◎金星教育系列丛书　全心全意解疑解难◎

总主编／薛金星

中学教材全解

ZHONGXUE JIAOCAI QUANJIE

学案版

高中数学

必修4

配套人民教育出版社实验教科书

A版

陕西出版集团　陕西人民教育出版社

◎金星教育系列丛书　全心全意解疑解难◎

中学教材全解

学案版

高中数学必修4

配套人民教育出版社实验教科书

总 主 编　薛金星
本册主编　王海红
副 主 编　刘理强

A版

陕西出版集团　陕西人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解:学案版:人教A版. 高中数学. 4:必修/薛金星主编. —西安:陕西人民教育出版社,2011.7

ISBN 978—7—5450—1098—5

Ⅰ.①中… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第141289号

中学教材全解(学案版)·高中数学必修4(人教实验A版)

陕西出版集团
陕西人民教育出版社　出版发行

(陕西省西安市丈八五路58号)

各地书店经销　北京市汇祥印务有限公司

880×1230毫米　16开本　9印张　380千字

2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷

ISBN 978—7—5450—1098—5

定价:18.80元

零距离直击高考

模块考点及对应高考题分布概览

考点		经典题分布及分值		
三角函数	任意角的概念、弧度制			
	任意角的三角函数及诱导公式	山东理,3,,5分[第 11 页] 课标全国理,5,5分	大纲全国Ⅰ理 2,5分[第 39 页] 大纲全国Ⅰ文,1,5分	全国II理,3,5分[第 86 页] 全国I文,1,5分 北京文,9,5分
	三角函数的图象性质及应用	湖北理,3,5分 辽宁理,16,5分[第 39 页] 安徽理,9,5分[第 86 页] 山东理,6,5分 大纲全国理,5,5分 江苏,9,5分	湖北理,3,5分[第 39 页] 辽宁理,16,5分[第 40 页] 安徽理,9,,5分[第 86 页] 山东理,6,5分 大纲全国理,5,5分 江苏,9,5分	海南、宁夏理,14,5分[第 87 页] 全国Ⅰ理,8,5分 浙江理,8,5分 山东理,3,5分 天津文 7,5分
平面向量	平面向量的概念及线性运算	四川理,4,5分 山东理,12,5分	四川理,5,5分[第 62 页] 大纲全国Ⅱ理,8,5分[第 87 页]	广东文,3,5分 山东理,7,5分
	平面向量的基本定理及坐标表示	北京理,10,5分[第 53 页] 湖南文,13,5分[第 63 页]	陕西理,11,5分[第 63 题] 湖北理,5,5分	湖北文,1,5分[第 88 页] 浙江文,5,5分 北京文,2,5分
	平面向量的数量积及应用	江苏,10,5分[第 56 页] 课标全国理,10,5分[62 页] 辽宁理,10,5分[第 62 页] 安徽理,13,5分[第 62 页] 江西理,11,5分[第 87 页]	安徽理,3,5分[第 62 页] 课标全国文,2,5分[第 62 页] 湖南文,6,5分 广东文,5,5分 江西理,13,4分	广东理,6,5分 湖南文,16,,12[第 63 页] 江苏,15,14分
三角恒等变换	两角和与差的三角函数公式	江苏,7,5分[第 73 页] 浙江理,6,5分[第 79 页] 福建文,9,5分[第 79 页] 辽宁理,7,5分[第 88 页] 重庆理,14,5分 福建理,3,5分 广东理,16,12分	课标全国理,9,5分[第 79 页] 课标全国文,10,5分[第 79 页] 浙江文,12,4分[第 79 页] 大纲全国I理,14,5分[第 80 页] 大纲全国II理,13,5分 陕西文,3,5分	全国I理,16,5分 上海理,6,4分 北京文,15,12分 广东理,16,12分
	简单的三角恒等变换	北京理,15,13分[第 80 页] 课标全国理,11,5分[第 81 页] 天津理,15,13分[第 88 页] 上海理,8,4分	北京理,15,13分[第 80 页] 湖南文,16,12分[第 80 页] 山东理,17,12分	安徽理,8,5分 江西文,4,5分 山东理,17,12分

注:表中[第×页]表示该题在本书中的页码.标有页码的题目,具有典型性、新颖性,读者通过这些题目足以洞析、把握该考点;未标注本书页码的高考题,因其综合性等其他因素,不适合于本书读者同步使用,故本书未选用.

陕西出版集团　陕西人民教育出版社

目录

CONTENTS

第一章　三角函数

目录

CONTENTS

目录

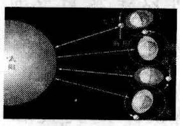
CONTENTS

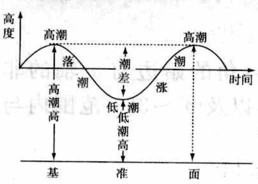
目录

CONTENTS

第一章　三角函数

本章激趣导学





由于地球、月球在不断运动，地球、月球与太阳的相对位置在发生周期性变化，因此海水在月球和太阳引力作用下也会发生周期性涨落现象，左图展示的就是潮汐变化的周期性.

事实上，现实世界中的许多运动、变化都具备周期性，本章要学习的三角函数就是刻画这种周期性变化规律的数学模型.

