徐森林 等 编

实变函数习题精选

清华大学出版社

实变函数习题精选

徐森林　胡自胜　金亚东　薛春华　编

清华大学出版社
北京

内容简介

实变函数论是数学的一个重要分支，它在近代数学的各分支中有着广泛而深刻的应用.

本书详细解答了由徐森林、薛春华编写的《实变函数论》中的练习题和复习题，尤其是其中的难题. 它可帮助解难题有困难的读者渡过难关，也可帮助青年教师更好、更有信心地教好这门课.

对应于原书，该书共分4章. 全书的主要特点是：1. 一题多解，使读者打开思路，开阔视野. 每题叙述清晰，论证严密；2. 给出解题思路，突出关键；3. 解答难题时，注意对分析能力与研究能力的培养，尤其是创造性能力的培养；4. 注重一般测度论和一般积分理论的论述，有利于概率统计方向的学生对学习研究能力的培养；5. 内容、例题的训练与难题解答连贯起来，以使读者融会贯通，获得较强的分析功夫，在学习和研究上呈现出一个飞跃.

本书可作为综合性大学、理工科大学、高等师范院校数学系数学、概率统计和应用数学专业学生的学习辅助用书. 对从事数学分析、实变函数教学工作的青年教师是一部极好的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数习题精选/徐森林等编. --北京：清华大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-302-25099-9

Ⅰ. ①实…　Ⅱ. ①徐…　Ⅲ. ①实变函数—高等学校—习题集　Ⅳ. ①O174.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第047576号

责任编辑：刘　颖
责任校对：王淑云
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印　装　者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：31　**字　数**：673千字
版　　次：2011年8月第1版　　**印　　次**：2011年8月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：46.00元

产品编号：033497-01

前　　言

实变函数是培养学生研究能力的一门极其重要的基础课，也是数学系最难的一门基础课.其核心内容是测度论和积分理论.它是近代分析数学的必备知识.全书主要解答由徐森林、薛春华编写的清华大学出版社出版的《实变函数论》中给出的全部练习题和复习题.本书是为了帮助那些解难题有困难的读者渡过难关；也是为了帮助讲授实变函数的年轻教师能更好、更有信心地教好这门课.中国科学技术大学数学系 1977 级出了一大批有名的年轻数学家，大量实变函数论的难题的训练是成功的重要关键.

本书对应于原书共分 4 章.每章开头都有主要概念和定理的简述，其中还包括一些例题的结论，便利读者阅读习题解答，为了与原教材保持一致，沿用了教材中的序号.全书的主要特点是：1. 一题多解，使读者可打开思路，开阔视野.每题叙述清晰，论证严密；2. 给出解题思路，突出关键；3. 难题解答时，注意到分析能力与研究能力的培养.尤其是创造性能力的培养；4. 注意到一般测度论和一般积分理论的论述，有利于概率统计学生的学习和研究能力的培养；5. 内容、例题的训练与难题解答连贯起来，定能使读者融会贯通，获得很强的分析功夫，使读者在学习和研究上呈现出一个飞跃.

众所周知，一位专心于数学研究的人必须懂得：证明一个命题有三种方法.1. 应用定义、定理和公式；2. 与自然数 n 有关的命题可用数学归纳法；3. 应用反证法.另一方面，要说明一个命题不真，只要举一个反例.自然，反例越简单越好.原书的练习题一般只需熟读该节之前的定义（概念）、定理和例题以及它们的证明方法就能解决，而每章的复习题就应熟读该章之前的定义、定理、例题、习题及它们的各种证法.并通过反复的思考、分析，确定应用哪一种证法，哪一个定理.按照正确独特的思路和方法去解决它.特别难的题是极少数.也许几天、几月也不一定想得出来.能力达不到的读者就去阅读本书相应的解答是很有益的.能力特别强的读者可继续想，直到完全想清楚.尤其是关键部分能想出来，体现了读者的智力超强，体现了读者的创造性能力.这是将来研究的方法和结果创新的源泉.

