



小学数学思维训练教科书

美妙的数学思维



苏平主编

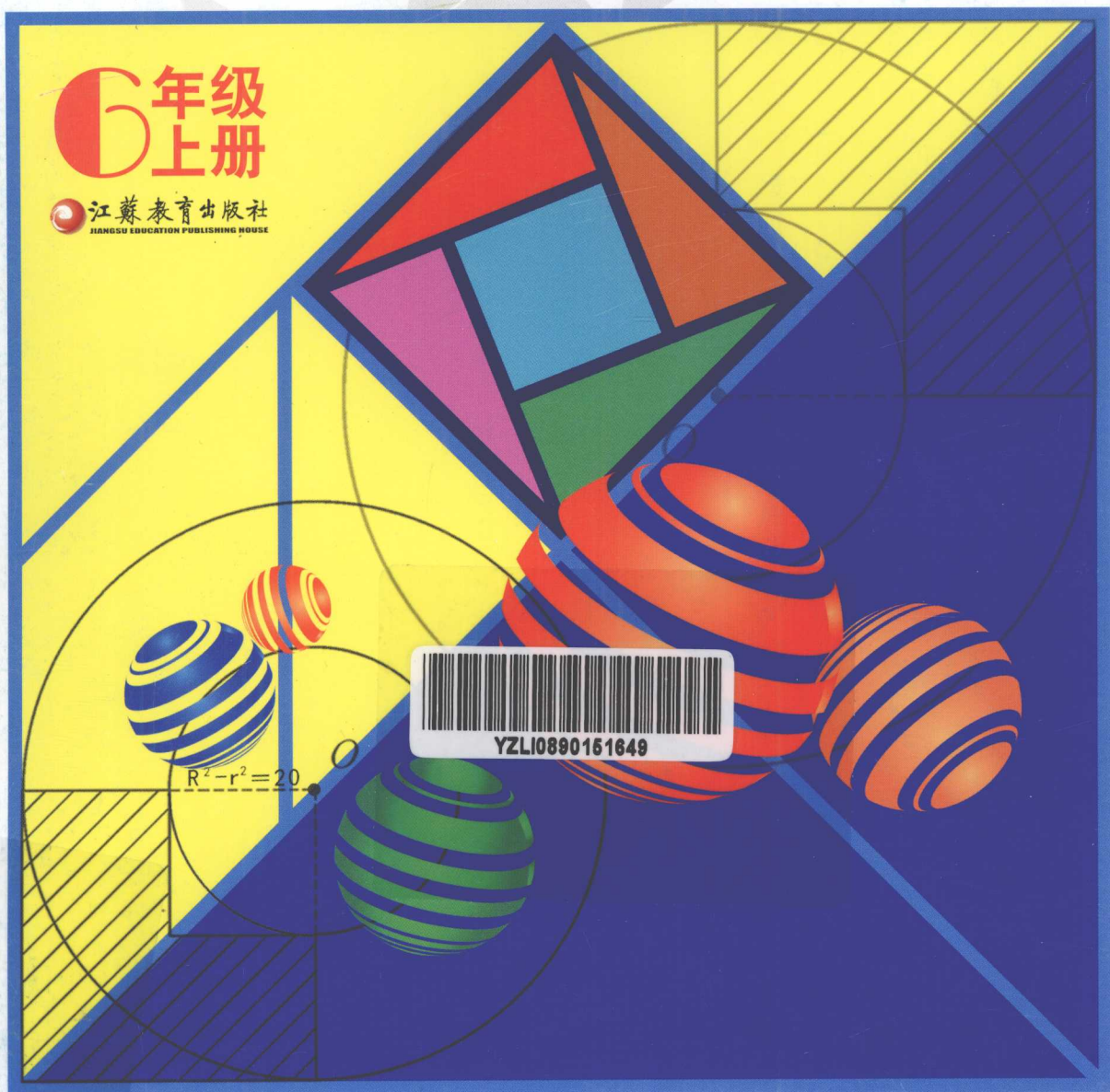
6 年级
上册

江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE



YZLI0890161649

$R^2 - r^2 = 20$



小学数学思维训练教科书

美妙的数学思维

6 年级上册

策 划 南京苏杰学校教育研究室

主 编 苏 平

分册主编 刘娟娟

编 写 苏 平 刘娟娟 景蓓蓓 程 云等

秘 书 景蓓蓓 杜素华等



YZLI0890151649

 江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(C I P)数据

美妙的数学思维. 六年级. 上册 / 苏平主编.

