高等学校教材

高等数学

（上册）

天津大学数学系 编著

高等教育出版社

高等学校教材

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

（上册）

天津大学数学系 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是在天津大学数学系多年教学实践基础上，参考“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，为高等院校理工科及经济管理类各专业学生编写的教学用书。

全书分上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数。

本书内容丰富、思路清晰、结构紧凑、体系完整，具有推理严密、概念准确、叙述详略得当的特点，并对传统教材中长期存在的问题进行了有益的探索与改进。书中的大量例题都是经过精心编选的，每节都配了难度适中且数量适当的习题，每章还配备了类型齐全的综合性习题。

本书也可作为相关读者的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/天津大学数学系编著.—北京:高等教育出版社,2010.8

ISBN 978-7-04-029705-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①天… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第124218号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 赵 阳
责任绘图 尹文军 **版式设计** 范晓红 **责任校对** 杨凤玲
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	潮河印业有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com

开 本	787×960 1/16	版 次	2010年8月第1版
印 张	21.75	印 次	2010年8月第1次印刷
字 数	410 000	定 价	29.60元

物料号 29705-00

前　　言

高等数学是理工科各专业的重要基础课，它既为后续课程准备必要的数学知识与方法，又对学生科学思维的训练起着重要的作用。天津大学高等数学教材从20世纪60年代起出版了许多版本，随着改革开放及对外交流的发展，将现代数学观点和方法融入高等数学教材是必然的。本书是在天津大学数学系教师多年教学实践基础上，汲取天津大学历年出版的高等数学教材的精华，参阅了国内外相关优秀的教材，并结合教育部数学基础课程教学指导分委员会关于“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，以及硕士研究生入学考试的大纲，为高等院校理工科及经济管理类各专业学生编写的教学用书。

本教材的主要特点包括：

1. 作为高等数学教材，本书内容全面、结构严谨、推理严密、详略得当，力图培养学生严谨的科学精神和创新能力。

2. 为了与现行的中学教学相衔接，本书在适当章节中介绍了反三角函数、极坐标、多项式根的概念及有关结论。为更好地学习高等数学，本书还对不属于本课程的复值函数和复指数函数作了简要介绍，二阶和三阶行列式的概念与计算也列在附录中。

3. 本书的例题都是精心编选的，解答是对题目的精透剖析，有利于学生掌握相关的概念、理论和方法。

4. 各章节之后配备了足量的各种类型的习题供学生练习，有些习题给学生足够思考的空间，有利于充分激发读者的发散思维，提高学生数学意识和数学能力。

5. 大胆简化了一些理论性过强且繁琐的证明，且尽量给以直观解释，注重数学知识的应用性。为了开阔学生视野，对于那些为了解决实际应用问题而产生的相关学科都作了简要介绍。

6. 导数与积分在经济学中的应用都有专门介绍。还有一节讲述差分方程的有关概念和解法，这些可供某些经济管理类专业的学生选用。

全书分上、下两册,上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数。

本书由天津大学数学系编写。参加此次编写工作的有毛云英、周泽华、史国良、王强、陈仁毓、吕良福、于鲁源、田代军、金应龙。由毛云英教授统稿,曾绍标教授审阅了全部书稿,对此我们表示万分感谢。

由于时间紧迫以及编者的水平所限,虽经多次修改与试用,本书的失误之处仍在所难免,希望同行和广大读者批评指正。

天津大学数学系

2009年12月

目　　录

第一章　函数与极限

高等数学的主要研究对象是函数，极限是建立相关理论和方法的基础. 因此, 首先在本章介绍函数与极限的有关概念、性质和运算法则.

第一节　映射与函数

一　映射

定义 1.1　设 A 和 B 是两个非空集合, f 是对应法则, 使得对每个 $x \in A$, 按照 f 有唯一的 $y \in B$ 与之对应, 则称 f 为由 A 到 B 的**映射**, 记作

$$f: A \to B \quad 或 \quad f: x \mapsto y \ (x \in A).$$

与 x 所对应的 y 称为 x 在映射 f 下的**象**, 记作 $f(x)$, 即有 $y = f(x)$, x 称为 y 在 f 下的**原象**. 集合 A 称为映射 f 的**定义域**, 记作 D_f, 即 $D_f = A$. A 中所有元素在映射 f 下的象的全体组成的集合称为映射 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(A)$, 即

$$R_f = f(A) = \{y \,|\, y = f(x), x \in A\}.$$

按照定义, 一个映射包含有三个基本要素: 集合 A, 即定义域 D_f; 集合 B, 它是 A 中元素在映射 f 下的象所属的集合; 对应法则 f, 它是确定 A 中元素所对应的 B 中元素的规则.

对于映射 $f: A \to B$, 按照定义, 只是要求集合 A 中的每个元素都在集合 B 中有唯一的元素与之对应. 因此, 映射 f 既允许 A 中不同元素对应 B 中同一元素, 也允许 B 中的某些元素不与 A 中任何元素对应, 即允许 $R_f \subsetneqq B$①. 在数学上用如下定义区分与此相关的不同映射.