在编写本书的过程中，得到了中国科学技术大学数学系领导和教师们的热情鼓励和大力支持.作者谨在此对他们表示诚挚的感谢.

还要特别感谢的是清华大学出版社的刘颖博士，他为本书的出版提供了热情帮助和建设性的意见.

徐森林　胡自胜
金亚东　薛春华

目　录

第 1 章　集合运算、集合的势、集类

1.1　集合运算及其性质

定理 1.1.1

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C$

更一般地，有

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha),\quad A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha).$$

(4) 此外，若设 $A,B\subset X$，还有

$$A\cup A^c=X,\quad A\cap A^c=\varnothing,\quad (A^c)^c=A,\quad X^c=\varnothing,\quad \varnothing^c=X,$$
$$A-B=A\cap B^c,\quad A\supset B\Leftrightarrow A^c\subset B^c,\quad A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B^c.$$

定理 1.1.2　(de Morgan 公式)

$$X-\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X-A_\alpha),\quad X-\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(X-A_\alpha).$$

如果 $A_\alpha\subset X(\forall\alpha\in\Gamma)$，$X$ 为全空间，上述两式变为

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c,\quad \left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c.$$

定理 1.1.3　称 $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ 为集合 A 与 B 的**对称差集**，则：

(1) $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\Delta B)$.

(2) $A\Delta\varnothing=A, A\Delta A=\varnothing, A\Delta A^c=X, A\Delta X=A^c$.

(3) 交换律：$A\Delta B=B\Delta A$.

(4) 结合律：$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.

(5) 交与对称差满足分配律：

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C).$$

(6) $A^c\Delta B^c=A\Delta B$.

(7) 对 $\forall A,B$，$\exists_1$(存在惟一)E，s. t.　$E\Delta A=B$.

称

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \limsup_{k\to+\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \exists \text{ 无穷个 } k,\quad \text{s.t.}\quad x \in A_k\}$$

$$= \{x \mid \text{对 } \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant n,\quad \text{s.t.}\quad x \in A_k\}$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**上极限集**(或**上限集**).

称

$$\underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \liminf_{k\to+\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \text{只有有限个 } k, \text{s.t.}\quad x \notin A_k\}$$

$$= \{x \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{当 } k \geqslant n_0 \text{ 时},\quad x \in A_k\}$$

为集合列 $\{A_k\}$ 的**下极限集**(或**下限集**).

显然

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k \subset \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

如果 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$,则称集列 $\{A_k\}$ **有极限**,或是**收敛的**. 记此极限为

$$\lim_{k\to+\infty} A_k \left(= \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k\right).$$

定理 1.1.4 (用可数交、可数并表示上、下极限)设 $\{A_k\}$ 为集列,则:

(1) $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. (2) $\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

定理 1.1.5 设 $\{A_k\}$ 为单调增(减)集列,即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots (A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \cdots),$$

则

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

定理 1.1.6 (1) $X - \overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} (X - A_k)$. (2) $X - \underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k = \overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} (X - A_k)$.

定义 1.1.1 设 X, Y 为非空集合,$f: X \to Y, x \overset{\text{惟一}}{\mapsto} y = f(x)$ 为(单值)**映射**.

如果对 $\forall y \in Y, \exists x \in X$, s.t. $y = f(x)$,则称 f 为**满**(**映**)**射**,或**从 X 到 Y 上的映射**(简称**在上映射**).

如果 $f(x_1) = f(x_2)$ 必有 $x_1 = x_2$(或 $x_1 \neq x_2$ 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$),则称 f 为**单射**.

如果 f 既为满射又为单射,则称它为**双射**或**一一映射**. 此时,f 的逆映射 f^{-1} 也为一一映射,且

$$f^{-1}(y) = x \leftrightarrow y = f(x).$$

设 $A \subset X$,称 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$ 为 A 在 f 下的**像集**($f(\varnothing) \overset{\text{def}}{=} \varnothing$). 显然,$f(X)$ 为 f 的**值域**.