— 南京: 江苏教育出版社, 2011.8

ISBN 978-7-5499-0879-0

I. ①美… II. ①苏… III. ①小学数学课—教学参考资料 IV. ①G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 165687 号

书 名 美妙的数学思维(6 年级上册)
主 编 苏 平
责任编辑 赵文静
出 版 江苏教育出版社(南京市湖南路 1 号 A 楼 邮编 210009)
苏教网址 <http://www.1088.com.cn>
照 排 南京新华丰制版有限公司
印 刷 金坛市新远印刷有限公司(电话 0519-82823027)
厂 址 金坛市龙山路 47 号(邮编 213200)
开 本 787 × 1092 毫米 1/16
印 张 11.5
版 次 2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5499-0879-0
定 价 24.00 元
批发电话 025-83657791, 83658558, 83658511
邮购电话 025-85400774, 短信 025-85420909
E - mail jsep@vip.163.com
盗版举报 025-83658551

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
提供盗版线索者给予重奖

前 言

如何让孩子在小学的数学学习中,喜欢数学、会学数学,如何让孩子取得优异的数学成绩呢?带领着孩子去探索数学的魅力,掌握美妙的数学思维方法,这是孩子学好数学的金钥匙。

这套《美妙的数学思维》丛书高屋建瓴,从方法论的高度培养学生的数学学习能力,是帮助学生学好数学的金钥匙。她能够帮助学生取得优秀的学习成绩,从而走进名牌中学,并在名牌中学轻松地学习,具有源源不断的学习后劲。

当学生长大后,当学生走进国内外名牌大学后,当学生走向他们喜欢的领域发展事业时,他们在学生时代学过的许多数学知识点也许会被忘掉,但这些闪耀着智慧的美妙的数学思想和方法将会让他们受益终生。

编写一套儿童数学思维训练丛书,让学生在接受数学启蒙教育的起点,就能够掌握方法,喜欢数学、会学数学,这是我多年的梦想。这套丛书,记录了我近三十年在儿童数学教育、数学方法论方面的研究成果,记录了我和我先生张杰创办的南京苏杰学校办学十一年的数学教育研究成果。十一年来,苏杰学校一届届小学生,通过苏杰学校数学思维课程的学习,以优秀的成绩走进了南京地区最好的名牌中学。苏杰学校每届毕业生中50%以上的学生都能够被南京地区最好的名牌中学录取。苏杰学校每届毕业生中50%以上的学生高中毕业后都能够被北大、清华、哈佛等国内外著名大学录取。

这套丛书共十三册,一至五年级各有两册,六年级有三册。无论是教师教学,还是学生学习,既可以按照各个年级分册的顺序和其中章节的顺序来学习,也可以根据实际情况制订个性化的学习顺序,还可以作为寒暑假期间帮助学生巩固所学数学知识、训练数学思维的教材。

本丛书具有以下特点：

一、与各地的小学数学教材配套，帮助学生同步提高

我们认真研究了现行小学所用的各种版本数学教材，根据小学数学教学的课时进度、教材内容及其编排顺序等，同步安排丛书的教学内容，为学生拓宽和提优，使学生迅速提高数学学习成绩，并为中学的数学学习打下坚实的基础。

二、授之以渔，让学生会学数学

数学是一种文化，每一个人都应当具有良好的数学素养。

本丛书引领学生跟着数学家一起去探索、去思考、去提问，倾听数学家的巧思妙想，体验数学思维的魅力和奇妙，研究数学的简洁美、规律美、代数美、对称美、统一美，掌握重要的数学思维方法，使学生会学数学。