三角函数是基本初等函数，它是描述周期现象的重要数学模型，在数学和其他领域中具有重要的作用，通过本章的学习要达到以下要求：

了解任意角和弧度制的概念，能进行弧度与角度的互化；理解任意角三角函数的定义，能利用单位圆中的三角函数线推导出$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\pi\pm\alpha$的正弦、余弦、正切的诱导公式，画出$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$的图象，了解三角函数的周期性；理解正弦函数、余弦函数在区间$[0,2\pi]$的性质(如单调性、最大值和最小值、与x轴交点等)，理解正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的单调性；理解同角三角函数的基本关系式；了解函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的物理意义，能画出$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象，了解参数$A,\omega,\varphi$对函数图象变化的影响；了解三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型，会用三角函数解决一些简单实际问题.

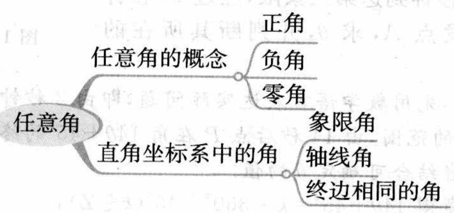
1.1　任意角和弧度制

1.1.1　任意角

学前要点预览

XUEQIANYAODIANYULAN

知识要点图解



相关知识链接

1. 角的定义

静止的观点：有公共端点的两条射线组成的图形叫做角.

运动的观点：一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形叫做角.

2. 集合的关系与运算

集合的包含关系，集合的交、并、补运算，集合的合并.

知识要点精解

ZHISHIYAODIANJINGJIE

重点难点解读

一、任意角的概念

(1)角可以看成是平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.

(2)正角:按逆时针方向旋转形成的角.

(3)负角:按顺时针方向旋转形成的角.

(4)零角:一条射线没有作任何旋转,我们称它形成了一个零角.

提示:(1)角的概念是通过角终边的运动推广到了任意角,包括正角、负角和零角;确定任意角的度数关键看终边旋转的方向和圈数,由此我们可以看出终边位置的重要性.

(2)角的范围不再局限于$0°\sim360°$.

(3)当角的始边相同时,角相等则终边相同,而终边相同的角不一定相等.

(4)在不引起混淆的情况下,"角α"或"$\angle\alpha$"可以简记为"α".

二、象限角

(1)象限角:使角的顶点与原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合,那么,角的终边在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.

(2)轴线角:终边落在坐标轴上的角称为轴线角.

(3)象限角的集合:

第一象限角的集合为

$\{x\mid k\cdot360°<x<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第二象限角的集合为

$\{x\mid k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第三象限角的集合为

$\{x\mid k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第四象限角的集合为

$\{x\mid k\cdot360°+270°<x<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(4)轴线角的集合:

终边落在x轴的非负半轴上的角的集合为

$\{x\mid x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在x轴的非正半轴上的角的集合为

$\{x\mid x=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在x轴上的角的集合为

$\{x\mid x=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在y轴的非负半轴上的角的集合为

$\{x\mid x=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在y轴的非正半轴上的角的集合为

$\{x\mid x=k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$;

终边落在y轴上的角的集合为

$\{x\mid x=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

三、终边相同的角

所有与角α终边相同的角,连同角α在内,可构

转下页左栏

经典例题诠释

例1　在下列说法中:

①$0°\sim90°$的角是第一象限角;

②第二象限角大于第一象限角;

③钝角都是第二象限角;

④小于$90°$的角都是锐角.

其中错误说法的序号为________(错误说法的序号都写上).

解析:①$0°\sim90°$的角是指$[0°,90°)$,$0°$角不属于任何象限,所以①不正确.

②$120°$是第二象限角,$390°$是第一象限角,显然$390°>120°$,所以②不正确.

③钝角的范围是$(90°,180°)$,显然是第二象限角,所以③正确.

④锐角的范围是$(0°,90°)$,小于$90°$的角也可以是零角或负角,所以④不正确.

答案:①②④

点评:判断说法错误,只需举一个反例即可.解决本题关键在于正确理解各种角的定义.

例2　已知角的顶点与坐标原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合,指出下列各角是第几象限角,以及$0°\sim360°$范围内与其终边相同的角.

①$485°$;②$-35°$;③$770°$;④$-500°$.

解题提示:依据终边相同的角的思想,去掉$360°$的整数倍,将角转化到$0°\sim360°$之间.

解:①$485°=125°+360°$,所以在$0°\sim360°$范围内,与$485°$终边相同的角是$125°$,所以$485°$是第二象限角.

②$-35°=325°-360°$,所以在$0°\sim360°$范围内,与$-35°$终边相同的角是$325°$,所以$-35°$是第四象限角.

③$770°=50°+2\times360°$,所以在$0°\sim360°$范围内,与$770°$终边相同的角是$50°$,所以$770°$是第一象限角.

④$-500°=220°-2\times360°$,所以在$0°\sim360°$范围内,与$-500°$终边相同的角是$220°$,所以$-500°$是第三象限角.

点评:本题也可采用图象法,在直角坐标系中作出各角,一般情况下,为方便起见,往往采用这种转化法.

例3　如图1-1-4,点A在半径为1且圆心在原点的圆上,且$\angle AOx=45°$.点P从点A处出发,按逆时针方向匀速沿单位圆旋转.已知点P在1秒钟内转过的角度为$\theta(0°<\theta<180°)$,经过2秒钟到达第三象限,经过14秒钟后又回到出发点A,求θ,并判断其所在的象限.

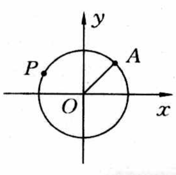


图1-1-4

解题提示:先用数学语言表达实际问题,即由2秒钟到达第三象限确定角θ的范围,由14秒后点P在角$14\theta+45°$的终边上得到等量关系,两者结合可确定θ的值.

