读书是最美的姿态 Reading is most graceful

总策划：毛文凤 教育学博士后

同步培优新课堂

PEIYOUXINKETANG

数学

8年级

吉林出版集团有限责任公司

总策划:毛文凤 教育学博士后

同步培优

PEIYOUXINKETANG

新课堂

八年级

数学

吉林出版集团有限责任公司

图书在版编目(CIP)数据

同步培优新课堂. 八年级数学 / 《同步培优新课堂》编写组主编. —长春：吉林出版集团有限责任公司，2011.5

ISBN 978-7-5463-4820-9

Ⅰ.①同… Ⅱ.①同… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 068328 号

同步培优新课堂 八年级数学

主 编	本书编写组
出版人	毛文凤
责任编辑	李敏芳
责任校对	戴耀萍
封面设计	猫头鹰工作室
开 本	787mm×1092mm 1/16
字 数	160 千字
印 张	12
版 次	2011 年 5 月第 1 版
印 次	2011 年 5 月第 1 次印刷

出 版	吉林出版集团有限责任公司 (长春市人民大街 4646 号 邮编:130021)
发 行	江苏可一出版物发行集团有限公司 (南京市山西路 67 号世贸中心 4 楼 邮编:210009)
电 话	总编办:0431-85600386 市场部:025-66989810
网 址	www.keyigroup.com
印 刷	南京玄武湖印刷实业有限公司

ISBN 978-7-5463-4820-9 定价:20.00 元

前　言

我国著名的心理学家朱智贤、林崇德说过:“培养学生良好的思维品质是发展思维能力的突破口;是提高教育质量,减轻学生负担的好途径;是应试教育向素质教育转轨的一项重要任务。”“新课程标准”也明确指出:中学数学教学要有意识地培养学生良好的思维品质。

正因为如此,我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师,根据教育部颁布的新课标的要求,编写了这套《同步培优新课堂》,目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

本套丛书共分三册,可供中学阶段不同年级师生使用。为了便于学生自学和家长指导,每一章节分为“知识链接”、“典例精讲”、“学力训练”三个部分,“名师技法”贯穿全书,意在介绍各种思维方式与解题技巧,指导学生打开思路,帮助学生提升能力,体现“培优”精髓。可满足各年级不同能力学生的学习需要。

本套丛书兼顾不同版本教材学生的需要,在编写中体现了以下几个方面的特点:

一、源于课标、高于教材。　本丛书注重体现新课程理念,源于教材,又高于教材。

二、阶梯提升,便于自学。　本丛书坚持由浅入深的原则,由典型例题入手,归纳整理解题思路,透析解题过程,点拨解题技巧,总结思维规律。

三、边学边练,举一反三。　本丛书每个典型例题后均配有习题若干,演练结合,便于学生活学活用,举一反三。在数学这门学科中,知识的各个部分是有关联的,但各知识点都有自己的特征。因此,在学习过程中,数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

为使广大读者更方便地使用本书,本书按从易到难的梯度编写,这样,对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识;中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼;优秀的学生可以通过竞赛入门篇的训练使自已处在更高的水平。

充分阅读本书,通过这种阶梯式的训练,任何学生都能迅速有效地掌握各章节的内容,从而达到有效并熟练地掌握知识的目的。

丛书编委会

目　录

第1讲 轴对称

轴对称是现实生活中广泛存在的一种现象，是数学与现实密切联系的重要内容.一朵红花、一片绿叶、一只色彩斑斓的蝴蝶等，最令人惊奇的就是它们外形的几何对称性，自然界的轴对称可以在从亚原子粒子的结构到整个宇宙的结构的每一个尺度上找到.

轴对称是一种美的标准，人类心智中的某种东西受对称的吸引，对称对我们的视觉有感染力，影响我们对美的感受，建筑、绘画广泛地应用对称.

一 知识链接 透彻理解数学概念，提升你的数学内涵！

1. 轴对称和轴对称图形：

(1)轴对称：把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么称这两个图形关于这条直线对称，也称这两个图形成轴对称，这条直线叫做对称轴，两个图形中的对应点叫做对称点.

(2)轴对称图形：把一个图形沿某一条直线折叠，如果直线两旁的部分能够互相重合，那么称这个图形是轴对称图形，这条直线就是对称轴.

2. 轴对称的性质：如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.轴对称图形的对称轴，是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.

说明：①如果已知两个图形关于某条直线对称，确定对称轴时只需要找到一对对应点，作对应点连线的垂直平分线就得到对称轴. ②确定一个轴对称图形的对称轴的方法与①相同. ③作一个图形的轴对称图形，只需要作出决定这个图形的每个顶点关于对称轴的对称点，然后连接每个对称点就得到这个图形的轴对称图形. ④对称轴是一条直线.

3. 常见的轴对称图形：线段、直线、角、等腰三角形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形、圆等.