三、超越数学竞赛和数学考试，让学生受益终生

本丛书对学生有着长远的实用价值，能够从根本上培养学生可持续发展的学习能力。一方面紧扣数学课程标准的要求，适应学生升入名牌中学的需要，针对各地提高性的数学课外活动的需要，着重从解题方法、解题技巧等方面训练学生的应试能力；另一方面，注重培养学生对数学学习的兴趣、养成良好的数学学习习惯、掌握优秀的学习方法，让学生受益终生。

四、以教材形式呈现，便于学生循序渐进学习

本丛书是一套数学思维训练教材，撰写时充分考虑能方便教师、孩子和家长使用。

在写作风格上，我们根据各年级学生的认知特点，采用学生乐于接受的数学语言和形式，通过各类典型例题，深入浅出地讲解数学思维方法。

在内容结构方面，我们着眼于让学生了解数学家或者数学教师是怎样想的，为什么这样想，着眼于让学生像数学家一样思考。因此，丛书按照专题的形式来分类，每一讲的灵魂是例题的解答思考方法；每一讲的开头，都有明确的学习目标，教师须按照“学习目标”进行教学，学生要按照“学习目标”开展学习，并通过练习检测自己达标的水平。

在训练量方面，我们坚持事半功倍的原则，注重通过范例的教学和适量的练习，培养学生举一反三、融会贯通的能力，让学生脱离漫无目标的“题海”，有目标、有计划地学习，做学习的主人。

南京苏杰学校校长 苏平

目录

第一章 数学思维训练

① 数字谜和算式谜	002
② 图形综合(一)	009
③ 图形的操作	015
④ 整数问题综合	023
⑤ 行程问题(一)	028
⑥ 行程问题(二)	033
⑦ 圆和扇形	038
⑧ 分数应用题	046
⑨ 和倍、差倍问题综合	053
⑩ 工程问题	060
⑪ 定义新运算	068
⑫ 百分数应用题	072
⑬ 逻辑推理	078
⑭ 生活中的数学	084
⑮ 图形综合(二)	091
⑯ 图形综合(三)	097

目录

第二章 数学思维方法赏析

① 化归法	104
② 速算与巧算	110
③ 倒推法	116
④ 从简单情况想起	122
⑤ 代数思维欣赏	128
⑥ 图表法	132
⑦ 类比	138
⑧ 枚举	143
⑨ 数学美欣赏(一)	148
⑩ 数学美欣赏(二)	150
参考答案	152

第一章 数学思维训练



1 数字谜和算式谜

shu zi mi he suan shi mi

学习目标

数字谜和算式谜是一类有趣的数学问题,既然是“谜”就需要“猜”,怎样猜得更合理、更迅速呢?这当然需要好方法。

通过本讲内容的学习,希望同学们达到下面的目标:

1. 会根据算式中加减乘除等运算的特点和规律,进行推理和分析,找到解题的突破口。
2. 能用试验的方法,进行分析和推理,先确定其中的一个或两个数字,再逐步推算其余的数字,最后给出解答。
3. 会用假设的方法,确定解答的范围,在此基础上进行推理、排除、筛选和计算,最终获得正确结果。

例1 将0、1、2、3、4、5、6这7个数字填在圆圈和方框里,使每个数字恰好出现一次,组成一个整数算式。

$$\bigcirc \times \bigcirc = \square = \bigcirc \div \bigcirc$$

思考方法

将7个数字填入等式中五个空格里,说明一定有两个空格里应填两位数。这五个空格里,被除数应该是最大的数,所以它必是一个两位数,另一个两位数应是两数的乘积。

又因为在这个算式中,0不能做除数或是乘数,因此0只能填在被除数的个位上。所以,被除数是60。

当商的个位为5时,乘数中必有5,而5只能用一次,所以商的个位不能是5。商的个位也不可能是其他奇数,只能是偶数。经试算,除数为5。

因此得到, $3 \times 4 = 12 = 60 \div 5$ 。



小结

例1的解答过程给我们这样的启示:解决数字谜问题,要先进行分析和推理,确定算式中的一个或两个数字,再逐步推算其余的数字,最后用试验的方法,给出解答。

例2 在下式中的每两个相邻数之间都添上一个加号或减号,组成一个算式,要求算式的运算结果等于37,且要求这个算式中的所有减数的乘积尽可能大,那么这些减数的最大乘积是多少?