设 $B \subset Y$,称 $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$ 为 B 关于 f 的**原像**. 显然,$f^{-1}(Y) = X$.

因此，f 为单射时，$f: X \to f(X)$ 为一一映射.

定理 1.1.7　设 $f: X \to Y$ 为映射，则：

(1) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} f(A_\alpha)$.

(2) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha\right) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} f(A_\alpha)$，但 $f\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha\right) \supset \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} f(A_\alpha)$ 不必成立.

(3) 若 $B_1 \subset B_2$，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(4) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\beta \in \Lambda} B_\beta\right) = \bigcup\limits_{\beta \in \Lambda} f^{-1}(B_\beta)$.

(5) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

定义 1.1.2　如果 $Y = \mathbb{R}$，则称 $f: X \to Y = \mathbb{R}$ 为**实函数**.

设 $A \subset X$，我们称

$$\chi_A: X \to \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \chi_A(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X - A(\text{或 } x \notin A) \end{cases}$$

为定义在 X 上的关于它的子集 A 的**特征函数**. 显然

$$x \in A \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1.$$

定理 1.1.8

(1) $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$；　　$A \neq B \Leftrightarrow \chi_A \neq \chi_B$；

$A \Delta B = \{x \mid \chi_A(x) \neq \chi_B(x)\}$.

(2) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$，　$\forall x \in X$.

(3) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$.

(4) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

(5) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.

(6) $\chi_{A \Delta B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$.

【1】　证明：de Morgan 公式中的第 1 式

$$X - \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (X - A_\alpha).$$

证明　因为

$$\begin{aligned} x \in X - \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha &\Leftrightarrow x \in X, x \notin \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \\ &\Leftrightarrow x \in X, \forall \alpha \in \Gamma, x \notin A_\alpha \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Gamma, x \in X - A_\alpha \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (X - A_\alpha), \end{aligned}$$

所以

$$X-\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X-A_\alpha).$$ □

【2】 设 $A_\alpha(\alpha=1,2,\cdots)$为一集列.

(1) 令 $B_1=A_1, B_n=A_n-\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}A_i(n\geqslant 2)$. 证明：$B_n(n=1,2,\cdots)$为一个彼此不相交的集列，并且

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}B_i,\quad n=1,2,\cdots;$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i.$$

(2) 如果 $A_n(n=1,2,\cdots)$单调减(即 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$)的集列，证明：

$$A_1=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right),$$

并且其中各项互不相交.

证明 (1) 证法 1　显然，$B_i=A_i-\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}A_j\subset A_i$，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

反之，若 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，①$x\in A_1$，则 $x\in A_1=B_1\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$；②$x\notin A_i, i=1,2,\cdots,m$，$x\in A_{m+1}$，则 $x\in A_{m+1}-\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=B_{m+1}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$. 因此，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$.

综上得到

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}B_i.$$

易见，由 $B_i=A_i-\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}A_j\subset A_i$ 知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

反之，若 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，①$x\in A_1$，则 $x\in A_1=B_1\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$；②$x\notin A_i, i=1,2,\cdots,m$，$x\in A_{m+1}$，则 $x\in A_{m+1}-\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=B_{m+1}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$. 因此，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$.