4. 轴对称变换：由一个平面图形得到它的轴对称图形叫做轴对称变换.轴对称变换是一种全等变换，而翻折问题的实质是图形的轴对称问题.

说明：很多时候翻折问题放在三角形或者平行四边形、矩形中进行，因此除了利用翻折后两图形全等外，还要充分利用三角形的内角和等于180度、四边形内角和等于360度、平行四边形的对边平行且相等这些隐含条件.

5. 用坐标表示轴对称：点(x,y)关于x轴对称的点的坐标是(__________，__________)；点(x,y)关于y轴对称的点的坐标是(__________，__________).

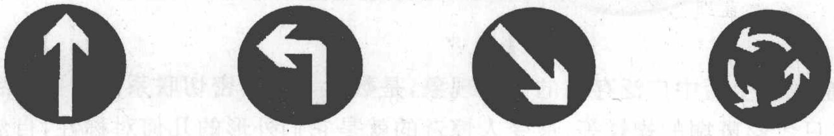
说明：①点关于x轴对称，则点的横坐标不变，点关于y轴对称，则点的纵坐标不变. ②点关于原点对称，则横、纵坐标都改变.

6. 线段的垂直平分线：(1)定义：经过线段的中点且垂直于线段的直线叫线段的垂直平分线. (2)性质：垂直平分线上的点到线段两端的距离相等. (3)判定：若一个点到线段两个端点的距离相等，则这点一定在这条线段的垂直平分线上.

说明：①线段的垂直平分线是一条直线. ②线段的垂直平分线往往链接着等腰三角形.

典例精讲 参与数学解题过程，品味数学内在魅力！

【例 1】（希望杯初一 1 试）如图的交通标志中，轴对称图形有　　　　（　　）

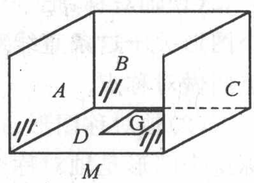


A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

分析：从左向右第一个图形是轴对称图形，第二个图形不是轴对称图形，第三个图形是轴对称图形，第四个图形不是轴对称图形. 所以共有 2 个轴对称图形. 答案选 C.

技巧提升：如果觉得那个图形是轴对称图形，先大致画出你想象中的那条对称轴，然后观察对称轴的左右两边能否满足沿对称轴折叠后两边的图形能完全重合. 若能就是轴对称图形，若不能就不是轴对称图形.

【例 2】（希望杯初二 1 试）如图，A、B、C、D 是四面互相垂直摆放的镜子，镜面向内，在镜面 D 上放了写有字母“G”的纸片，某人站在 M 处可以看到镜面 D 上的字母 G 在镜面 A、B、C 中的影像，则下列判断中正确的是　　（　　）



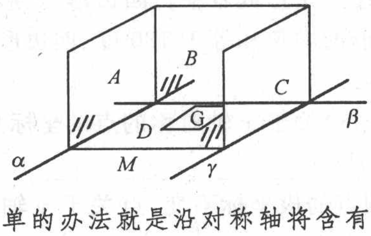
A. 镜面 A 与 B 中的影像一致

B. 镜面 B 与 C 中的影像一致

C. 镜面 A 与 C 中的影像一致

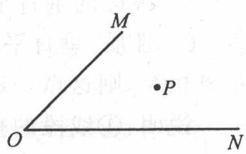
D. 在镜面 B 中的影像是“G”

分析：根据平面镜成像的特点：①所成的像是虚像；②像和物体形状、大小相同；③像和物体各对应点的连线与平面镜垂直；④像和物体各对应点到平面镜间距离相等. 后三个特点用数学语言说就是像和物体关于平面镜对称，即反应在图纸上，以平面镜为轴折叠，像和物体恰好重合. 根据这一原理，如图“G”在 A 面上的像就是以 α 为对称轴，作“G”关于 α 的轴对称图形，得“ᘓ”. 同理：“G”在 B 面上的像就是以 β 为对称轴，作“G”关于 β 的轴对称图形，得“Ͻ”. “G”在 C 面上的像就是以 γ 为对称轴，作“G”关于 γ 的轴对称图形，得“ᘓ”. 所以答案选 C.



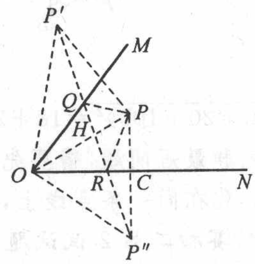
技巧提升：解这类问题最简单的办法就是沿对称轴将含有“待求图形”的一面对折，对折后图纸反面看到的“待求图形”就是它在镜子中的“像”.

【例 3】（山东省初中数学竞赛试题）如图，公园内有两条河 OM，ON 在点 O 处汇合（如图），$\angle MON=60°$. 两河形成的半岛上有一处古迹 P. 现计划在两条小河上各建一座小桥 Q 和 R，并在半岛上修三段小路分别连



接两座小桥 Q,R 和古迹 P. 若古迹 P 到两条小河的距离都是 $50\sqrt{3}$ 米，则这三段小路长度之和的最小值为______米.