$$10 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 37$$

思考方法

因为 $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$,要使计算结果为37,必须使和减少 $55-37=18$,也就是说要将一些“+”改为“-”。

当把一个数前面的“+”改为“-”时,计算结果就减少了这个数的2倍。因为 $18 \div 2=9$,所以把“9”前面的“+”改为“-”。

所以, $10-9+8+7+6+5+4+3+2+1=37$ 。

要使这个算式中的所有减数的乘积尽可能大,就要考虑9能拆成哪几个数相加,且这几个数彼此最为接近,因为此时这几个加数的乘积最大。

因为 $9=1+8=2+7=3+6=4+5=1+2+6=1+3+5=2+3+4$,所以这个算式是 $10+9+8+7+6+5-4-3-2+1=37$,减数的最大乘积是 $2 \times 3 \times 4=24$ 。



想一想

你认为上述思维方法妙在何处?请说一说。



小结

解答例2的关键是:采取了整体思考的方法,根据10个数的和55与37相差18,想到应把9前面的“+”变为“-”。

例3 用1、3、4、5、9分别替换下面算式中的文字,使等式成立。

$$\text{开开} \times \text{心心} + \text{迎新年} = 2009$$

思考方法

要确定每个文字代表的数字,需要进行试验。为了缩小试验的范围,我们可以从“迎新年”表示的最大数954和最小数134入手,来确定“开开×心心”积的范围。

$$2009 - 954 \leq \text{开开} \times \text{心心} \leq 2009 - 134$$

$$1055 \leq \text{开开} \times \text{心心} \leq 1875$$



只有 $11 \times 99 = 1089$, $33 \times 44 = 1452$, $33 \times 55 = 1815$ 满足条件。

经试算, $2009 - 1815 = 194$ 是所求结果。

所以, 算式是 $33 \times 55 + 194 = 2009$, 或 $55 \times 33 + 194 = 2009$ 。



小结

解例3这类题目, 我们可以按照以下步骤来试算:(1) 首先确定试算的对象和大致范围;(2) 尽可能缩小试验的范围;(3) 合理确定试算的顺序, 防止漏解;(4) 进行试算, 记录计算过程, 筛选出正确答案。

例4 一个游戏中, 魔术师请一个人随意想一个三位数 \overline{abc} , 再由这个人求出5个数 \overline{acb} 、 \overline{bca} 、 \overline{bac} 、 \overline{cab} 和 \overline{cba} 的和 A , 并把 A 告诉魔术师, 魔术师就可以说出这个人所想的数 \overline{abc} 。如果 $A = 1999$, 求 \overline{abc} 是多少。

思考方法

先探究6个三位数的和:

$$\begin{aligned} & \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cab} + \overline{cba} \\ &= 200(a+b+c) + 20(a+b+c) + 2(a+b+c) \\ &= 222(a+b+c) \end{aligned}$$

因为 $222(a+b+c) - 1999 = \overline{abc}$, 而 $\overline{abc} > 0$, 即 $222(a+b+c) > 1999$, 所以 $a+b+c$ 最小是10。

当 $a+b+c = 10$ 时, $222 \times 10 - 1999 = 221$, $2+2+1 \neq 10$, 不满足条件;

当 $a+b+c = 11$ 时, $222 \times 11 - 1999 = 443$, $4+4+3 = 11$, 满足条件。

所以 $\overline{abc} = 443$ 。



想一想

如果 $A = 2121$, 那么 \overline{abc} 等于多少?