解:由题意得$14\theta+45°=k\cdot360°+45°(k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\theta=\dfrac{k\cdot180°}{7}(k\in\mathbf{Z})$.

又$180°<2\theta+45°<270°$,即$67.5°<\theta<112.5°$,

$\therefore 67.5°<\dfrac{k\cdot180°}{7}<112.5°$,且$k\in\mathbf{Z}$,

转下页右栏

成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

提示：(1)α 是任意角.

(2)$k\in\mathbf{Z}$ 这一条件必不可少.

(3)终边相同的角有无数个，它们相差 $360°$ 的整数倍.

(4)$k\cdot360°$ 与 α 之间是"+"，如 $k\cdot360°-30°$ 应看成 $k\cdot360°+(-30°)$.

方法技巧归纳

一、象限角的判定

象限角的判定方法有两种：

(1)图象法：直接在直角坐标系中作出角的终边.

(2)转化法：依据终边相同的角的思想，将角转化到 $0°\sim360°$ 之间.

二、终边相同的角的表示

终边相同的角的表示除了正确写出终边相同的角的集合，还必须熟练掌握集合的合并运算.

示例 1　写出终边在图 1-1-1 所示直线上的角的集合.

解：由图形易知，在 $0°\sim360°$ 范围内，终边在直线 $y=-x$ 上的角有两个，即 $135°$ 和 $315°$，

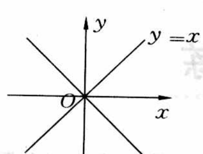


图 1-1-1

因此，终边在直线 $y=-x$ 上的角的集合 $S_1=\{\beta|\beta=135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=315°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=135°+2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=135°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=135°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

同理可知，终边在直线 $y=x$ 上的角的集合 $S_2=\{\beta|\beta=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，

于是所求角的集合 $S=S_2\cup S_1=\{\beta|\beta=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=135°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=45°+2k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=45°+(2k+1)\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=45°+k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

三、区域角的表示(拓展)

介于某两条终边间的角的集合叫做区域角. 区域角的写法是：首先依逆时针方向写出一周内边界所对应的角，再按照终边相同的角在两端加 $k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$.

示例 2　如图 1-1-2，写出顶点在原点、始边重合于 x 轴非负半轴、终边落在阴影部分的角 α 的集合.

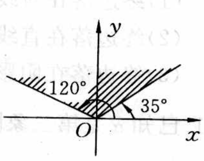


图 1-1-2

解：终边落在阴影部分的角 α 的集合为 $S=\{k\cdot360°+35°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$.

转下页左栏

$\therefore k=3$ 或 $k=4$.

$\therefore \theta=\dfrac{540°}{7}$ 或 $\theta=\dfrac{720°}{7}$.

易知 $0°<\dfrac{540°}{7}<90°,90°<\dfrac{720°}{7}<180°$，

$\therefore \theta$ 在第一象限或第二象限.

点评：本题主要考查终边相同的角与不等式知识，解题过程中要特别注意 $k\in\mathbf{Z}$ 这个条件的使用.

例 4　写出终边在图 1-1-5 所示直线上的角的集合.

解：由题意得，满足条件的角的集合 $S=\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=150°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=240°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=330°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=150°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=60°+2k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=60°+(2k+1)\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

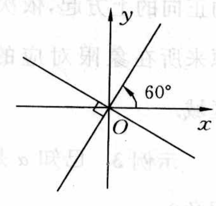


图 1-1-5

点评：终边相同的角之间相差 $360°$ 的整数倍，终边在同一直线上的角之间相差 $180°$ 的整数倍，终边在相互垂直的两条直线上的角之间相差 $90°$ 的整数倍.

例 5　已知集合 $A=\{\alpha|k\cdot180°+30°<\alpha<k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\beta|k\cdot360°-45°<\beta<k\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$.

求：(1)$A\cap B$；(2)$A\cup B$.

解题提示：在直角坐标系中分别画出集合 A、B 所包含的区域，结合图形写出 $A\cap B$，$A\cup B$.

解：由题意可得图 1-1-6.

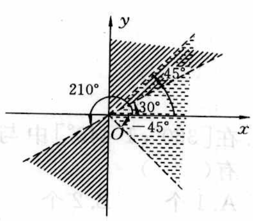


图 1-1-6

由图可知，

$A\cap B=\{\theta|30°+k\cdot360°<\theta<45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

$A\cup B=\{\gamma|k\cdot360°-45°<\gamma<k\cdot360°+90°$ 或 $k\cdot360°+210°<\gamma<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$.

点评：本题利用数形结合的思想，使问题的答案一目了然，我们平时遇到的许多数学问题，"缺形少直观"、"缺数难入微".

例 6　若角 α 是第一象限角，问 $-\alpha$、2α、$\dfrac{\alpha}{3}$ 是第几象限角？

解题提示：解决这类问题有两种方法：分类讨论或几何法.

解：$\because \alpha$ 是第一象限角，

$\therefore k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°(k\in\mathbf{Z})$.

(1)$-k\cdot360°-90°<-\alpha<-k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore -\alpha$ 所在区域与 $(-90°,0°)$ 范围相同，

故 $-\alpha$ 是第四象限角.

(2)$2k\cdot360°<2\alpha<2k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore 2\alpha$ 所在区域与 $(0°,180°)$ 范围相同，

故 2α 是第一、二象限角.

(3)$k\cdot120°<\dfrac{\alpha}{3}<k\cdot120°+30°(k\in\mathbf{Z})$.