分析：根据两点之间线段最短，将三段小路转化到同一直线上. 作 P 点关于直线 OM 的对称点 P'，作 P 点关于直线 ON 的对称点 P''. 连接 $P'P''$ 交 OM,ON,OP 于 Q,R,H. 连接 PP'' 交 ON 于 C，连接 OP 交 $P'P''$ 于 H. 连接 PR、QP，OP'，OP''.



∵ P 到两条小河的距离相等，所以 P 在 $\angle MON$ 的平分线上，∴ $\angle POM=\angle PON=30°$.

根据对称性得 $\angle P''ON=30°$，$PO=P''O$，$PR=P''R$，$PQ=P'Q$.

∴ $\triangle POP''$ 是等边三角形.

在 $\text{Rt}\triangle PCO$ 中，∵ $\angle PON=30°$，∴ $PO=2PC=100\sqrt{3}$，∴ $P''O=100\sqrt{3}$. 同理 $P'O=100\sqrt{3}$.

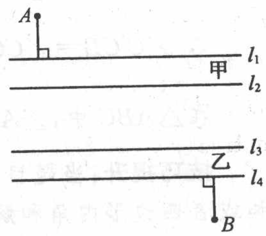
在 $\triangle P''OP'$ 中，$\angle HP'O=90°-\angle POP'=30°$. ∴ $P'H=50\sqrt{3}\times\sqrt{3}=150$.

∴ $P''P'=2HP'=300$.

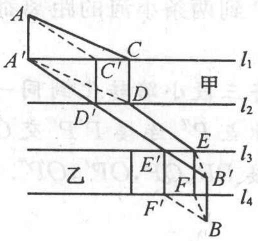
所以三段小路长度之和的最小值为 300 米.

技巧提升："一点两直线"型最短路径，关键作出这一点关于两直线的对称点，对称点连线与两直线有两交点，最短路径为"出发点→交点 1→交点 2→出发点".

【例 4】（第 14 届"五羊杯"数学竞赛）五羊大学建立分校，校本部与分校隔着两条平行的小河. 如图 $l_1 // l_2$ 表示小河甲，$l_3 // l_4$ 表示小河乙，A 为校本部大门，B 为分校大门. 为方便人员来往，要在两条小河上各建一条桥，桥面垂直于河岸. 图中的尺寸是：甲河宽 8 米，乙河宽 10 米，A 到甲河垂直距离 40 米，B 到乙河垂直距离 20 米，两河距离 100 米，A、B 两点水平距离（与小河平行方向）120 米. 为使 A、B 两点间来往路程最短，两条桥都按这个目标而建，那么，此时 A、B 两点间来往的路程是______米.



分析：设在小河甲上建了桥 CD，小河乙上建了桥 EF，则 A、B 两点来往路径是折线 $ACDEFB$. 作 $AA'\perp$ 河岸，$BB'\perp$ 河岸，方向对着小河，使 AA' = 小河甲的宽度，BB' = 小河乙的宽度，连 $A'D$，$B'E$，则折线 $ACDEFB$ 的长度等于折线 $AA'DEB'B$ 的长度，等于折线 $A'DEB'$ 的长度加上两河宽度和. 为使 A、B 来往路程最短，需使折线 $A'DEB'$ 的长度达到最小值，因此连接 $A'B'$，交 l_2 于 D'，交 l_3 于 E'，搭桥 $C'D'$，$E'F'$，则折线 $A'DEB'$ 成为线段 $A'D'E'B'$，长度最小，两条桥 $C'D'$，$E'F'$ 符合要求.

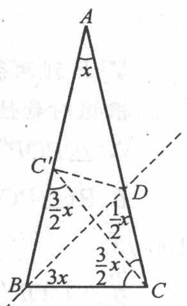


由题意得所求的最短路程为：

$8+10+A'B'=18+\sqrt{120^2+(40+20+100)^2}=18+200=218$(米).

技巧提升：多条线段组成的线段之和最短问题，需要先分析题中哪些线段的长是固定值，将这些值剔除，然后考虑将剩余的变量转化在同一条直线上，利用两点之间线段最短解决.

【例 5】（第 19 届希望杯数学邀请赛初二第 2 试试题）将等腰三角形纸片 ABC 的底边 BC 折起，使点 C 落在腰 AB 上，这时纸片的不重合部分也是等腰三角形，则$\angle A=$________.



分析：根据题意画出图形. 如图所示，根据等腰三角形的"等角对等边"得 $\angle B=\angle C$，$\angle A=\angle ADC'$. 因为折叠意味着轴对称，所以得到 $\angle BCC'=\angle BC'C$. 根据外角得 $\angle BCC'=\angle BC'C=\angle A+\angle ACC'=\frac{3}{2}\angle A=2\angle ACC'$，从而利用三角形内角和求出各角度数.