综上得到

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i.$$

证法 2　(归纳法)当 $n=1$ 时，有

$$\bigcup_{i=1}^{1}A_i=A_1=B_1=\bigcup_{i=1}^{1}B_i.$$

假设 $n=k$ 时,有 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$,则

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i=B_{k+1}\cup\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)=\left(A_{k+1}-\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i.$$

因此,对 $\forall n\in\mathbb{N}$,有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

再证 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.事实上,由

$$A_i\subset\bigcup_{j=1}^{i} A_j=\bigcup_{j=1}^{i} B_j\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j=\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.同理,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.(或者由 $B_i=A_i-\bigcup\limits_{j=1}^{i} A_j\subset A_i$ 推得上式).于是

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

(2) 因为 $A_1-A_2\subset A_1,A_2-A_3\subset A_2\subset A_1,\cdots,A_n-A_{n+1}\subset A_n\subset A_{n-1}\subset\cdots\subset A_1$,$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\subset A_1$,所以

$$(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)\subset A_1.$$

反之,对 $\forall x\in A_1$,有两种情形:

① $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$;

② $x\notin\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,则 $x\notin A_{i_0}$,且 $x\in A_i,i=1,2,\cdots,i_0-1$,则 $x\in A_{i_0-1}-A_{i_0}$.于是

$$x\in(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right),$$

$$A_1\subset(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

综合上述得到

$$A_1=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$ □

【3】 设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为两个集列.

(1) 证明:$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)\subset\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$.

(2) 举例说明:$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)\not\supset\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$.

(3) 如果 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}(n=1,2,\cdots)$ 都是单调增的集列,证明:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

证明

(1) 因为 $A_n \cap B_n \subset A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_n \cap B_n \subset B_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$,故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subset (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

(2) 设 $A_n = \{n\}, n \in \mathbb{N}$; $B_1 = \varnothing, B_n = \{n-1\}, n = 2, 3, \cdots$. 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varnothing = \varnothing \not\supset \mathbb{N} = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

(3) 由(1)知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

另一方面,对 $\forall x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$,即 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,且 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 则必有 $x \in A_{n_1}, x \in B_{n_2}$,不妨设 $n_1 \leqslant n_2$. 又因$\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为递增集列,故

$$x \in A_{n_1} \subset A_{n_2},$$

于是

$$x \in A_{n_2} \cap B_{n_2} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n),$$

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n).$$

综合上述,有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n). \qquad \square$$

【4】 设 A, B, E 为全集 X 中的子集,证明:

$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \Leftrightarrow B^c = E.$$

证明 证法 1

$$\begin{aligned} B &= (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \xlongequal{\text{de Morgan公式}} (E^c \cup A^c) \cap (E^c \cup A) \\ &= E^c \cup (A^c \cap A) = E^c \cup \varnothing = E^c \\ &\Leftrightarrow B^c = E. \end{aligned}$$

证法 2

$$\begin{aligned} B &= (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \\ &\Leftrightarrow B^c = ((E \cap A)^c \cap (E^c \cup A))^c \\ &\xlongequal{\text{de Morgan公式}} (E \cap A) \cup (E^c \cup A)^c \\ &\xlongequal{\text{de Morgan公式}} (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \\ &= E \cap (A \cup A^c) = E \cap X = E. \end{aligned}$$

证法 3

$$\begin{aligned}B &= (E\cap A)^c\cap(E^c\cup A)=(E^c\cup A^c)\cap(E^c\cup A)\\&=(E^c\cap E^c)\cup(A^c\cap E^c)\cup(A^c\cap A)\cup(E^c\cap A)\\&=E^c\cup(A\cup E)^c\cup\varnothing\cup(E^c\cap A)\\&=E^c\cup(A\cup E)^c=(E\cap(A\cup E))^c=E^c\\&\Leftrightarrow B^c=E.\end{aligned}$$

□

【5】 设 $A_{2k-1}=\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$，$A_{2k}=(0,k)$，$k=1,2,\cdots$，求 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A_n$.

解　解法 1　$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A_n=\{x\mid\exists$ 无穷个 n, s. t. $x\in A_n\}=(0,+\infty)$.

$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A_n=\{x\mid$ 只有有限个 n, s. t. $x\notin A_n\}=\varnothing$.

解法 2　根据定理 1.1.4，有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}(0,+\infty)=(0,+\infty).$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\varnothing=\varnothing.$$

□

【6】 设 $f(x)$ 为 E 上的一个实函数，c 为任何实数，

$$E(f>c)=\{x\in E\mid f(x)>c\},\quad E(f\leqslant c)=\{x\in E\mid f(x)\leqslant c\}$$

等. 证明：

(1) $E(f>c)\cup E(f\leqslant c)=E$.