定义 1.2　设 $f: A \to B$.

(1) 若 $R_f = B$, 则称 f 为 A **到** B **上的映射或满射**.

① 按照国家标准化管理委员会制定的标准, 符号 $A \subsetneqq B$ 表示 A 是 B 的真子集, 而符号 $A \subset B$ 与 $A \subseteq B$ 一样表示 A 是 B 的子集.

(2) 若对每个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为**一一映射或单射**.

(3) 若 f 是满射又是单射, 则称 f 为 **A 到 B 上的一一映射或双射**.

例如, 映射 $f : x \mapsto \sin x$ $(x \in \mathbf{R})$ 是由 $\mathbf{R}$ 到区间 $[-1, 1]$ 的满射但不是单射. 由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f : x \mapsto 2^x$ 是单射而不是满射. 由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f : x \mapsto x^2$ 既不是满射又不是单射. 而由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f : x \mapsto 2x + 1$ 既是满射又是单射, 从而是双射.

设 f 是由 A 到 B 的单射. 根据定义, 对于 f 值域 R_f 中的每个元素 y, 都有 A 中唯一的元素 x 使得 $y = f(x)$. 按照此对应规律又确定了一个由 R_f 到 A 的映射, 称其为映射 f 的**逆映射**, 记作 f^{-1}. 于是, 若 $y = f(x)$, 则 $x = f^{-1}(y)$. 映射 f^{-1} 的定义域是 R_f, 值域是 A.

设有两个映射

$$g : A \to B_1 \text{ 和 } f : B_2 \to C.$$

若 $A_1 = \{x \,|\, x \in A \text{且} g(x) \in B_2\}$ 非空, 则对于每个 $x \in A_1$, 通过映射 g 与 f 有唯一的 $z \in C$ 与之对应. 于是由 g 和 f 确定了一个由 A_1 到 C 的映射, 称其为 g 和 f 的**复合映射**, 记作 $f \circ g$, 即

$$f \circ g : A_1 \to C.$$

对每个 $x \in A_1$, x 在 $f \circ g$ 下的象 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

例如, 由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $g : x \mapsto 2x - 1$ 与由区间 $(0, +\infty)$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f : x \mapsto \log_2 x$ 的复合映射是由区间 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f \circ g : x \mapsto \log_2(2x-1)$.

二 函数概念

1. 函数的定义

定义 1.3 若 f 是由集合 $D \subset \mathbf{R}$ 到集合 $\mathbf{R}$ 的映射, 则称 f 是定义在 D 上的**函数**. 映射 f 的定义域 D 称为函数 f 的**定义域**. 映射 f 的值域 $R_f = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 f 的**值域**. 对任意 $x \in D$,x 在映射 f 下的象 $f(x)$ 称为函数 f 在点 x 处的**函数值**.

根据定义, 定义在 D 上的函数 f 是一类特殊的映射. 它的定义域和值域都是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集. 对每个实数 $x \in D$, 按照对应法则 f 都有唯一的实数 y 与之对应. 如果把 x 和 y 分别看作取值于 D 和 $\mathbf{R}$ 的两个变量, 则函数 f 确定了这两个变量之间的一个对应法则. 因此这个函数 f 也记作 $y = f(x)$ $(x \in D)$, 并称

变量 y 是变量 x 的函数, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**. 于是, 记号 $f(x)$ $(x \in D)$ 既表示函数 f 在点 x 处的函数值, 又表示这是一个以 x 为自变量的函数.

用来表示函数的符号除了 f 外, 还可根据需要选用其他符号, 如 g, h, F, φ 等等. 有时为了简便, 也用诸如 $y = y(x)$ 的形式表示变量 y 是变量 x 的函数.

由于函数的值域都含于 $\mathbf{R}$, 所以构成函数的基本要素只有定义域和对应法则. 在表述一个由具体问题确定的函数时, 除了要指明其对应法则外, 还必须指出函数的定义域. 例如, 在自由落体运动中, 若用 t 表示下落的时间, s 表示下落的路程, $t = 0$ 和 $t = T$ 分别表示开始下落和下落截止的时间, 则 s 是 t 的函数. 这个函数表示为

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad t \in [0, T],$$

其中 g 为重力加速度. 对于仅由数学运算式子给出的函数, 如果没有指出其定义域, 则约定其定义域是使该表达式有意义的自变量可取值的全体.

2. 函数的表示法

函数的主要表示法有三种.

(1) 解析法. 用数学运算式子表示自变量与因变量之间的对应规律. 如 $y = \sin 2x, y = 5x^2 - 6$.

(2) 表格法. 用表格表示自变量与因变量之间的对应规律.

例如, 某地某月每日的最高气温由表 1–1 给出.

表 1–1

日	1	2	3	$\cdots$	30
最高气温 T(°C)	37	36	38	$\cdots$	34

这是一个定义域为 $\{1, 2, \cdots, 30\}$ 的函数, 对应规律在表上一目了然.