C 点翻折之后的位置为 C'，记 $\angle A=x$.

由$\triangle ADC'$是等腰三角形得$\angle ADC'=x$.

$\because$ $\angle ADC'$是$\triangle C'DC$ 的外角，

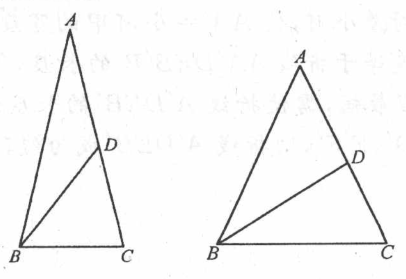
$\therefore$ $\angle ACC'=\frac{1}{2}\angle ADC'=\frac{1}{2}x$.

$\therefore$ $\angle C'CB=\angle CC'B=\angle A+\angle ACC'=\frac{3}{2}x$.

在$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，所以 $5x=180°$，解得 $x=\frac{180°}{5}=36°$.

技巧提升：当题目中没有给出角的度数而要求角的度数时，往往将条件转化为三角形内角和或者四边形内角和解决. 在转化的过程中，不同三角形之间的角往往借助于三角形外角这一有利的工具. 轴对称意味着全等，所以可以得到对应角的相等.

【例 6】 已知等腰三角形一腰上的中线将它周长分成 9 cm 和 6 cm 两部分，则这个等腰三角形的底边长是________.



分析：根据题意画出如图所示的图形，在等腰三角形 ABC 中，中线 BD 将三角形周长分成 $AB+AD$ 部分和 $CD+BC$ 部分. 设 $AD=CD=x$，则 $AB=AC=2x$. 设 $BC=y$. 由题意得：

$$\begin{cases}3x=9\\x+y=6\end{cases} \text{或} \begin{cases}3x=6\\x+y=9\end{cases}$$

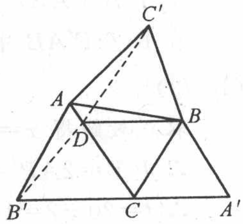
解得 $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=7\end{cases}$.

当 $x=3$，$y=3$ 时，三边为 6，6，3 能组成三角形；当 $x=2$，$y=7$ 时，三边为 4，4，7 能组成三角形.

综上所述，这个等腰三角形的底边长 3 cm 或 7 cm.

技巧提升：等腰三角形的一腰上中线分等腰三角形成两部分，其中一部分是腰长一半与另一腰长，另一部分是腰长一半与底边长. 一定注意这里的两部分不包含中线长. 因为没有说分成的两部分中具体每一部分的长，所以分情况讨论.

【例 7】（江苏省竞赛题）如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=60°$，$AC>BC$，又 $\triangle ABC'$、$\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$ 都是 $\triangle ABC$ 外的等边三角形，而点 D 在 AC 上，且 $BC=DC$.



(1)证明：$\triangle C'BD \cong \triangle B'DC$；

(2)证明：$\triangle AC'D \cong \triangle DB'A$.

分析：(1)是基础，(2)是(1)的自然推论.

证明：(1) $\triangle C'BD$ 与 $\triangle ABC$ 中，$BD=BC$，$AB=BC'$.

$\angle C'BD=60°+\angle ABD=\angle ABC$，

所以 $\triangle C'BD \cong \triangle ABC$，所以 $C'D=AC$. ①

又在 $\triangle BCA \cong \triangle DCB'$ 中，$BC=DC$，$AC=B'C$，$\angle ACB=\angle B'CD=60°$，

所以 $\triangle BCA \cong \triangle DCB'$，所以 $DB'=BA$. ②

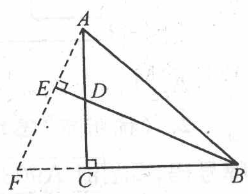
所以 $\triangle C'BD \cong \triangle B'DC$.

(2)由①得 $C'D=AC=AB'$，

由②得 $DB'=BA=C'A$，又 $AD=AD$，所以 $\triangle AC'D \cong \triangle DB'A$.

技巧提升：在一个基础图形的基础上向外作等边三角形或者正方形时，条件中就创造了太多的边、角相等的关系，为我们利用三角形全等创造了条件. 而三角形的全等又为题目创造了更多的边角相等.

【例 8】（江苏省第 15 届初中数学竞赛初二年级第 2 试）已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，D 是 AC 上一点，$AE \perp BD$ 交 BD 的延长线于 E，且 $AE=\frac{1}{2}BD$. 求证：BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线.



分析：已知条件中 $AE \perp BD$ 于 E，结论中 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线，两个条件合在一起，可以猜测 BE 是一条中垂线.

证明：如图，延长 AE 和 BC 的延长线相交于点 F.

