高等院校物理类规划教材

理论物理概论

下册

胡承正　缪　灵　周　详　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等院校物理类规划教材

理论物理概论

下册

胡承正　缪灵　周详　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

理论物理概论．下/胡承正，缪灵，周详编著．—武汉：武汉大学出版社，2011.10

高等院校物理类规划教材

ISBN 978-7-307-09129-0

Ⅰ.理… Ⅱ.①胡… ②缪… ③周… Ⅲ.理论物理学—高等学校—教材 Ⅳ.O41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 168366 号

责任编辑:任仕元　史新奎　　责任校对:刘　欣　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)

印刷:通山金地印务有限公司

开本:720×1000　1/16　　印张:22　字数:380 千字　插页:1

版次:2011 年 10 月第 1 版　　2011 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-09129-0/O·456　　定价:33.00 元

序

理论物理包括理论力学、电动力学、热力学与统计物理学、量子力学，俗称“四大力学”。它是物理类本科生极为重要的专业基础课程，难度也比较大。对于非物理类理工科（特别是应用物理专业）学生，由于以后所从事的工作和在校学时的安排，他们既需要学习这方面的所有核心知识点和主要内容，又无须学得过深、过细，且难度上也应有所降低。因此，在高等院校的物理教学中通常都把它整合成一门课程（即理论物理）予以讲授。不过，适合理论物理这门课程的教材却不多见。国内外已出版的同类著作虽然也有一些，但有的过于专深；有的虽简单，但大多是将传统的四大力学内容压缩后分开编写的。本教材的编写立足于将理论物理看做一个整体，注重将四大力学有机地结合，内容上包括四大力学的基本概念、理论和方法，程度上又便于非物理类理工科学生接受。

学生在学习新知识时往往会遇到要利用所学过的知识作基础的情况，然而以前学过的概念、定理却不一定能直接导出所涉及的内容。比如：热力学与统计物理学中双原子分子的转动能就要利用到理论力学中转动的知识。双原子分子的转动可以视为一个自由转子，属二维刚体（刚性杆）的定点转动，但理论力学中刚体的转动能是用三个欧拉角表示的，属三维刚体的定点转动，这就需要将后者化简成前者。另外，刚体的转动能在理论力学中通常写成角速度的函数，但双原子分子的转动能却要表示成广义动量的形式，这就需要利用理论力学中广义坐标和广义动量的定义式。经过以上两步才能得到恰当的双原子分子转动能的表示式。当然，这样的推导在将四大力学分开单独出版发行的教材中是难以找到的。这一来是它们的作者各不相同，二来是各不相同的作者追求的是自成体系，而非彼此间的联系。这样的推导在将四大力学整合成一门理论物理课程出版发行的教材中也是难以找到的。这是因为过于专深的教材不屑于此，而相对浅显的教材又未顾及此。本教材将尽可能弥补这些方面的不足或遗憾，借以让那些喜欢打破沙锅问到底的读者对此类问题搜索的结果不再是

空白。

本教材作者无意追求涵盖面之广博，论述点之高深，而力争做到使讲授者易教，学习者易学，阅读者易懂。

作者

2011年8月

于武汉珞珈山

前　言

理论力学、电动力学、热力学与统计物理学、量子力学是物理类本科生极为重要的四门专业基础课程，理论性强，难度大。为了使非物理类理工科学生既学习了这方面的理论和方法，又略去不必要的内容和适当降低难度，在高等院校的物理教学中通常都把它整合成一门课程，即理论物理予以讲授。本书的编写立足于把理论物理看做一个整体，注重将四大力学有机地结合，内容上包括四大力学的基本概念、理论和方法，程度上便于非物理类理工科学生接受。

(1) 本书分上、下两册，以便于讲授者根据专业具体情况有选择地教学。上册介绍基本理论，内容包括牛顿力学、热现象的基本规律、电磁理论、狭义相对论、量子力学初步、近独立粒子体系及其分布。下册是这些理论的综合、提高与应用，内容包括分析力学、振动与转动、微扰与跃迁、经典与量子理想气体、原子与原子核、万有引力与天体。