方法一：(分类讨论)当 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$ 时，

$n\cdot360°<\dfrac{\alpha}{3}<n\cdot360°+30°(n\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \dfrac{\alpha}{3}$ 是第一象限角；

转下页右栏

四、角$\frac{\alpha}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$象限的确定(拓展)

已知α是第几象限角,要确定$\frac{\alpha}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$所在象限的常用方法有两种:

(1)分类讨论:先找到$\frac{\alpha}{n}$的范围,然后对n进行讨论.

(2)几何法:先把各象限分成n等份,再从x轴的正向的上方起,依次将各区域标上1、2、3、4,则α原来所在象限对应的标号即为$\frac{\alpha}{n}$终边所落在的区域.

示例3 已知α是第二象限角,则$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角?

解:如图1-1-3,先将各象限分成2等份,再从x轴的正向的上方起,依次将各区域标上1、2、3、4,则标有2的区域即为$\frac{\alpha}{2}$终边所落在的区域,故$\frac{\alpha}{2}$为第一、三象限角.

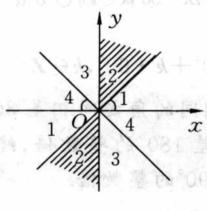


图1-1-3

当$k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$时,

$n\cdot360°+120°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+150°(n\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ \frac{\alpha}{3}$是第二象限角;

当$k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$时,

$n\cdot360°+240°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+270°(n\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ \frac{\alpha}{3}$是第三象限角.

综上可知:$\frac{\alpha}{3}$是第一、二或第三象限角.

方法二:(几何法)

如图1-1-7,先将各象限分成3等份,再从x轴的正向的上方起,依次将各区域标上1、2、3、4,则标有1的区域即为$\frac{\alpha}{3}$终边所落在的区域,故$\frac{\alpha}{3}$为第一、二或第三象限角.

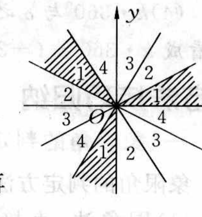


图1-1-7

点评:此题几何法依据的是数形结合的思想,简洁直观;分类讨论法要对n的取值分以下几种情况进行讨论:被n整除;被n除余1;被n除余2;…;被n除余$n-1$.然后方可下结论.

本节提升训练

BENJIETISHENGXUNLIAN

[答案见第117页]

1.在$[360°,1\ 440°]$中与$-21°16'$终边相同的角有( ) ←要点三

A.1个 B.2个 C.3个 D.4个

2.下列说法正确的是( ) 要点三→ ←要点二

A.三角形的内角必是第一、二象限内的角

B.第一象限角必是锐角

C.不相等的角终边一定不同

D.$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°\pm90°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

3.角$\alpha=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$的终边落在( ) ←方法技巧一

A.第一或第三象限

B.第一或第二象限

C.第二或第四象限

D.第三或第四象限

4.α是一个任意角,则α与$-\alpha$的终边( ) ←方法技巧一

A.关于坐标原点对称

B.关于x轴对称

C.关于直线$y=x$对称

D.关于y轴对称

5.设$A=\{$小于90°的角$\}$,$B=\{$锐角$\}$,$C=\{$第一象限角$\}$,$D=\{$小于90°而不小于0°的角$\}$,那么有( ) ←要点二

A.$B\subsetneqq C\subsetneqq A$ B.$B\subsetneqq A\subsetneqq C$

C.$D\subsetneqq(A\cap C)$ D.$C\cap D=B$

6.若α是第一象限的角,则$-\frac{\alpha}{2}$是( ) ←方法技巧四

A.第一象限的角

B.第一或第四象限的角

C.第二或第三象限的角

D.第二或第四象限的角

7.与1 840°终边相同的最小正角的度数是______,与$-1\ 840°$终边相同的最小正角的度数是______. 要点三→

8.角α满足$180°<\alpha<360°$,角5α与α有相同的始边,且又有相同的终边,那么角$\alpha=$______. 方法技巧二→

9.若角α、β的始边相同且终边互为反向延长线,则α与β之间的关系是:______. 方法技巧三→

10.如图1-1-8,分别写出适合下列条件的角的集合:

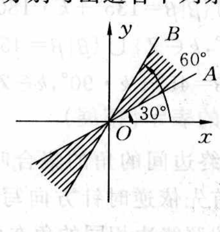


图1-1-8

(1)终边落在射线OB上;

(2)终边落在直线OA上;

(3)终边落在阴影区域内(含边界).

11.已知α是第三象限角,求$\frac{\alpha}{3}$为第几象限角? 方法技巧四→

12.若角α的顶点与原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合,终边落在经过点$(\sqrt{3},1)$的直线上,写出角α的集合,当$\alpha\in(-360°,360°)$时,求α. 方法技巧二→

1.1.2　弧度制

学前要点预览

XUEQIANYAODIANYULAN

知识要点图解

- 弧度制
  - 概念
  - 弧度数
  - 弧度与角度的换算
    - 角度化为弧度
    - 弧度化为角度
    - 特殊角的弧度数
  - 弧长公式与面积公式

相关知识链接

1、角度制：

周角的$\frac{1}{360}$为1度的角，这种用度作单位来度量角的制度叫做角度制．

注意：角的大小不因为圆的大小而改变，所以角度是一个与圆半径无关的量．

2、用角度制表示扇形的公式：

半径为R，圆心角为n°的扇形的弧长公式和面积公式为：$l=\frac{n\pi R}{180}$，$S=\frac{n\pi R^2}{360}$．

知识要点精解

ZHISHIYAODIANJINGJIE

重点难点解读

一、弧度制的概念

长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角，弧度记作 rad．这种以弧度为单位来度量角的制度叫做弧度制．