在 Rt$\triangle ACF$ 与 Rt$\triangle BCD$ 中，

$\because AC=BC, \angle ACF=\angle BCD=90^\circ, \angle CAF=\angle CBD$,

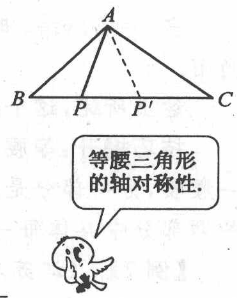
$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCD$. $\therefore AF=BD$.

$\because AE=\frac{1}{2}BD$. $\therefore AE=\frac{1}{2}AF$. $\therefore AE=EF$.

又 $\because AE \perp BD$, $\therefore BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线.

技巧提升:当条件中出现垂直、角平分线时,要充分考虑等腰三角形的三线合一.

【例 9】 (四川省初中数学联赛决赛试卷(初二组))如图所示,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=120^\circ$,$AB=AC=10\sqrt{3}$cm,一动点 P 从 B 向 C 以每秒 2 cm 的速度移动,当 P 点移动______秒时,PA 与腰垂直.



分析:动点 P 从 B 向 C 移动的过程中,有两次跟腰垂直的机会,一次是 $PA \perp AC$,另一次是 $PA \perp AB$.

$\because \angle BAC=120^\circ, AB=AC$, $\therefore \angle B=\angle C=30^\circ$.

$\because P'A \perp AB$, $\therefore P'B=2P'A$.

在 $Rt\triangle P'AB$ 中,设 $AP'=x$,则 $P'B=2x$. 由勾股定理得 $(2x)^2-x^2=(10\sqrt{3})^2$.

取正数解得 $x=10$.

$\therefore P'B=2AP'=20$.

$\therefore t=20\div 2=10$(秒). 同理,当 $PA \perp AC$ 时,求得 $t=5$.

所以当 P 点移动 5 或 10 秒时,PA 与腰垂直.

技巧提升:由于等腰三角形是轴对称图形,所以很容易出现双解或者多解问题,做题时一定要考虑全面,防止漏解现象发生.

三 学力训练 检测自己能力,体验成功乐趣!

一、选择题

1. (第 13 届"五羊杯"初中数学竞赛试题)一个平面图形,如果沿着一条直线对折能做到自身重合,便称为轴对称图形,例如正方形是轴对称图形(因为沿它的一条对角线对折,可做到自身重合). 在图中的 4 个图形中有__________个是轴对称图形. ( )

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

2. (杭州市"思维数学"夏令营)在日常生活中,我们注意到有一些含有特殊数学规律的车牌号码,如:浙 A90809、浙 A22222、浙 A12321 等,这些牌照中的五个数字都是关于中间的一个数字"对称"的,给人以对称美的感受,我们不妨把这样的牌照叫做"数字对称"牌照. 那么,在浙 A 后面,以 8 开头且有五个数字的"数字对称"牌照,最多可制作 ( )

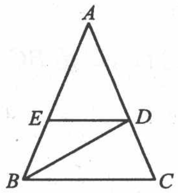
A. 2000 个　　B. 1000 个　　C. 200 个　　D. 100 个

3.（第 20 届“希望杯”全国数学邀请赛）篆刻是中国独特的传统艺术，篆刻出来的艺术品叫印章. 印章的文字刻成凸状的称为“阳文”，刻成凹状的称为“阴文”. 如图的“希望”即为阳文印章在纸上盖出的效果，此印章是下列选项中的（阴影表示印章中的实体部分，白色表示印章中镂空的）（　　）

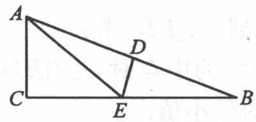
A　　B　　C　　D

4.（武安市第五中学数学竞赛试题）如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=36^\circ$，$AB=AC$，BD 平分 $\angle ABC$，$DE /\!/ BC$，则图中等腰三角形有（　　）

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个



第 4 题



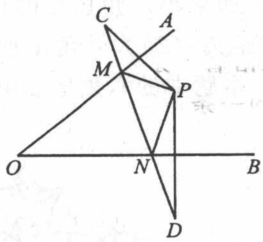
第 5 题

5.（武安市第五中学数学竞赛试题）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，DE 是 AB 的垂直平分线，$\angle CAE : \angle EAB=4:1$. 则 $\angle B$ 的度数为（　　）

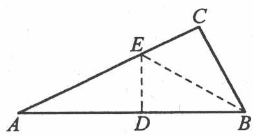
A. 15°　　B. 20°　　C. 30°　　D. 45°

二、填空题

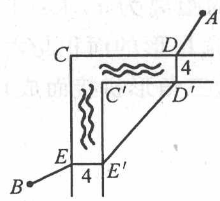
6.（武安市第五中学数学竞赛试题）如图，点 P 关于 OA、OB 的对称点分别为点 C、点 D，连接 CD，分别交 OA、OB 于 M、N 两点，若 $\triangle PMN$ 的周长为 8 厘米，则 CD 的长为______厘米.