(2) $E(f\geqslant c)=E(f>c)\cup E(f=c)$.

(3) 当 $c\leqslant d$ 时，$E(f>c)\cap E(f\leqslant d)=E(c<f\leqslant d)$.

(4) 当 $c\geqslant 0$ 时，$E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})$.

(5) 当 $f\geqslant g$ 时，$E(f>c)\supset E(g>c)$.

(6) $E(f\geqslant c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n)$.

(7) $E(f<c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f\leqslant c-\dfrac{1}{n})$.

证明

(1) $E(f>c)\cup E(f\leqslant c)=\{x\in E\mid f(x)>c\}\cup\{x\in E\mid f(x)\leqslant c\}$

$=\{x\in E\mid f(x)>c$ 或 $f(x)\leqslant c\}=E$.

(2) $E(f>c)\cup E(f=c)=\{x\in E\mid f(x)>c\}\cup\{x\in E\mid f(x)=c\}$

$=\{x\in E\mid f(x)>c$ 或 $f(x)=c\}=\{x\in E\mid f(x)\geqslant c\}=E(f\geqslant c)$.

(3) $E(f>c)\cap E(f\leqslant d)=\{x\in E\mid f(x)>c\}\cap\{x\in E\mid f(x)\leqslant d\}$

$=\{x\in E\mid f(x)>c$ 且 $f(x)\leqslant d\}=\{x\in E\mid c<f(x)\leqslant d\}$

$=E(c<f\leqslant d)$.

(4) $E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})=\{x\in E\mid f(x)>\sqrt{c}\}\cup\{x\in E\mid f(x)<-\sqrt{c}\}$

$=\{x\in E\mid f(x)>\sqrt{c}$ 或 $f(x)<-\sqrt{c}\}=\{x\in E\mid f^2(x)>c\}$

$=E(f^2>c)$.

(5) $x\in E(g>c)\Leftrightarrow x\in E$，且 $g(x)>c\Rightarrow x\in E$，且 $f(x)\geqslant g(x)>c\Leftrightarrow x\in E(f>c)$.
等价于

$$E(f>c)\supset E(g>c).$$

(6) 显然，$E(c\leqslant f<c+n)\subset E(f\geqslant c)$，故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n)\subset E(f\geqslant c).$$

另一方面，对 $\forall x\in E(f\geqslant c)$，即 $f(x)\geqslant c$. 则必有充分大的 $n_0\in\mathbb{N}$，使得 $c\leqslant f(x)<c+n_0$，故 $x\in E(c\leqslant f<c+n_0)$. 于是

$$x\in E(c\leqslant f<c+n_0)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

这就得到

$$E(f\geqslant c)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

综合上述，有

$$E(f\geqslant c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n).$$

(7) 因为 $f(x)\leqslant c-\dfrac{1}{n}\Rightarrow f(x)\leqslant c-\dfrac{1}{n}<c$，故

$$E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)\subset E(f<c),$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)\subset E(f<c).$$

另一方面，对 $\forall x\in E(f<c)$，即 $x\in E$ 且 $f(x)<c$. 则必有 $n_0\in\mathbb{N}$, s. t. $f(x)\leqslant c-\dfrac{1}{n_0}$. 即 $x\in E\left(f\leqslant c-\dfrac{1}{n_0}\right)$. 从而

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right),\quad E(f<c)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right).$$

综合上述，有

$$E(f<c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right).$$ □

【7】 设 $\{f_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为 E 上的实函数列，且关于 n 单调增，即

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots,\quad\forall x\in E,$$

并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$. 证明：对任何实数 c，有

(1) $E(f>c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)=\lim\limits_{n\to+\infty}E(f_n>c)$.