提示：(1)在用弧度制表示角的时候，弧度二字或 rad 可以略去不写．

(2)辨析弧度制与角度制：

①以弧度和度为单位的角，都是一个与半径无关的量．②弧度制是以"弧度"为单位来度量角的单位制，角度制是以"度"为单位来度量角的单位制；1弧度$\neq 1^\circ$．③1弧度是弧长等于半径长的弧所对的圆心角的大小，而1度是圆周的$\frac{1}{360}$所对的圆心角的大小．④ 用弧度制和角度制来度量零角，单位不同，但数量相同(都是0)；用弧度制和角度制来度量任意非零角，单位不同，数量也不同．⑤弧度制是十进制，它的表示是用一个实数表示，而角度制是六十进制，角度的单位"°"不可省略．

二、角度与弧度的换算

1. 圆心角与弧长的关系

一般的有：正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是0．

如图1-1-9，如果半径为r的圆的圆心角α所对弧的长为l，那么角α的弧度数的绝对值是$|\alpha|=\frac{l}{r}$．

圆心角α为周角时，$l=2\pi r$，则$\alpha=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$；

圆心角α为平角时，$l=\pi r$，则$\alpha=\frac{\pi r}{r}=\pi$．

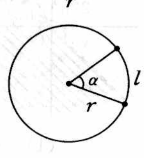


图 1-1-9

转下页左栏

经典例题诠释

例1　下列说法正确的是(　　)

A. 大圆中1弧度的圆心角比小圆中1弧度的圆心角大

B. 弧度只能用来表示正角

C. 任意角的集合可以与实数集$\mathbf{R}$之间建立一种一一对应关系

D. 圆心角为1弧度的扇形的弧长都相等

解析：1弧度的圆心角与圆的半径无关，故A错误；弧度和角度一样可以用来表示任意角，故B错误；依据弧度制的意义可知C正确；依据弧长公式可知1弧度的扇形的弧长还与半径有关，故D错误．

答案：C

点评：解决本题要紧扣弧度制的概念和意义，正确的区别弧度制与角度制，同时灵活掌握扇形的弧长和面积公式．

例2　5弧度的角的终边所在的象限为(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解题提示：因为$\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$，所以5弧度的角的终边在第四象限．

答案：D

点评：在以后的学习中大家应熟练掌握用弧度表示角的方法，熟记角度与弧度的换算公式．

例3　(1)将下列各角进行角度与弧度的互化(角度保留到小数点后第二位)：

$\alpha_1=-\frac{11}{7}\pi$，$\alpha_2=\frac{511}{6}\pi$，$\alpha_3=9$，$\alpha_4=-855^\circ$．

(2)把下列各角化为$2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$的形式：

①$\frac{16\pi}{3}$；②-315°；③$-\frac{11\pi}{7}$．

(3)在$[0^\circ,720^\circ]$中找出与$\frac{2\pi}{5}$终边相同的角．

转下页右栏

2. 角度与弧度的换算公式

由 $180°=\pi$ rad 得：

$1°=\frac{\pi}{180}$ rad ≈ 0.01745 rad .

反过来有 $1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'$.

提示：角的概念推广以后，在弧度制下，任意角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立起一一对应关系，即每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角(即弧度数等于这个实数的角)与它对应. 如图 1-1-10.

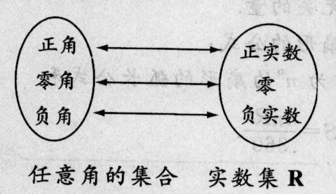


图 1-1-10

3. 特殊角的角度数与弧度数的对应表

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
角度	135°	150°	180°	210°	225°	240°
弧度	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
角度	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

三、用弧度制表示弧长及扇形面积公式

(1)弧长公式：$l=r\cdot|\alpha|$.

(2)扇形面积公式：$S=\frac{1}{2}l\cdot r$.

提示：(1)运用弧度制下的弧长及扇形面积公式比角度制下的公式简单很多，但前提条件是 α 为弧度制.

(2)运用公式时要熟练掌握公式的变形使用：

①$|\alpha|=\frac{l}{r}$，$r=\frac{l}{|\alpha|}$；

②$S=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$，$|\alpha|=\frac{2S}{r^2}$.

方法技巧归纳

一、用弧度表示终边相同的角和区域角

1. 用弧度表示与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内的集合为 $\{\beta|\beta=2k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 用弧度表示区域角，实质是角度表示区域角在弧度制下的应用，必要时要进行角度与弧度的换算.

转下页左栏

解题提示：(1)$180°=\pi$ rad 是进行"弧度"与"角度"换算的关键.

(2)表示成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的形式，调整 k 使角在 $[0,2\pi)$ 内.

(3)把弧度换算成角度，写出终边相同的角的集合，调整 k 使角在 $[0°,720°]$ 内.

解：(1)$\alpha_1=-\frac{11}{7}\pi=-\frac{11}{7}\times180°\approx-282.86°$；

$\alpha_2=\frac{511}{6}\pi=\frac{511}{6}\times180°=15330°$；

$\alpha_3=9=9\times\frac{180°}{\pi}\approx516.66°$；

$\alpha_4=-855°=-855°\times\frac{\pi}{180°}=-\frac{19}{4}\pi$.