(2) 本书无意追求内容之广博、论证之深奥，而力求将基本理论讲清楚，将实际应用讲明白，将计算推导讲细致；争取做到使讲授者易教，学习者易学，阅读者易懂。

(3) 本书各章结尾处均配有相关的示范性例题和难易程度不等的习题，以帮助读者加深对所学知识的理解。

(4)本书还安排了一些对应的阅读材料来介绍对物理学的发展作出过重要贡献的人物以及物理学的进步对社会和人类生活的巨大影响。希望读者能从中得到启发，受到教益。

(5)为了配合讲授、学习和阅读，本套教材还有配套的包含各章重点、难点及全部习题题解的《理论物理概论学习指导书》。

(6)随着教材的使用和推广，还将在广泛征求意见的基础上推出与本套教材配套的多媒体电子课件。真诚地欢迎使用本套教材的广大老师和读者与作者或出版社联系，多提宝贵意见，多谈教学心得体会，多提供课件素材。

本书的出版是与武汉大学出版社、武汉大学教务部、武汉大学物理科学与

技术学院的支持分不开的。在此，作者对为本书能够得以出版提供过帮助的领导和同仁致以衷心的谢意。作者特别感谢武汉大学出版社任仕元老师为本书出版所付出的辛劳。

由于水平有限，书中难免有不当或疏漏之处，恳请读者批评指正。

2011年8月

目　录

下　册

第7章　分析力学

本章内容包括虚功原理、达朗贝尔原理、拉格朗日运动方程和哈密顿运动方程等。

7.1　虚功原理

至此，我们已经介绍了力学的基本内容，它以牛顿运动定律为基础，数学上运用欧几里得几何方法来研究力学问题。力学中的这一大理论体系通常称为牛顿力学。不过，在一些比较复杂的力学问题中，比如受约束系统，单纯运用几何方法往往显得十分不便。18 世纪末，拉格朗日在其著作《分析力学》中阐述了用数学分析方法来处理力学问题的另一大理论体系，通常称为分析力学。分析力学不但为处理复杂的力学问题开辟了便捷的途径，而且为许多研究非力学问题的物理领域提供了可供理论推广的框架。下面我们对分析力学的主要内容予以简介。

7.1.1　实位移与虚位移

设质点位矢随时间的变化为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，则在无限短时间 $\mathrm{d}t$ 内，质点位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}t$。这种由于运动质点实际上所作的位移叫实位移。如果我们设想在某一时刻质点在约束许可的条件下产生一微小位移，那么这种设想的而并非因为时间改变质点所作的位移叫做虚位移。虚位移用变分符号 δ 表示，记以 $\delta\boldsymbol{r}$，以区别于实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。由于虚位移是在约束许可的条件下质点的假想位移，在不破坏约束条件下具有任意性，因此，一般虚位移可有任意多个。而实位移是质点实际发生的位移，一般只有一个。对于稳定约束，约束不随时间改变，质点运动时段 $\mathrm{d}t$ 内的约束与 t 时刻的约束相同，实位移与虚位移中的某一个重合。但对于不稳定约束，实位移与虚位移一般并非一致。

7.1.2 虚功原理

考虑由 n 个质点组成的质点系受到 k 个稳定不可解约束①，平衡时有

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{7.1.1}$$

式中：$\boldsymbol{F}_i$ 是作用在第 i 个质点上的作用力，$\boldsymbol{N}_i$ 是作用在第 i 个质点上约束力。两边同时点乘第 i 个质点的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 得

$$\boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{7.1.2}$$

将上式对指标 i 求和给出

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{7.1.3}$$

式(7.1.3)左边第一项表示所有主动力做的虚功(力在虚位移下所做的功叫虚功，记为 δW)，第二项表示所有约束力做的虚功。如果质点系所受的约束力在任意虚位移上所做的虚功为零，那么这样的约束为理想约束。这时式(7.1.3)第二项为零，所以