第 6 题



第 7 题



第 8 题

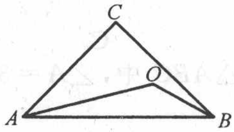
7.（磉下中学 09（八年级上）数学竞赛模拟试题二）如图，把 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$（$\angle C=90^\circ$）折叠，使 A、B 两点重合，得到折痕 ED，再沿 BE 折叠，C 点恰好与 D 点重合，则 $\angle A$ 等于________.

8.（第 15 届“五羊杯”数学竞赛）如图，护城河在 CC' 处直角转弯，宽度保持为 4 米. 从 A 处往 B 处，经过 2 座桥：DD'，EE'. 设护城河是东西—南北方向的，A、B 在东西方向上相距 64 米，南北方向上相距 84 米. 恰当地架桥可使 $ADD'E'EB$ 的路程最短. 这个最短路程为________米.

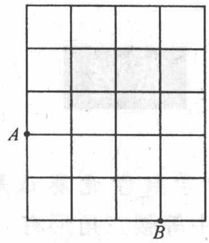
9.（希望杯初二 2 试）如图，$\triangle ABC$ 中，$AC=BC=5$，$\angle ACB=80^\circ$，O 为 $\triangle ABC$ 中一点，$\angle OAB=10^\circ$，$\angle OBA=30^\circ$，则线段 AO 的长是________.

10.（第十九届“希望杯”全国数学邀请赛初一第 2 试）如图，A、B 是网格中的两个格点，点

C 也是网格中的一个格点，连接 AB、BC、AC，当$\triangle ABC$ 为等腰三角形时，格点 C 的不同位置有________处，设网格中每个小正方形的边长为 1，则所有满足题意的等腰三角形$\triangle ABC$ 的面积之和等于________.



第 9 题



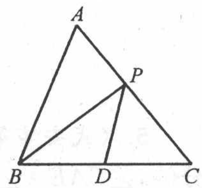
第 10 题

三、解答题

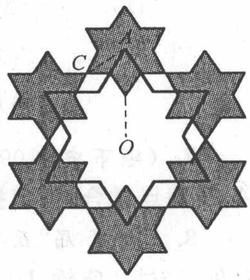
11.（希望杯初二 2 试）如图，正三角形 ABC 的边长为 a，D 是 BC 的中点，P 是 AC 边上的动点，连接 PB 和 PD 得到$\triangle PBD$. 求：

(1)当点 P 运动到 AC 的中点时，$\triangle PBD$ 的周长；

(2)$\triangle PBD$ 的周长的最小值.



12.（希望杯初二 2 试）如图，一个大的六角星形（粗实线）的顶点是周围六个全等的小六角星形（细线型）的中心，相邻的两个小六角星形各有一个公共顶点，如果小六角星形的顶点 C 到中心 A 的距离为 a，求：(1)大六角星形的顶点 A 到其中心 O 的距离；(2)大六角星形的面积；(3)大六角星形的面积与六个小六角星形的面积之和的比值.（注：本题中的六角星形由 12 个相同的等边三角形拼接而成）



13.（江苏省第二十一届初中数学竞赛初二年级第 2 试）观察图 1 中"蝴蝶"的画法，在图 2 的 8×8 正方形网格中，画两只与图 1 形状、大小都相同的蝴蝶（二者可以有部分重叠），组成一

幅对称图案，并标出对称轴 l 或对称中心 O.

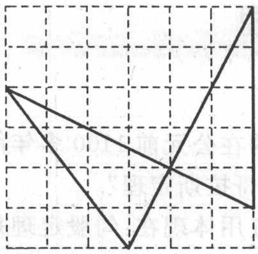


图 1

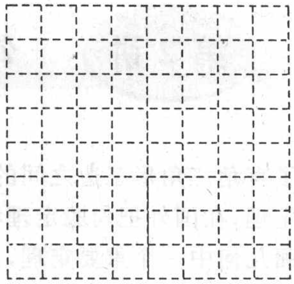


图 2

14. (江苏省第二十一届初中数学竞赛初二年级第 2 试)河岸 l 同侧的两个居民小区 A、B 到河岸的距离分别为 a 米、b 米(即图 1 中所示 $AA'=a$ 米，$BB'=b$ 米)，$A'B'=c$ 米. 现欲在河岸边建一个长度为 s 米的绿化带 CD(宽度不计)，使 C 到小区 A 的距离与 D 到小区 B 的距离之和最小.

(1)在图 2 中画出绿化带的位置，并写出画图过程；

(2)求 $AC+BD$ 的最小值.