例5 在下面的算式中, 不同的汉字表示不同的数字, 相同的汉字表示相同的数字。如果“祝”+“你”+“更”+“快”+“乐”=32, 那么“让你更快乐”所代表的五位数是多少?

$$\begin{array}{r} \text{乐} \\ \text{快 乐} \\ \text{更 快 乐} \\ \text{你 更 快 乐} \\ + \text{让 你 更 快 乐} \\ \hline \text{祝 你 更 快 乐} \end{array}$$



思考方法

先考虑个位上的数，“乐” $\times 5$ 的积的个位上仍是“乐”，那么“乐”=0或者“乐”=5。如果“乐”=0，那么“祝”+“你”+“更”+“快”=32，也就是说这4个数的平均数是8，同时这4个数还必须不同，最大的这样的4个数的和是 $9+8+7+6=30 < 32$ 。所以，“乐”=5。

再考虑十位上的数，“快” $\times 4$ 的积加上个位向十位进位的“2”($5 \times 5=25$)，得到“快” $\times 4+2$ 的末位数仍是“快”，“快”必是偶数。经试验，“快”=6。

百位上的数相加，“更” $\times 3+2$ 的末位数仍是“更”，经试验，“更”=9。

千位上的数相加，“你” $\times 2+2$ 的末位数是“你”，经试验，“你”=8。

最后根据“祝”+“你”+“更”+“快”+“乐”=32，得到“祝”=32-5-6-9-8=4，那么“让”=3。

所以，“让你更快乐”所代表的五位数是38965。

小结

解答例5这样的竖式算式谜，可以按数位的顺序依次进行思考，逐步解答。

例6 “祝你健康”4个字分别表示不同的数字，每个方框里只填一个数字。请用推理的方法，求出下面这个算式的结果。

$$\begin{array}{r}
 \text{祝 你 健 康} \\
 \times \text{祝 你 健 康} \\
 \hline
 \phantom{\text{祝 你 健 康}} \square \square \square \square \\
 \phantom{\text{祝 你 健 康}} \square \square \square \square \\
 \phantom{\text{祝 你 健 康}} \square \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \square \square \square \square
 \end{array}$$

思考方法

在求积的过程中，第二行因错过两格，所以“健”=0；因“祝” \times “祝”的积是一位数，但是加上进位上来的数就是两位数了，所以“祝”=3。

因为“祝”=3，所以，“你” < 3 ，“你”=1或“你”=2。

当“你”=1时，上面算式的十万位上不够产生进位，故“你”=2。那么“康”=1。

原算式的结果是： $3201 \times 3201 = 10246401$ 。

例7 将下面的算式填完整。

$$\begin{array}{r}
 \square 8 \square 7 \\
 \square \square \overline{) \square \square \square \square \square \square} \\
 \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 \square \square \\
 \hline
 0
 \end{array}$$



思考方法

为了叙述的方便,我们设除数为 \overline{ab} ,根据商中已知的数可知: $8 \times \overline{ab}, 7 \times \overline{ab}$ 的结果都是两位数,所以 $a = 1, b \leq 2$ 。

观察商千位上的数,它乘 \overline{ab} 的积是三位数,所以,这个数必是9,而且可知 $\overline{ab} = 12$ 。

这样算式中的除数和商都知道了,那么被除数就是 $9807 \times 12 = 117684$ 。

例8 在下面的算式中,相同的字母代表相同的数字,不同的字母代表不同的数字。那么各个字母分别代表什么数字呢?

$$\begin{array}{r} F I V E \\ T W O \\ + O N E \\ \hline E I G H T \end{array}$$

思考方法

这是一道有趣的英文算式,把它翻译一下就是 $5 + 2 + 1 = 8$,正好成立。但是,现在我们要用0~9这10个数字来代替算式中的10个不同的字母,因此我们可以从不同数位上的数的特征来入手考虑。