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{7.1.4}$$

上式表明，受理想不可解稳定约束的质点系达到平衡时，所有作用在此质点系上的主动力在任意虚位移上的虚功之和等于零。这个结论叫做虚功原理，或虚位移原理。在直角坐标系中，式(7.1.4)可以写成

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0 \tag{7.1.5}$$

由于约束关系，$3n$ 个坐标 $x_i, y_i, z_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 并非完全独立，因此一般不能令它前面的系数 F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} 全为零。这时上式需要利用拉格朗日未定乘子法求解。设质点系的 k 个约束方程形如

$$f_\alpha = f_\alpha(x,y,z) = 0(\alpha = 1,2,\cdots,k) \tag{7.1.6}$$

式中：x,y,z 是质点系 n 个质点坐标的缩写。由此得

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i \right) = 0(\alpha = 1,2,\cdots,k) \tag{7.1.7}$$

将上面 k 个方程中的每一个乘以相应的待定因子，比如第 α 个乘以 λ_α，然后全部加到式(7.1.5)上，有

① 不可解约束是质点始终不能脱离的约束，否则约束是可解的。比如用软绳将小球固着在定点上，这时的约束便是可解的。

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(F_{ix}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right)\delta x_i+\left(F_{iy}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\right)\delta y_i+\left(F_{iz}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right]=0 \tag{7.1.8}$$

选择适当的 λ_α，使得 $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ 前系数为零。于是

$$\begin{aligned}&F_{ix}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0\\&F_{iy}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}=0\\&F_{iz}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}=0\qquad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{7.1.9}$$

联立 k 个约束方程

$$f_\alpha(x,y,z)=0\qquad(\alpha=1,2,\cdots,k) \tag{7.1.10}$$

得到含 $3n+k$ 个方程的方程组，由此可以确定 $3n+k$ 个变量 $x_i,y_i,z_i,\lambda_\alpha$。这种求解方法叫做拉格朗日未定乘子法，$\lambda_\alpha$ 叫做拉格朗日未定乘子。

7.2　达朗贝尔原理

如果 n 个质点组成的质点系做加速运动，那么根据牛顿第二定律

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{7.2.1}$$

或

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{7.2.2}$$

上面两式的差别虽然数学上只不过作了一个移项处理，但物理上却有着不一样的含义。式(7.2.1)表示质点 i 在主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 作用下做加速运动，属动力学问题。式(7.2.2)却表示质点 i 在主动力、约束力和惯性力($-m\ddot{\boldsymbol{r}}$)作用下达到平衡，属静力学问题。式(7.2.2)所表示的三者关系通常叫做达朗贝尔原理，它说明作用在质点系中各质点上的主动力、约束力和惯性力形成一个平衡力系。

在式(7.2.2)两边从左面叉乘第 i 个质点的位矢 $\boldsymbol{r}_i$，然后对指标 i 求和，给出

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)+\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{N}_i)-\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot}=0 \tag{7.2.3}$$

它表明所有主动力、约束力、惯性力对任一中心的力矩之和为零。

如果以式(7.2.2)代替式(7.1.1)，然后类似 7.1 节的推导则得到相应的虚功原理：

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{7.2.4}$$

写成标量形式为

$$\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix} - m\ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy} - m\ddot{y}_i)\delta y_i + (F_{iz} - m\ddot{z}_i)\delta z_i] = 0 \tag{7.2.5}$$

方程(7.2.4)或(7.2.5)称为动力学普遍方程,或达朗贝尔 — 拉格朗日方程。

7.3 拉格朗日方程

7.3.1 广义坐标

一个由 n 个质点组成的质点系在直角坐标系中有 $3n$ 个坐标:$x_i, y_i, z_i (i = 1,2,\cdots,n)$。如果此质点系受到 k 个完整约束,即约束方程中不含坐标对时间的导数,其形式为