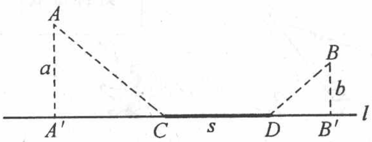


图 1

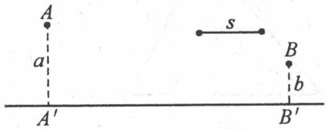
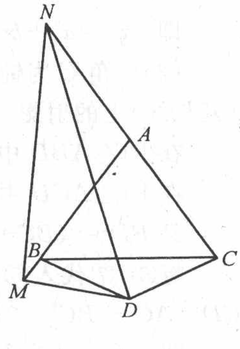


图 2

15. (荆州市初中数学竞赛八年级试题)如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC=120°$ 的等腰三角形，M 是 AB 延长线上一点，N 是 CA 延长线上一点，且 $\angle MDN=60°$. 试探究 BM、MN、CN 之间的数量关系，并给出证明.



第2讲 勾股定理

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系，大约在公元前1100多年前，商朝已经证明了普通意义下的勾股定理，在国外把勾股定理称为“毕达哥拉斯定理”.

勾股定理是平面几何中一个重要定理，其广泛的应用体现在：勾股定理是现阶段线段计算、证明线段平方关系的主要方法，运用勾股定理的逆定理，通过计算也是证明两直线垂直位置关系的一种有效手段.

一 知识链接 透彻理解数学概念，提升你的数学内涵！

1. 勾股定理：如果直角三角形的两条直角边长分别为 a、b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$. 即直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方. 我国古代把直角三角形中较短的直角边称为勾，较长的直角边称为股，斜边称为弦.

2. 广勾股定理：在三角形中，锐角（或钝角）所对的边的平方等于另外两边的平方和，减去（或加上）这两边中的一边与另一边在这边（或其延长线）上的射影的乘积的2倍.

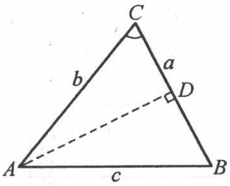


图1

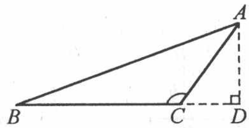


图2

证：(1)设角 C 为锐角，如图1所示. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D，则 CD 就是 AC 在 BC 上的射影.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AB^2=AD^2+BD^2$，①

在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AD^2=AC^2-CD^2$，②

又 $BD^2=(BC-CD)^2$，③

将②，③代入①得 $AB^2=(AC^2-CD^2)+(BC-CD)^2=AC^2-CD^2+BC^2+CD^2-2BC\cdot CD=AC^2+BC^2-2BC\cdot CD$，

即 $c^2=a^2+b^2-2a\cdot CD$. ④

(2)设角 C 为钝角，如图2所示. 过 A 作 AD 与 BC 延长线垂直于 D，则 CD 就是 AC 在 BC（延长线）上的射影.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AB^2=AD^2+BD^2$，⑤

在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AD^2=AC^2-CD^2$，⑥

又 $BD^2=(BC+CD)^2$，⑦

将⑥，⑦代入⑤得 $AB^2=(AC^2-CD^2)+(BC+CD)^2=AC^2-CD^2+BC^2+CD^2+2BC\cdot CD=AC^2+BC^2+2BC\cdot CD$，

即 $c^2=a^2+b^2+2a\cdot CD$. ⑧

综合④,⑧就是我们所需要的结论 $c^2=a^2+b^2\pm 2a\cdot CD$.

特别地,当$\angle C=90^\circ$时,$CD=0$,上述结论正是勾股定理的表述:$c^2=a^2+b^2$.

因此,我们常又称此定理为广勾股定理(意思是勾股定理在一般三角形中的推广).

由广勾股定理我们可以自然地推导出三角形三边关系对于角的影响.在$\triangle ABC$中,

(1)若 $c^2=a^2+b^2$,则$\angle C=90^\circ$;

(2)若 $c^2<a^2+b^2$,则$\angle C<90^\circ$;

(3)若 $c^2>a^2+b^2$,则$\angle C>90^\circ$.

勾股定理及广勾股定理深刻地揭示了三角形内部的边角关系,因此在解决三角形(及多边形)的问题中有着广泛的应用.

3. 勾股定理的逆定理:如果一个三角形的三边长为 a、b、c 且满足 $a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形为直角三角形.

注意:勾股定理与勾股定理的逆定理的联系与区别.

联系:(1)两者都与三角形三边关系 $a^2+b^2=c^2$ 有关;

(2)两者都与三角形有关.

区别:勾股定理是以“一个三角形是直角三角形”为条件,进而得到“数量关系 $a^2+b^2=c^2$”;勾股定理的逆定理是以“一个三角形的三边满足 $a^2+b^2=c^2$”为条件,进而得到“这个三角形是直角三角形”.

4. 勾股数:(1)定义:凡符合 $X^2+Y^2=Z^2$ 公式的正整数值我们称之为勾股数. X 和 Y 是直角边,Z 是斜边.又由于,任何一个勾股数组(a,b,c)内的三个数同时乘一个整数 n 得到的新数组仍然是勾股数,所以一般我们想找的是 a,b,c 互质的勾股数组.