(2) $E(f\leqslant c)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)=\lim\limits_{n\to+\infty}E(f_n\leqslant c)$.

证明

(1) 证法 1　设 $x\in E(f>c)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)>c$. 于是，$\exists N\in\mathbb{N}$, s. t. 当 $n_0>N$ 时，有 $f_{n_0}(x)>c$. 从而，$x\in E(f_{n_0}>c)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)$，$E(f>c)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)$.

反之，如果 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)$，则 $\exists n_0\in\mathbb{N}$, s. t. $x\in E(f_{n_0}>c)$. 由于 f_n 关于 n 单调增，故有 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\geqslant f_{n_0}(x)>c$，$x\in E(f>c)$. 从而，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)\subset E(f>c)$.

综合上述，有

$$E(f>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>c).$$

因为 f_n 单调增，故 $E(f_n>c)\subset E(f_{n+1}>c)$，从而

$$\lim_{n\to+\infty}E(f_n>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>c).$$

证法 2　如果(2)不是利用(1)的结论证得，则

$$E(f>c)=E-E(f\leqslant c)\overset{(2)}{=}E-\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)\xlongequal{\text{de Morgan公式}}\bigcup_{n=1}^{\infty}(E-E(f_n\leqslant c))$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>c).$$

(2) 证法 1　因为 f_n 关于 n 单调增，故 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\geqslant f_n(x)$，从而

$$E(f\leqslant c)\subset E(f_n\leqslant c),\quad n=1,2,\cdots,$$
$$E(f\leqslant c)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c).$$

另一方面，如果 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)$，则 $x\in E(f_n\leqslant c)$，$\forall n\in\mathbb{N}$，即 $f_n(x)\leqslant c$，$\forall n\in\mathbb{N}$. 于是，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\leqslant c$，$x\in E(f\leqslant c)$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)\subset E(f\leqslant c)$.

综合上述，有

$$E(f\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c).$$

由于 f_n 关于 n 单调增，故 $E(f_n\leqslant c)$ 关于 n 单调减，从而

$$\lim_{n\to+\infty}E(f_n\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)$$

证法 2　如果(1)不是利用(2)的结论证得，则

$$E(f\leqslant c)=E-E(f>c)\overset{(1)}{=}E-\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>c)\xlongequal{\text{de Morgan公式}}\bigcap_{n=1}^{\infty}(E-E(f_n>c))$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c).$$ □

【8】 设$\{f_i(\boldsymbol{x})\}(i=1,2,\cdots)$为定义在$\mathbb{R}^n$上的实函数列，试用点集

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ f_i(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{1}{j}\right\},\quad i,j=1,2,\cdots$$

表示点集$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\overline{\lim\limits_{i\to+\infty}}f_i(\boldsymbol{x})>0\}$.

解　$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\overline{\lim_{i\to+\infty}}f_i(\boldsymbol{x})>0\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ \text{存在无穷个 }i\text{，使 }f_i(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{1}{j}\right\}$$

$$=\bigcup_{j=1}^{\infty}\overline{\lim_{i\to+\infty}}\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ f_i(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{1}{j}\right\}$$

$$\xlongequal{\text{定理1.1.4(1)}}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ f_i(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{1}{j}\right\}.$$ □

【9】 设$f:X\to Y,A\subset X,B\subset Y$. 试问下列等式成立吗？并说明理由.

(1) $f^{-1}(Y-B)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)$.

(2) $f(X-A)=f(X)-f(A)$.

解　(1) $f^{-1}(Y-B)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)$成立.