(2)① $\frac{16\pi}{3}=4\pi+\frac{4\pi}{3}$；

② $-315°=-360°+45°=-2\pi+\frac{\pi}{4}$；

③ $-\frac{11\pi}{7}=-2\pi+\frac{3\pi}{7}$.

(3)$\because \frac{2\pi}{5}=\frac{2}{5}\times180°=72°$，

$\therefore$ 终边与 $\frac{2\pi}{5}$ 相同的角为 $\theta=72°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$.

当 $k=0$ 时，$\theta=72°$；当 $k=1$ 时，$\theta=432°$.

$\therefore$ 在 $[0°,720°]$ 中与 $\frac{2\pi}{5}$ 终边相同的角为 $72°$，$432°$.

点评：在进行"弧度"与"角度"换算时，若无特别要求，切不可进行近似计算，也不必将 π 化为小数.

例4　已知一半径为 R 的扇形，它的周长等于所在圆的周长，那么扇形的圆心角是多少弧度？合多少度？扇形的面积是多少？

解题提示：已知扇形周长即可求出扇形弧长，逆用弧长公式可求扇形的圆心角的弧度数；运用扇形的面积公式易求扇形的面积.

解：$\because$ 扇形的周长 $=2R+l=2\pi R$，

$\therefore$ 扇形的弧长 $l=2(\pi-1)R$，

$\therefore$ 扇形的圆心角 $\alpha=2(\pi-1)$ rad，合 $\left(\frac{360(\pi-1)}{\pi}\right)°$.

$\therefore$ 扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lR=(\pi-1)R^2$.

点评：本题主要考查弧长公式和扇形的面积公式，弧度制下的弧长公式和扇形的面积公式是高考命题的一个热点，在运用该公式解决问题时，要注意公式的灵活变形.

例5　用弧度表示终边落在图 1-1-11 所示的阴影部分内(不包括边界)的角的集合.

解题提示：求出阴影部分边界角的弧度数，结合区域角的旋转方向及终边相同的角的表示方法写出区域角的范围.

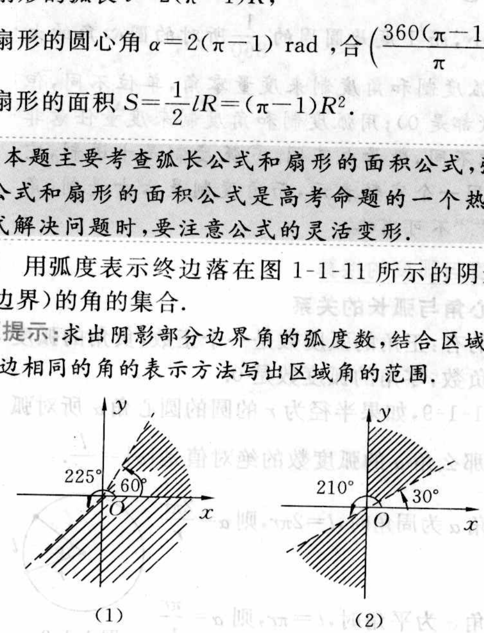


图 1-1-11

转下页右栏

提示:在同一个代数式中弧度制与角度制不能同时出现.例如,在表示与60°角终边相同的角时不能写成 $2k\pi+60°,k\in\mathbf{Z}$ 或 $k\cdot360°+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,而应该写成 $2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$ 或 $k\cdot360°+60°,k\in\mathbf{Z}$.在表示区域角时 $k\cdot360°+\frac{\pi}{3}<\alpha<2k\pi+115°,k\in\mathbf{Z}$ 是错误的写法,而应该写成 $k\cdot360°+60°<\alpha<k\cdot360°+115°,k\in\mathbf{Z}$ 或 $2k\pi+\frac{\pi}{3}<\alpha<2k\pi+\frac{23}{36}\pi,k\in\mathbf{Z}$.

二、扇形弧长、面积公式的应用

扇形的弧长、面积、周长、圆心角通常涉及四个量:半径 r、圆心角 α、弧长 l、面积 S,已知其中的三个量一定能求得第四个量(通过方程求得),已知其中的两个量能求得剩余的两个量(通过方程组求得).

示例 已知扇形的周长为 8 cm,圆心角为 2 rad,求该扇形的面积.

解:设扇形的半径为 r cm,弧长为 l cm,

根据题意得 $\begin{cases} l=2r, \\ l+2r=8, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} r=2, \\ l=4. \end{cases}$

所以扇形的面积为:$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times2\times4=4(\text{cm}^2)$.

解:(1) $\left\{\theta\,\middle|\,2k\pi-\frac{3\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

(2) $\left\{\theta\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{6}<\theta<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

点评:(1)弧度与角度不能混用;(2)终边在一条直线上的角可以合并为 $\{\theta\,|\,\theta=\alpha+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

例6 一个扇形的周长为 20 cm,当扇形的圆心角 α 等于多少弧度时,这个扇形的面积最大?并求出这个扇形的最大面积.

解题提示:运用扇形的面积公式和弧长公式建立函数关系,运用函数的性质来解决最值问题.

解:设扇形的半径为 r,则弧长为 $l=20-2r$.

由 $0<l<2\pi r$ 得 $0<20-2r<2\pi r$,∴ $\frac{10}{\pi+1}<r<10$.

于是扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}(20-2r)r=-(r-5)^2+25\left(\frac{10}{\pi+1}<r<10\right)$.

当 $r=5$ 时,$l=10$,$\alpha=2$,S 取到最大值,此时最大值为 25 cm².

故当扇形的圆心角 α 等于 2 弧度时,这个扇形的面积最大,最大面积是 25 cm².

