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合:适度的形式化与启发兴趣形式相结合,发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合,掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前 言

在生产实践和科学实验中,我们常常会遇到大量的不等式问题。不等式知识的学习,在人们数学思维的训练中是不可缺少的。正因为如此,不等式知识是中学教学的主要内容之一,也是高考和数学竞赛的重要内容之一。本书对中学生应掌握的不等式知识进行了系统的分类总结,并适当提高,这样不仅有助于中学生进一步掌握好不等式知识,也有助于提高学生的数学思维能力和应用能力,并掌握一定的解题技巧。

全书有“认识不等式”、“证明不等式”、“解不等式”、“应用不等式”四章。知识内容注重比较系统的阐述,并力求对学生数学修养的提高有所帮助。例题注重数学思维方法的分析启发和解法的总结,指出解题中容易出现思维误区,并努力培养读者举一反三的能力。解题尽可能做到简捷、易懂和方法多种。

本书重视知识的联系、渗透和结合。如不等式知识和其他代数知识内容的联系和渗透,不等式和几何知识的联系和渗透,不等式和导数的联系和渗透,这有助于读者更深入地掌握有关的数学知识,提高自己的综合分析能力。

本书在每章的开头列举了日常生活中,自然界中应用不等式的典型有趣的例子,在第四章中专列了不等式知识在实际中的应用一节,让读者在阅读中领略到了不等式的广泛应用,提高了读者的学习兴趣和用数学解决实际问题的能力。

本书适合作为高中师生的课外参考读物,也可供自学者使用。

由于编者水平所限,难免会有不当或错误之处,敬请批评指正。

编者

目 录

第一章 认识不等式

你身边的不等式	(1)
§ 1 两类基本问题	(3)
§ 2 不等式的基本性质	(5)
§ 3 导数与不等式	(13)
§ 4 著名不等式	(22)
总习题一(1)	(56)
总习题一(2)	(58)

第二章 证明不等式

洗衣服与平均值不等式	(61)
§ 1 比较法与放缩法	(64)
§ 2 综合法与分析法	(79)
§ 3 反证法与数学归纳法	(95)
§ 4 换元法	(107)
§ 5 构造法	(118)
总习题二(1)	(131)
总习题二(2)	(132)

第三章 解不等式

祖冲之的“密率”、“约率”与解不等式	(133)
§ 1 一元不等式的解法	(138)
§ 2 含有参量的一元不等式的解法	(160)
§ 3 含有绝对值的一元不等式的解法	(175)
总习题三(1)	(188)
总习题三(2)	(190)

第四章 应用不等式

蜂房与几何不等式	(193)
§ 1 在函数与方程讨论中的应用	(196)
§ 2 证明几何不等式中的应用	(222)
§ 3 生产、科研实际中的应用	(235)
总习题四(1)	(246)
总习题四(2)	(247)
综合练习一	(249)
综合练习二	(252)
综合练习三	(254)
参考答案	(257)

第一章 认识不等式

你身边的不等式

你可能对相等感兴趣. 从小学算术开始, 算的就是等于多少. 但事实上, 你所接触的更多的是不等. 很小的孩子就知道苹果要大的, 几个孩子在一起就要比较个头和体重的大小, 而这其中相等的可能性几乎不存在. 小至日常生活的琐事, 大到天文地理的计算, 同一性质的两个量相比较时, 相等的可能性远远低于不相等的可能性. 日常生活与生产实践中所讲的相等, 从严格意义上说绝大部分也是不等的, 或者说只是近似意义下的相等, 而且有时也不需要精确地相等. 比如你在登记表上填写年龄是 20 岁, 而不需要写上 20 岁又 3 个月 19 小时 18 分钟. 从另一方面说, 填写 20 岁包含了一个不等式, 那就是你的年龄 a 满足不等式 $0 \leq a - 20 < 1$. 同样, 说一袋大米重 50 斤, 意味着这袋米的重量 g 满足不等式 $-0.1 < 50 - g < 0.1$. 可以这么说, 在日常生活中, 讲某个量是多少, 严格说来, 很多情况是意味着这个量满足一个不等式. 当然, 并不都是这样的, 比如说有 3 个人, 这是严格意义的 3. 在数学中也常会出现这种看似相等实是一个不等式的情况, 如经常记 $\pi = 3.1416$ 其实表明 $3.14155 \leq \pi < 3.14165$.