(2)关于这样的数组,比较常用也比较实用的套路有以下两种:

第一套路:

当 a 为大于1的奇数 $2n+1$ 时,$b=2n^2+2n$, $c=2n^2+2n+1$.

实际上就是把 a 的平方数拆成两个连续自然数,例如:

$n=1$ 时,$(a,b,c)=(3,4,5)$

$n=2$ 时,$(a,b,c)=(5,12,13)$

$n=3$ 时,$(a,b,c)=(7,24,25)$

……

这是最经典的一个套路,而且由于两个连续自然数必然互质,

所以用这个套路得到的勾股数组全部都是互质的.

第二套路:

当 a 为大于4的偶数 $2n$ 时,$b=n^2-1$, $c=n^2+1$.也就是把 a 的一半的平方分别减1和加1,例如:

$n=3$ 时,$(a,b,c)=(6,8,10)$

$n=4$ 时,$(a,b,c)=(8,15,17)$

$n=5$ 时,$(a,b,c)=(10,24,26)$

$n=6$ 时,$(a,b,c)=(12,35,37)$

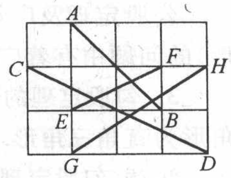
……

这是次经典的套路，当 n 为奇数时，由于 (a,b,c) 是三个偶数，所以该勾股数组必然不是互质的；而 n 为偶数时由于 b、c 是两个连续奇数必然互质，所以该勾股数组互质.

5. 解决实际问题. 在一些实际问题中，如解决圆柱侧面两点间距离问题、航海问题、折叠问题、梯子下滑问题等，常直接或间接运用勾股定理及其逆定理. 在解决以上问题中，充分体现了上述思想方法.

二 典例精讲 参与数学解题过程，品味数学内在魅力！

【例 1】（北京市竞赛题）在由单位正方形组成的网格图中标出了 AB，CD，EF，GH 四条线段，其中能构成一个直角三角形三边的线段是（　　）



A. CD，EF，GH　　B. AB，CD，EF

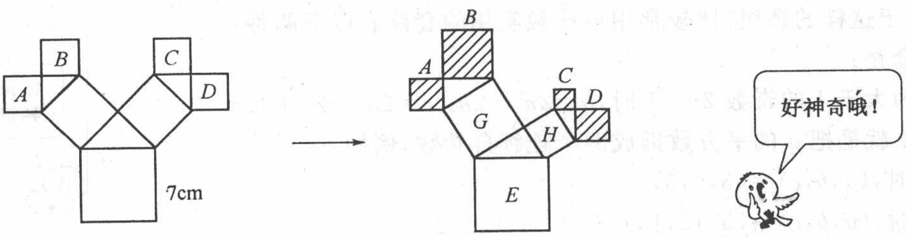
C. AB，CD，GH　　D. AB，EF，GH

分析：本题考查勾股定理及其逆定理. 第一步利用网格算得 $AB^2=8$，$CD^2=20$，$EF^2=5$，$GH^2=13$. 第二步，看看三条线段中最长线段的平方等不等于其他两线段的平方和. 若相等，则构成直角三角形；若不相等，则构不成直角三角形. 故答案：D.

技巧提升：网格题是近几年中考的一个热点，利用正方形网格我们将所求线段构造在直角三角形中，利用勾股定理求出各线段的长（或者线段的长的平方），再利用勾股定理逆定理判定三线段能否组成直角三角形.

【例 2】（希望杯初二 2 试）若干个正方形和等腰直角三角形拼接成如图所示的图形，若最大的正方形的边长是 7 cm，则正方形 A、B、C、D 的面积和是（　　）

A. 14 cm^2　　B. 42 cm^2　　C. 49 cm^2　　D. 64 cm^2



分析：由勾股定理的几何意义知：以直角三角形的三边向外作正方形，两直角边所对正方形面积和等于斜边上正方形的面积. 所以正方形 A、B 的面积之和为正方形 G 的面积；正方形 C、D 的面积之和为正方形 H 的面积；而正方形 G、H 的面积之和又等于大正方形 E 的面积. 所以，正方形 E 的面积 $=7^2=49$. 故选 C.

技巧提升：勾股定理的几何意义可以做以下推广：(1) 以直角三角形的三边向外作等腰直角三角形（或等边三角形），两直角边所对的等腰直角三角形（或等边三角形）面积和等于斜边上等腰直角三角形（或等边三角形）的面积；(2) 以直角三角形的三边向外作圆，两直角边所对圆的面积和等于斜边上圆的面积；(3) 从一个正方形衍生出的勾股树，树上同一层的正方形的面积之和都等于与最下面的正方形的面积.

【例 3】（希望杯初二 1 试）直角三角形有一条边长为 11，另外两边的长是自然数，那么它的周长等于（　　）

A. 132　　B. 121　　C. 120　　D. 111