点评:求扇形最值的一般方法是根据扇形的面积公式,将其转化为关于半径(或圆心角)的函数表达式,进而求解.

本节提升训练

BENJIETISHENGXUNLIAN

[答案见第117页]

1. 扇形的周长是16,圆心角是2弧度,则扇形面积是(　　). ←要点三

A. 16π　B. 32π　C. 16　D. 32

2. 下列表示中不正确的是(　　). ←方法技巧一

A. 终边在 x 轴上角的集合是 $\{\alpha\,|\,\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

B. 终边在 y 轴上角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. 终边在坐标轴上角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=k\cdot\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. 终边在直线 $y=x$ 上角的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

3. 已知两角 α、β 之差为 1°,其和为 1 弧度,则 α、β 的大小为(　　). ←要点二

A. $\frac{\pi}{90}$和$\frac{\pi}{180}$　B. 28°和27°

C. 0.505 和 0.495　D. $\frac{180+\pi}{360}$和$\frac{180-\pi}{360}$

4. 若集合 $A=\left\{x\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant2\}$,则集合 $A\cap B$ 为(　　). ←方法技巧一

A. $[-1,0]\cup\left[\frac{\pi}{3},1\right]$

B. $\left[\frac{\pi}{3},2\right]$

C. $[-2,0]\cup\left[\frac{\pi}{3},2\right]$

D. $\left[-2,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},2\right]$

5. 设 $\alpha_1=7.412$,$\alpha_2=-9.99$,则 α_1,α_2 分别是第________象限角. 要点二→

6. 与 $-1\ 050°$ 终边相同的最小正角是(用弧度制表示)__________. 要点二→

7. 时钟从6时50分走到10时40分,这时分针旋转了________弧度. 要点二→

8. 设扇形的周长为 8 cm,面积为 4 cm²,则扇形的圆心角的弧度数的绝对值是________. 要点三→

9. 用弧度制表示: 方法技巧一→

(1)终边在 y 轴非正半轴上的角的集合;

(2)终边在 x 轴非负半轴上的角的集合;

(3)终边在第二、四象限角平分线上的角的集合;

(4)终边落在 x 轴上方的角的集合.

10. 写出与 $-\frac{\pi}{3}$ 终边相同的角的集合 S,并把 S 中在 $-4\pi\sim4\pi$ 之间的角写出来. 方法技巧一→

11. 已知扇形 AOB 的圆心角为120°,半径为6,求此扇形所含弓形的面积. 方法技巧二→

12. 已知 $\theta\in\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,判断角 θ 所在象限. 方法技巧一→

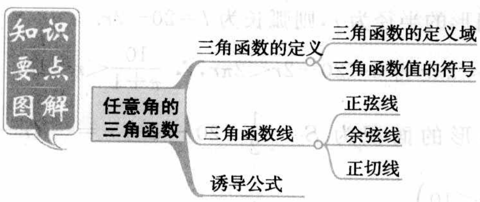
13. 若 θ 角的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同,在 $[0,2\pi)$ 内哪些角的终边与 $\frac{\theta}{3}$ 角的终边相同. 方法技巧一→

14. 已知扇形面积为 S,扇形圆心角为 α,求扇形周长与圆心角 α 的关系式. 方法技巧二→

1.2 任意角的三角函数

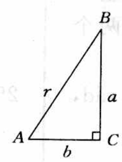
1.2.1 任意角的三角函数

学前要点预览
XUEQIANYAODIANYULAN



相关知识链接

在初中,锐角三角函数定义(正弦,余弦,正切)

图　形	定　义
$(r=\sqrt{a^2+b^2})$ 	$\sin A=\dfrac{a}{r}=\dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}}$ $\cos A=\dfrac{b}{r}=\dfrac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$ $\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\text{对边}}{\text{邻边}}$

知识要点精解
ZHISHIYAODIANJINGJIE

重点难点解读

一、任意角的三角函数的定义

1. 单位圆

在直角坐标系中,我们称以原点 O 为圆心,以单位长度为半径的圆为单位圆.

2. 利用单位圆定义任意角的三角函数

我们可以利用单位圆定义任意角的三角函数.

如图 1-2-1,设 α 是一个任意角,它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$,那么:

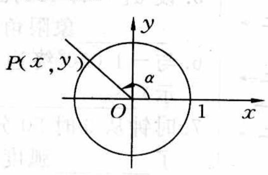


图 1-2-1

(1)y 叫做 α 的正弦,记作 $\sin\alpha$,即 $\sin\alpha=y$;

(2)x 叫做 α 的余弦,记作 $\cos\alpha$,即 $\cos\alpha=x$;

(3)$\dfrac{y}{x}$叫做 α 的正切,记作 $\tan\alpha$,即 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq0)$.

3. 利用角 α 终边上任意一点的坐标定义任意角的三角函数

设 α 是一个任意角,α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y),它与原点的距离是 $r(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$,那么:

(1)比值$\dfrac{y}{r}$叫做 α 的正弦,记作 $\sin\alpha$,即 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$.

(2)比值$\dfrac{x}{r}$叫做 α 的余弦,记作 $\cos\alpha$,即 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$.

(3)比值$\dfrac{y}{x}$叫做 α 的正切,记作 $\tan\alpha$,即 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时,α 的终边在 y 轴上,这时点 P 的横坐标 x 等于 0,所以 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$无意义.除此之外,对于

转下页左栏

经典例题诠释

例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(2,-3)$,求 α 的三个三角函数值.

解题提示:先由 P 点坐标算出 r 的值,再利用三角函数的定义算出三个三角函数值.