不少人喜欢等式及其运算, 不喜欢不等式及其运算, 这不仅是因

为不等式的运算更麻烦,而且是因为觉得只有写成等式才算找到了答案,问题才算弄清楚,而不等式总像有点含含糊糊.这种认识是片面的,不切实际的.事实上,在生产实践和科学实验中所出现的量之间的关系并不单是用等式所能表达的,大量的的是要用不等式表达的.在数学中,这些量之间的关系的研究往往被归结为不等式问题的研究.不等式的研究是现实的需要,是数学研究中的重要内容之一.作为工具,不等式在数学的各个领域中起着重要的作用,在某些分支中更是起着关键的作用.不等式理论一直都在不断地发展和丰富,许多著名的数学家在不等式理论上有着深入的研究,建立了许多著名的经典不等式.有些重要的不等式就是以数学家的名字命名的.

不等式是中学数学的重点内容之一,考查学生对不等式理论熟练掌握的程度也是衡量学生数学水平的重要方面.同时,不等式也是高等数学的基础和工具.因此,在每年的数学高考试卷中,不等式以及与其相关的命题占有相当的比例,在各级数学竞赛中,不等式也是不可缺少的热门课题.

本书讨论的是初等不等式,其主要内容有证明不等式、解不等式和应用不等式三部分,证明不等式的学习在于提高学生分析与综合思维能力,解不等式的学习在于提高学生等价转化和分类讨论的思维能力,应用不等式的学习在于提高学生分析和解决实际问题的能力.本书对中学数学中的相关内容起着总结和适当提高补充的作用,以帮助学生进一步掌握不等式的知识、思维方法和解题技巧,为学生考好高考,参加数学竞赛创造条件,也为学生将来学好大学数学或参加工程建设,研究工程问题打下基础.

§ 1 两类基本问题

在不等式中要解决的问题基本上分两类,看下面的例子.

例 1 要火车能安全行驶,按规定,铁道的转弯处的圆弧半径不允许小于 600 米,如果某段圆弧铁路两端相距 156 米,弧所对的圆心角小于 180° (见图 1-1-1). 试确定圆弧弓形的高所允许的取值范围.

如图,设圆弧弓形高 $CD = x$, 半径为 R , 则

$$OC = R - x, AC = \frac{1}{2}AB = \frac{156}{2} = 78.$$

在直角三角形 ACO 中: $(R - x)^2 + 78^2 = R^2$

$$\text{解得 } \frac{x^2 + 6084}{2x} = R$$

根据题设, $R \geq 600$, 因此有 $\frac{x^2 + 6084}{2x} \geq 600$

于是问题归结为求满足不等式 $\frac{x^2 + 6084}{2x} \geq 600$ 的 x .

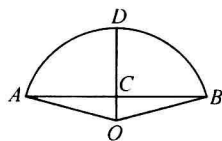


图 1-1-1

例 2 设 a, b, c 为三角形三条边的长,证明: $3(bc + ca + ab) \leq (a + b + c)^2 < 4(bc + ca + ab)$.

例 1 中的问题是求适合不等式(有时是由几个不等式组成的不等式组)的 x 的值,这一类问题称为解不等式(组). 其中字母 x 称为未知数,使不等式(组)成立的未知数组成的集合称为不等式(组)的解集,简称为不等式(组)的解. 在一般情况下,不等式(组)的解与方程的解有所不同,不等式的解往往是个无穷集合,当然也可能是个有限集甚

至是空集.

例 2 中的问题是要证明在字母满足一定的条件后,所给的不等式恒成立.本例中就是要证明,当 a 、 b 、 c 为同一个三角形的三边长的条件下,亦即在 $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$ 的条件下,不等式 $3(bc+ca+ab) \leq (a+b+c)^2 < 4(bc+ca+ab)$ 恒成立.这类问题称为不等式的证明问题.证明不等式就是要证明给定的不等式,对于式中的字母在确定的条件下恒能成立.

当然,两类基本问题也不是固定不变的,有时会互相转化.

下面的两章将分别对两类问题进行研究.本章为这两类问题的研究作些基本知识的准备.

§ 2 不等式的基本性质

本书用 \mathbf{R} 表示实数集, \mathbf{R}^+ 表示正实数集, \mathbf{N} 表示自然数集, \mathbf{Z} 表示整数集. 对于给定的数 a, b, \dots , 如无特别说明, 都认为是实数.

一、不等式的意义

$$1. a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

$$2. a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$

$$3. a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

特别地, 当 $a > 0, b > 0$ 时, 有

$$1. a > b \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1$$

$$2. a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$$

$$3. a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1$$

二、不等式的基本性质

从实数的有序性出发, 容易证明不等式的下述基本性质.

$$1. a > b \Leftrightarrow b < a \text{ (对称性)}$$

$$2. a > b, b > c \Rightarrow a > c \text{ (传递性)}$$

$$3. a > b \Leftrightarrow a + c > b + c \text{ (加法保号性)}$$

推论: (1) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$ (同向可加性)

(2) $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$. (异向可减性)

注意: 同向不等式不能相减, 异向不等式不能相加.