显然, $E = 1$;那么, $F = 8$ 或 $9, I = 0$ 或 1 。

又因为 $I = 1$ 时,百位上不可能向千位进2,故 $I = 0$ 。

而当 $F = 8, I = 0$ 时,百位上不可能向千位进2,故 $F = 9$ 。

当 $E = 1, F = 9, I = 0$ 时,由个位上可得 $T = O + 2$,百位上 O 加 T 的和必须产生进位。

(1) T 最大为8,那么 $O = 6$,剩下的数还有2、3、4、5、7可以填写,结果如下。(其中十位上的7、4、2的顺序可以更改)

$$\begin{array}{r} 9071 \\ 846 \\ + 621 \\ \hline 10538 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9041 \\ 826 \\ + 671 \\ \hline 10538 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9021 \\ 876 \\ + 641 \\ \hline 10538 \end{array}$$

(2) 如果 $T = 7$,那么 $O = 5, G = 2$ 或 3 。当 $G = 2$ 时,剩下的3、4、6、8不能使竖式的十位成立。当 $G = 3$ 时,剩下的2、4、6、8也不能使竖式的十位成立。

(3) 如果 $T = 6$,那么 $O = 4, G = 0$ 或 1 ,这也是不可能的。

所以, $F = 9, E = 1, I = 0, T = 8, O = 6, G = 5, H = 3, V, W, N$ 分别是2、4、7(不考虑顺序)。

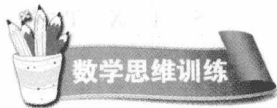
小结

解答例8这样没有出现一个数字的算式谜,可以先根据算式特点假设一些数字,在这些假设的基础上进行推算、排除和筛选,最终得出正确结果。



总结

数字谜和算式谜是一类非常有趣的数学问题,在解答的时候一定要抓住题目的特点,寻找解题的突破口,同时做到有序思考,这样才能更好地找到“谜底”!



数学思维训练

1. 请将1~9这9个数字填入下面的两个算式中,使得等式成立。

$$\square \times \square \times \square = \square + \square \quad \square \div \square = \square \div \square$$

2. 将1~9这9个数字填入下面方格里,且使得积P最大。

$$P = \square \square \square \times \square \square \square \times \square \square \square$$

3. 从1~9这9个自然数中选出8个互不相同的数填入下面的方格里,使得算式的结果尽可能大。

$$[\square \div \square \times (\square + \square)] - (\square \times \square + \square - \square)$$

4. 在下面的数字之间插入四则运算符号、括号及等号,使之成为等式。例如: $33 \div 33 + 1 + 1 + 1 - 2 = 2$ 。怎样插入才能使等式的结果最大?

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2$$

5. 在下面两个算式中,相同的字母表示相同的数字,不同的字母表示不同的数字,那么 $A+B+C+D+E+F+G=(\quad)$ 。

$$\begin{array}{r} A \quad B \quad C \quad D \\ + \quad E \quad F \quad G \\ \hline 1 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} D \quad C \quad B \quad A \\ + \quad G \quad F \quad E \\ \hline 9 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \end{array}$$

6. (1) 求一个四位数 \overline{abcd} , 使它的9倍等于 \overline{dcba} 。

(2) 已知 $\overline{abcd} \times 4 = \overline{dcba}$, 求四位数 \overline{abcd} 。

7. 设O代表2,S代表3,并且相同的字母代表相同的数字,不同的字母代表不同的数字。那么下面的算式中,其他字母分别代表什么数字呢?

$$\begin{array}{r} C \quad R \quad O \quad S \quad S \\ + \quad R \quad O \quad A \quad D \quad S \\ \hline D \quad A \quad N \quad G \quad E \quad R \end{array}$$

8. 已知A、B、C、D、E、F、G、H、I、K代表10个互不相同的大于0的自然数,要使下列等式成立,A最小是多少?