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,k) \tag{7.3.1}$$

那么 $3n$ 个坐标中只有 $s = 3n - k$ 个是独立的。这种用来描写系统运动状态的独立坐标的个数叫做自由度。求解方程组(7.3.1),可以把这 $3n$ 个坐标表示成 s 个独立参数 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 的函数:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{7.3.2}$$

或

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{7.3.3}$$

这 s 个独立参数 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 称为广义坐标。

7.3.2 拉格朗日方程

n 个质点组成的质点系的动力学普遍方程为

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{7.3.4}$$

由式(7.3.3)知:

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \tag{7.3.5}$$

将式(7.3.5)代入式(7.3.4),有

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = 0 \tag{7.3.6}$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\delta q_\alpha \tag{7.3.7}$$

式中：

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ P_\alpha &= \sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

由式(7.3.3)知

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{7.3.9}$$

注意到 $\boldsymbol{r}_i$ 和$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}$都不含 $\dot{q}_\alpha$，将上式对 $\dot{q}_\alpha$ 求偏微商得

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{7.3.10}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{s}\dot{q}_\beta\frac{\partial}{\partial q_\beta}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \tag{7.3.11}$$

将式(7.3.10)和式(7.3.11)代入式(7.3.8)，给出

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

式中：$T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$ 是 n 个质点组成的质点系的总动能。结合式(7.3.6)，式(7.3.7)和式(7.3.12)得到

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha\right]\delta q_\alpha = 0 \tag{7.3.13}$$

因为 δq_α 互相独立,所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{7.3.14}$$

这就是受理想不可解约束的完整系中的拉格朗日方程。式中 $\dot{q}_\alpha$ 是广义速度,$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 是广义动量,Q_α 是广义力。

如果主动力是保守力,那么

$$\boldsymbol{F}_i=-\nabla_i V \quad \left(\nabla_i=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y_i}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z_i}\right) \tag{7.3.15}$$

式中:V 是质点系势能。利用式(7.3.3) 可以将 V 表示成$(q_1,q_2,\cdots,q_s)$ 的函数,于是

$$\begin{aligned}Q_\alpha &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right)\\ &=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right)=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\end{aligned} \tag{7.3.16}$$

记 $L=T-V$,称为拉格朗日函数,并注意到势能中一般不包含广义速度 $\dot{q}_\alpha$,因而

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

式(7.3.14) 可表示成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{7.3.17}$$

这就是保守力系中的拉格朗日方程。

如果拉格朗日函数不明显地包含某个坐标 q_α,则由拉格朗日方程知:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=0,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=p_\alpha=\text{常数} \tag{7.3.18}$$

在这种情况下,q_α 称为循环坐标,上式表示相应坐标的广义动量(p_α)守恒。

如果拉格朗日函数不显含时间,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_\alpha}{\mathrm{d}t}\\ &=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha\right)\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L\right)=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=0 \tag{7.3.20}$$

式中：
$$h=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L \tag{7.3.21}$$
称为广义能量函数，上式表明广义能量函数守恒。我们知道，力学体系的动能
$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}m_i\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{7.3.22}$$
根据变换式(7.3.3)　$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_s,t)$　$(i=1,2,\cdots,n)$

于是
$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{7.3.23}$$
$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta+\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q}_\alpha+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2\\&=T_2+T_1+T_0\end{aligned} \tag{7.3.24}$$
式中：
$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$
$$T_1=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q}_\alpha\qquad T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{7.3.25}$$
分别是广义速度的二次、一次和零次函数。对于稳定约束，$\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0$，从而动能只是速度的二次齐次函数
$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \tag{7.3.26}$$
根据欧拉齐次函数定理，若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 m 次齐次函数
$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_s)=\lambda^m f(x_1,x_2,\cdots,x_s) \tag{7.3.27}$$
那么
$$\sum_{i=1}^{s}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=mf \tag{7.3.28}$$
以 T 代替 f，$\dot{q}_\alpha$ 代替 x_i，由(7.3.28)知
$$\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}=2T \tag{7.3.29}$$
即
$$\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha=2T \tag{7.3.30}$$
代入式(7.3.21)得