(3) 图像法. 用坐标平面中的图像表示自变量与因变量之间的对应规律.

例如, 某地某日的气温变化由气温自动记录设备记录如图 1–1 所示. 对于每个时刻 $t \in [0, 24]$, 按照图中的曲线唯一对应一个气温 T 的值. 因此图中的曲线确定了一个以时间 t 为自变量, 气温 T 为因变量的函数. 函数的定义域是 $[0, 24]$.

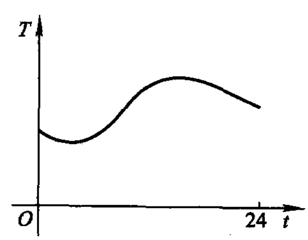

图 1–1

有些函数不能用解析法、表格法或图像法来表示, 只能用语言来描述.

考察定义在 $\mathbf{R}$ 上的 **狄利克雷** (Dirichlet) **函数**

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

这个函数显然不能用解析法和表格法来表示. 为了看它是否可以用图像法来表示, 下面分析有理数与无理数在数轴上的分布情况.

任何两个不相等的有理数之间都还有其他有理数存在. 例如, 对于有理数 a 和 b, 当 $a\neq b$ 时 $\frac{1}{2}(a+b)$ 便是介于 a 和 b 之间的有理数. 有理数的这个性质称为**稠密性**. 然而, 任何两个不相等的有理数之间又都有无理数存在. 例如, 对于不相等的有理数 a 和 b, $a+\frac{\pi}{4}(b-a)$ 便是介于 a 和 b 之间的无理数. 同样地, 无理数也具有上述性质. 因此, 在数轴上有理数的分布是稠密的, 无理数的分布也是稠密的. 每个有理数的任意近旁都有无理数, 每个无理数的任意近旁也都有有理数. 有理数与无理数在数轴上的这种分布状况使得我们也无法用图像法表示狄利克雷函数, 只能用如上的语言加以描述.

在此顺便指出, 由有理数与无理数组成的实数在数轴上的分布不仅是稠密的, 而且数轴上的每个点都与一个实数相对应. 实数的这个性质称为**完备性**或**连续性**. 此外, 由有理数和无理数的稠密性可知, 任何不相等的两个实数之间既有有理数, 也有无理数.

解析法便于用数学手段对函数作进一步研究和分析, 而图像法可以比较直观地表现出因变量与自变量间的依赖关系. 为了得到对函数 $y=f(x)$ 的直观认识, 可以根据 $f(x)$ 的解析表示法在直角坐标平面 xOy 上作出 $y=f(x)$ 的图像, 得到图像表示法. 函数图像可看作是函数的几何表示.

例 1　函数

$$y=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 其图像如图 1–2 所示.

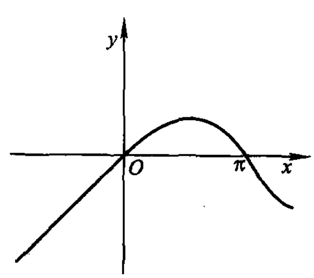

图 1–2

像例 1 中的函数那样, 在其定义域的不同部分用不同的数学式子表达的函数称为**分段函数**.

例 2　函数

$$y=[x]$$

称为**取整函数**, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 它的图像如图 1–3 所示.

例 3　函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为**符号函数**, 其定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 它的图像如图 1–4 所示.

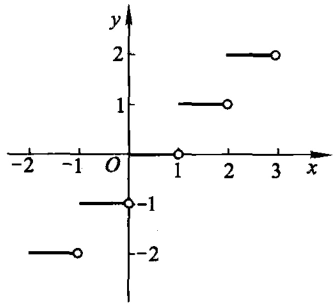

图 1–3

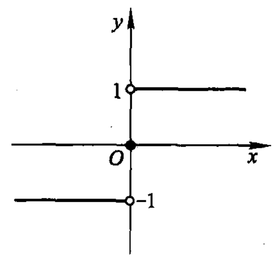

图 1–4

3. 有界函数与无界函数

定义 1.4　设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义,

(1) 若存在 $L \in \mathbf{R}$, 使得对任何 $x \in D$ 都有 $f(x) \leqslant L$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有上界**, L 称为 $f(x)$ 在 D 上的一个**上界**.

(2) 若存在 $l \in \mathbf{R}$, 使得对任何 $x \in D$ 都有 $f(x) \geqslant l$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有下界**, l 称为 $f(x)$ 在 D 上的一个**下界**.

(3) 若存在 $M > 0$, 使得对任何 $x \in D$ 都有 $|f(x)| \leqslant M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**, 否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界; 在 $[-2, 2]$ 上有界, 且 $|f(x)| \leqslant 4$.

根据定义易知, 函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

4. 单调增函数与单调减函数

定义 1.5　设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, x_1, x_2 是 I 上任意两点.

(1) 若当 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是 I 上的**单调增函数**或**增函数**;

(2) 若当 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是 I 上的**单调减函数**或**减函数**;