解法 1　$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(Y-B)&\Leftrightarrow f(x)\in Y-B\\&\Leftrightarrow f(x)\in Y,f(x)\notin B\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(Y)=X,x\notin f^{-1}(B)\\&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(Y)-f^{-1}(B).\end{aligned}$$

解法 2　$$\begin{aligned}f^{-1}(Y-B)&=\{x\in X\mid f(x)\in Y-B\}=X-\{x\in X\mid f(x)\in B\}\\&=X-f^{-1}(B)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B).\end{aligned}$$

解法 3　$$\begin{aligned}f^{-1}(Y-B)&=f^{-1}(Y\cap B^c)=f^{-1}(Y)\cap f^{-1}(B^c)=f^{-1}(Y)\cap(f^{-1}(B))^c\\&=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B).\end{aligned}$$

(2) $f(X-A)=f(X)-f(A)$未必成立. 只有$f(X)-f(A)\subset f(X-A)$.

事实上，$$\begin{aligned}y\in f(X)-f(A)&\Leftrightarrow y\in f(X),y\notin f(A)\\&\Rightarrow\exists x\in X\text{ 但 }x\notin A,\text{s. t. }y=f(x)\\&\Leftrightarrow\exists x\in X-A,\text{s. t. }y=f(x)\\&\Leftrightarrow y\in f(X-A).\end{aligned}$$

因此，$f(X)-f(A)\subset f(X-A)$.

但是，$f(X)-f(A)\not\supset f(X-A)$. 从而，$f(X-A)\neq f(X)-f(A)$.

反例：设X为多于两点的集合，$A=\{a\}\subset X$，$f:X\to Y$为常值映射，$f(x)\equiv y_0\in Y$，

$\forall x\in X$. 于是

$$f(X)-f(A)=\{y_0\}-\{y_0\}=\varnothing\not\supset\{y_0\}=f(X-A).$$

□

【10】 设 X 为固定的集合，$A\subset X$，$\chi_A(x)$ 为集合 A 的特征函数. A,B,A_α,A_n 都为 X 的子集. 证明：

(1) $A=X\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv1$；　$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv0$.

(2) $A\subset B\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x),\ \forall x\in X$；

$A=B\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x),\ \forall x\in X$.

(3) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$；$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$.

(4) 设 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 为一集列，则

$$\lim_{n\to+\infty}A_n\ 存在\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\chi_{A_n}(x)\ 存在.$$

而且当极限存在时，有

$$\chi_{\lim\limits_{n\to+\infty}A_n}(x)=\lim_{n\to+\infty}\chi_{A_n}(x).$$

证明 (1) 由特征函数的定义，结论是显然的.

(2) $\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in X-A\end{cases}\leqslant\begin{cases}1, & x\in B\\ 0, & x\in X-B\end{cases}=\chi_B(x)$

$\Leftrightarrow\chi_A(x)=1$ 必有 $\chi_B(x)=1$

$\Leftrightarrow x\in A$ 必有 $x\in B\Leftrightarrow A\subset B$.

$$A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subset B\\ B\subset A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)\\ \chi_B(x)\leqslant\chi_A(x)\end{cases}\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x).$$

(3) 证法 1　$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=1\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Leftrightarrow\exists\,\alpha_0\in\Gamma$, s. t. $x\in A_{\alpha_0}$

$\Leftrightarrow\exists\,\alpha_0\in\Gamma$, s. t. $\chi_{A_{\alpha_0}}(x)=1\Leftrightarrow\max\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)=1$,

再由 $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)$ 与 $\max\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$ 或为 1 或为 0 知

$$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x).$$

或者再从

$$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=0\Leftrightarrow x\notin\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Leftrightarrow\forall\,\alpha\in\Gamma,x\notin A_\alpha$$

$$\Leftrightarrow\forall\,\alpha\in\Gamma,\chi_{A_\alpha}(x)=0\Leftrightarrow\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)=0$$

推出上面等式.

$$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=1-\chi_{(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c}(x)\xlongequal{\text{de Morgan公式}}1-\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c}(x)$$

$$\xlongequal{(3)\text{第1式}}1-\max_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha^c}(x)=1-\max_{\alpha\in\Gamma}\big(1-\chi_{A_\alpha}(x)\big)$$

$$=1-\big(1-\min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)\big)=\min_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x).$$