解:因为 $x=2,y=-3$,所以 $r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$,

于是 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}=-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$,

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{3}{2}$.

点评:已知角终边上一点的坐标,则 x,y,r 易确定,可直接算出三角函数值.

例 2 已知角 α 的终边过点 $(a,2a)(a\neq0)$,求 α 的三个三角函数值.

解题提示:已知点的坐标,先求出 r 的值,但是要考虑到 a 的符号问题,分别求出 $a>0$ 和 $a<0$ 时的对应三角函数值.

解:因为过点 $(a,2a)(a\neq0)$,

所以 $r=\sqrt{5}|a|,x=a,y=2a$.

当 $a>0$ 时,$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}|a|}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}a}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{a}{\sqrt{5}a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$\tan\alpha=2$;

当 $a<0$ 时,$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}|a|}=\dfrac{2a}{-\sqrt{5}a}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{a}{-\sqrt{5}a}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$\tan\alpha=2$.

转下页右栏

确定的角 α，上述三个值都是唯一确定的.所以，正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，我们将它们统称为三角函数.由于任意角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，三角函数可以看成是自变量为实数的函数.

注意：(1)三角函数值是一个比值，是一个实数，这个实数的大小和点 $P(x,y)$ 在终边上的位置无关，而由角 α 的终边位置所决定.对于确定的角 α，其终边的位置也是唯一确定的.

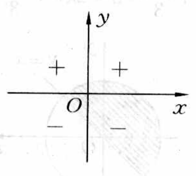
(2) $\sin\alpha$ 是一个整体，不是 sin 与 α 的乘积，离开 α 的 sin、cos、tan 等是没有意义的.

二、三角函数的定义域和函数值的符号

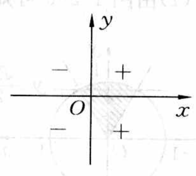
1. 三角函数的定义域

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\in\mathbf{R}\}$
$\cos\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\in\mathbf{R}\}$
$\tan\alpha$	$\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha\in\mathbf{R}\text{ 且 }\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

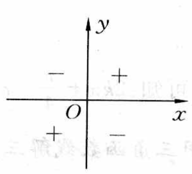
2. 三角函数值在各象限的符号



正弦



余弦



正切

图 1-2-2

提示：三角函数值的符号是根据三角函数定义和各象限内坐标符号导出来的.从原点到角的终边上任意一点的距离 r 总是正值.根据三角函数定义知：正弦值的符号取决于纵坐标 y 的符号，余弦值的符号取决于横坐标 x 的符号，正切值的符号是由 x、y 符号共同决定的，即 x、y 同号为正，异号为负.

三、三角函数线

1. 有向线段

带有方向的线段叫做有向线段.

2. 三角函数线的定义

设任意角 α 的顶点在原点 O，始边与 x 轴非负半轴重合，终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M；过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线，它与角 α 的终边或其反向延长线交与点 T.

转下页左栏

点评：点的坐标若含有参数，需要进行分类讨论.

例 3　已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$，那么角 θ 是(　　)

A. 第一或第二象限角

B. 第二或第三象限角

C. 第三或第四象限角

D. 第一或第四象限角

解析：$\because\ \cos\theta\cdot\tan\theta<0$，$\therefore\begin{cases}\cos\theta<0,\\ \tan\theta>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta>0,\\ \tan\theta<0.\end{cases}$

由 $\begin{cases}\cos\theta<0,\\ \tan\theta>0,\end{cases}$ 得角 θ 为第三象限角.

由 $\begin{cases}\cos\theta>0,\\ \tan\theta<0,\end{cases}$ 得角 θ 为第四象限角.

$\therefore$ 角 θ 为第三或第四象限角.

答案：C

点评：解决这类问题关键是明确在各个象限内三角函数值的符号，特别要注意是否需要分类讨论.

例 4　判断下列三角函数值的符号.

(1) $\sin 3,\cos 4,\tan 5$；

(2) $\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}$($\theta$ 为第二象限角).

解题提示：考查利用角所在象限及三角函数值在各象限的符号解决有关问题，题中的 3，4，5，$\sin\theta$，$\cos\theta$ 都表示角的弧度数.

解：(1) $\because\ \frac{\pi}{2}<3<\pi,\pi<4<\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$，

$\therefore\ \sin 3>0,\cos 4<0,\tan 5<0.$

(2) $\because\ \theta$ 为第二象限角，

$\therefore\ 0<\sin\theta<1<\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}<-1<\cos\theta<0$，

$\therefore\ \sin(\cos\theta)<0,\cos(\sin\theta)>0,\therefore\ \dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}<0.$

点评：解此类问题的关键在于确定角 α 的范围，熟记口诀“一全正、二正弦、三正切、四余弦”.

例 5　分别作出 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{5}$ 的正弦线、余弦线和正切线，并比较 $\sin\frac{2\pi}{3}$ 和 $\sin\frac{4\pi}{5}$，$\cos\frac{2\pi}{3}$ 和 $\cos\frac{4\pi}{5}$，$\tan\frac{2\pi}{3}$ 和 $\tan\frac{4\pi}{5}$ 的大小.

解题提示：利用三角函数线比较三角函数值的大小时，一看三角函数线的长度，二看正负.

解：如图 1-2-5.

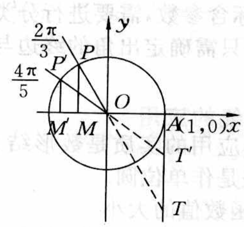


图 1-2-5

转下页右栏