4. $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$

$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$ (乘法单调性)

推论: (1) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$ (同向可乘性)

(2) $a > b > 0, 0 < c < d \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ (异向可除性)

(3) $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

5. $a > b > 0, x > 0 \Rightarrow a^x > b^x$, 特别, $a^n > b^n, \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N})$

6. $x > y \Leftrightarrow a > 1$ 时, $a^x > a^y$; $0 < a < 1$ 时, $a^x < a^y$

7. $x > y > 0 \Leftrightarrow a > 1$ 时, $\log_a x > \log_a y$; $0 < a < 1$ 时, $\log_a x < \log_a y$

8. $0 < a < b, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < 1$

不等式的基本性质是证明不等式和解不等式的理论基础, 必须熟练掌握, 并做些规律性总结. 如加乘运算同向, 减除运算要异向才能进行等等. 掌握不等式基本性质时应注意:

1. 注意性质成立的条件, 比如性质 4 的推论 (3), 条件是 $a > b, ab > 0$. 不能减弱为 $a > b$, 否则会得出错误的结果: $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; 也不要强化为 $a > b > 0$, 否则会少了一部分有用的结果: $b < a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a}$

$< \frac{1}{b}$.

2. 不要忽略箭头的单向性和双向性,也就是要注意条件是充分条件还是充要条件.

例 1 对下列问题进行解答:

(1) $a > b$ 是 $ac^2 > bc^2$ 的什么条件?

(2) $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$ 是 $a > b, c \neq 0$ 的什么条件?

(3) $a > b > 1$ 是 $a^n > b^n > 1 (n \in \mathbf{N})$ 的什么条件?

(4) $a < b < 0$ 是 $\frac{1}{a} - a > \frac{1}{b} - b$ 的什么条件?

(5) $a + c < b + d$ 是 $a < b, c < d$ 的什么条件?

思路点拨 本题要求正确掌握不等式的基本性质.肯定的要给予证明,否定的要举反例或从结论推得与条件矛盾的结果.

解 (1)是必要条件而非充分条件:当 $a > b$ 时,不能推得 $ac^2 > bc^2$. 因为当 $c = 0$ 时,有 $ac^2 = bc^2$; 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $c \neq 0, \frac{1}{c^2} > 0$. 由乘法单调性,得 $ac^2 \cdot \frac{1}{c^2} > bc^2 \cdot \frac{1}{c^2}$, 即 $a > b$.

(2)是充要条件:若 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$, 则 $c \neq 0, c^2 > 0$. 由乘法单调性得 $a > b$; 若 $a > b, c \neq 0$, 则 $\frac{1}{c^2} > 0$, 由乘法单调性得 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$.

(3)由基本性质 5, 知是充要条件.

(4)是充分条件而非必要条件:若 $a < b < 0$, 由性质 4 的推论(3)得 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 由异向可减性得 $\frac{1}{a} - a > \frac{1}{b} - b$; 当 $0 < a < b$ 时,也可推

得 $\frac{1}{a} - a > \frac{1}{b} - b$, 因此 $\frac{1}{a} - a > \frac{1}{b} - b$ 推不出 $a < b < 0$.

(5)是必要条件而非充分条件:若 $a < b, c < d$, 由同向可加性得 $a + c < b + d$; 取 $a = 1, b = 5, c = 3, d = 2$ 时, $a + c < b + d$, 但 $c > d$.

举一反三 例 1.1 $a > b > 0$ 是下列各结论的什么条件: (1) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (2) $\frac{b}{a} < 1$; (3) $\lg a > \lg b$.

解 (1)是充分条件而非必要条件;由乘法单调性的推论(3)知, 当 $a > b > 0$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; 但当 $a < 0 < b$ 时, 也有 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

(2)是充分条件而非必要条件:由不等式的意义可知, $a > b > 0$ 时, $\frac{b}{a} < 1$. 但当 $a > 0, b < 0$ 或 $a < 0, b > a$ 时, 也得到 $\frac{b}{a} < 1$.

(3)是充要条件:由于底数大于 1. 由性质 7 可得.

例 1.2 若 $a < b < 0$, 判定下列不等式是否成立: (1) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; (2) $\frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}$; (3) $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{b}$.

解 (1)由乘法单调性推论(3)知成立.

(2)由 $a < b < 0$ 得 $a < a - b < 0$ 由乘法单调性推论(3)知成立.

(3)取 $a = -4, b = -3$, 有 $a < b < 0$. 但 $-1 = \frac{1}{a-b} < \frac{1}{b} = -\frac{1}{3}$, 所以不成立.