$$B+C=A \quad D+E=B \quad E+F=C \quad G+H=D \quad H+I=E \quad I+K=F$$



9. 下式中相同的字母代表相同的数字,不同的字母代表不同的数字。那么在下面的算式中,各个字母分别代表什么数字?

$$\begin{array}{r}
 \text{F O R T Y} \\
 \text{ T E N} \\
 + \text{ T E N} \\
 \hline
 \text{S I X T Y}
 \end{array}$$





学习目标

1. 巩固已经学过的有关角度的知识,如:三角形的内角和为 180° ,钟面上时针旋转一大格是 30° 等。
2. 在解决问题的过程中,能将直观判断和逻辑推理相结合,灵活地运用分析、转化等方法,将问题化繁为简、化难为易。

例1 如图,已知 $\angle 1 = \angle 2$,求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 的度数。

思考方法

如图所示,

$$\because (\text{因为}) \angle 3 + 42^\circ + 34^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore (\text{所以}) \angle 3 = 180^\circ - 42^\circ - 34^\circ = 104^\circ.$$

根据三角形内角和是 180° ,

$$\text{得 } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + 30^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - 30^\circ - \angle 3 = 150^\circ - 104^\circ = 46^\circ.$$

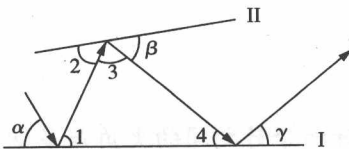
$$\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 1 = \angle 2 = 23^\circ.$$

$$\because \angle 2 + \angle 3 + 42^\circ + \angle 4 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 = 11^\circ.$$

所以, $\angle 1 = \angle 2 = 23^\circ$, $\angle 3 = 104^\circ$, $\angle 4 = 11^\circ$ 。

例2 光线以下图所示的角度 α 照射到平面镜 I 上,然后在平面镜 I 和 II 之间来回反射。已知 $\angle \alpha = 60^\circ$, $\angle \beta = 50^\circ$, $\angle \gamma$ 等于多少度?



思考方法

根据光线的入射角与反射角相等,可得

$$\angle 1 = \angle \alpha = 60^\circ, \angle 2 = \angle \beta = 50^\circ, \angle 4 = \angle \gamma.$$

$$\text{所以 } \angle 3 = 180^\circ - \angle 2 - \angle \beta = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ,$$

$$\angle 4 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ.$$

所以, $\angle \gamma = 40^\circ$ 。



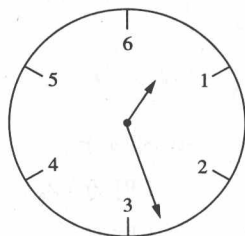
小结

在解决上面两个例题时我们都用到了“平角是 180° ”“三角形的内角和是 180° ”等知识,这是解决角度问题时常常用到的条件。

例3 潘多拉斯星球的一天只有6小时,每小时36分钟。该星球上的人用下面的钟来计时,短针表示时针,长针表示分针。如果现在的时间是3点18分,那么时针和分针之间的夹角是多少度?在地球上,3点18分时,时针和分针之间的夹角是多少度?

思考方法

先找出钟面上3点18分时时针和分针的位置。根据已知条件,该星球每小时36分钟,也就是分针在钟面上旋转一圈是36分钟,分针旋转一个大格就是 $360 \div 6 = 60$ (度),所以3点18分时针指向3和4的正中间,相当于时针从3到4旋转了半格;而此时,分针指向3,因此它们之间的夹角为 $60 \div 2 = 30$ (度)。



在地球上,3点整时,时针在分针前15小格;到3点18分时,时针走了 $18 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}$ (小格),分针走了18小格,两针之间有 $18 - \left(15 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ (小格)。每小格对应的圆心角是6度,此时时针与分针之间的夹角是 $\frac{3}{2} \times 6 = 9$ (度)。

所以,3点18分时,在潘多拉斯星球上,时针和分针之间的夹角是30度;在地球上,时针和分针之间的夹角是9度。



想一想

在地球上,3点24分时,时针和分针之间的夹角是多少度?

