周作凤　编著

高中
数学解题方法与技巧

封面设计：昕　升

ISBN 7-81021-086-6
G·15　　定价：3.00元

高中数学解题方法与技巧

周作凤　编

中国矿业大学出版社

内容提要

该书是作者长期从事数学教学工作的经验总结和对数学解题技巧的研究的结晶，对中学生和中学教师很有参考价值。

该书利用三十个专题，较全面地概括了整个高中数学的基本解题方法与技巧。在每个专题中，先介绍了问题解法与技巧的原理、适用范围及注意事项，又通过典型例题加以示范和印证。推理严谨，通俗易懂，对于开发学生智力，培养学生解题能力有很大帮助，是中学生及数学教师的良师益友。

本书是中学生特别是毕业班学生的很好的参考书，亦可作教师的教学参考书。

责任编辑：王景华
技术设计：周立钢
责任校对：唐凤和

高中数学解题方法与技巧
周作凤 编

中国矿业大学出版社 出版 发行
江苏省新华书店 经销 中国矿业大学印刷厂 印刷
开本787×1092毫米1/32 印张12.75 字数276千字
1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷
印数1—18300册

ISBN 7-81021-086-6

G·15 定价：3.00元

前　言

杰出的数学家、教育家乔治·波利亚说过："如果一种解法是你通过自己的努力掌握的，或是从别人那里学来的，或是听来的而又真正理解了的，那么这种解法就可以成为一种模式。"这种模式掌握得愈多，你的思路就会更开阔，分析问题、解决问题的能力就会愈强！

作者在二十多年的教学实践中，不断探索和归纳，总结了本书《高中数学解题方法与技巧》。此书分三十个专题，较全面地概括了整个高中数学的基本解题方法与技巧，在每个专题中，首先介绍了解法与技巧的原理、适用范围及注意事项，又通过典型例题加以示范和印证，推理严谨，通俗易懂。书中还提出了一些新的定理、证题与解题方法，欲起到开拓学生思路之功能。该书中提到的解法与技巧还很不完善，还称不上什么"模式"，把它介绍给读者，目的是想和广大中学数学教师与高中学生一起进行探讨，共同研究，以找到更加完善的解法与技巧，更好地开发学生的智力，提高学生的解题能力。

由于作者业务能力有限，编写水平不高，书中存在的缺点和错误，诚恳希望读者不吝赐教。

此书成稿以后，由欧相文、周淑静、陈元焕帮助审稿并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

编者

1988.3

目　　录

1. 选择题的做法与技巧

由于选择题灵活多样、考查知识覆盖面大、阅卷方便，因此，随着高考命题标准化的日益普及，选择题在高考试题中所占比重逐渐增大。怎样解选择题，已经引起了广大师生的极大重视。为了让同学们更系统地掌握选择题的做法，在这里把选择题常用的六种解法加以详细介绍。

1. 直接法 有些概念性很强的题目，可以直接根据概念的实质要点做出选择；有的题目是根据某个定理拟定的，可以直接根据定理的条件和结论进行判断做出选择；有的题目是考查某些公式的(体积公式、面积公式、三角公式等)，可以直接利用公式进行计算做出选择。

【例1-1】下列叙述正确的是（　　）

①$y=f(x)$的图象可能是一个椭圆；

②函数$y=\cos x$在第三象限内为增函数；

③当$x\in R$，函数$y=f(x)$与$y=f(x^3-5)$有相同的值域；

④设集合$A=\{$高中三年级四个班$\}$，$B=\{$高中三年级四个班的班主任$\}$，设A到B的映射是一一映射，因此这个映射可以确定函数。

注：本专题所用例题及习题中，每题给出的四个选择小题，其中只有一个是正确的。

分析　这个题目着重考查函数的定义。对于$y=f(x)$必须满足，当x取定义域内的一个值时，函数y有唯一的值和它对应。在①中，对于一个椭圆方程，有一个x对应两个y值，而$y=f(x)$不满足这一条件，因此，$y=f(x)$不可能表示椭圆。在②中，$y=\cos x$在第三象限内若取$x_1=210°<560°=x_2$，但$f(x_1)=\cos 210°$，$f(x_2)=\cos 560°=\cos(360°+200°)=\cos 200°$，$\cos 210°>\cos 200°$，$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，不满足增函数定义。本叙述若改为：$y=\cos x$在第三象限每一单调区间上都是增函数就正确了。对于④，虽然有$A\to B$的映射是一一映射，但函数是建立在两个非空的数的集合上的映射，因此这个映射不能确定函数。因此本题正确的叙述是③。

【例1-2】 设集合$M=\{$复数的辐角主值$\}$；$N=\{$直线的倾斜角$\}$；$P=\{$直线和平面成的角$\}$；$R=\{$两条异面直线所成的角$\}$，那么它们之间的包含关系应是（　　）

①　$M\supset N\supset P\supset R$；　　②　$M\subset N\subset P\subset R$；

③　$N\supset P\supset R\supset M$；　　④　$P\subset R\subset M\subset N$。

分析　$\because$复数的辐角主值$\theta\in[0,2\pi)$，直线的倾斜角$\alpha\in[0,\pi)$，直线和平面成的角$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，两条异面直线成的角是$\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore$本题应该选①。

【例1-3】 如图1-1，两条异面直线a和b成的角为θ，二面角$\alpha—l—\beta$的平面角为$\varphi\left(其中\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，那么当$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$时，$\theta$与$\varphi$的大小关系是（　　）

①相等；　　②相等或互补；

③互补；　　④以上都不对。

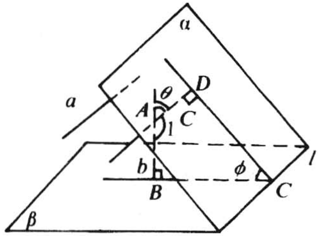

图1-1

分析　在b上取一点A，过A作$c\parallel a$交α于D，相交直线b、c成的角就是异面直线a和b成的角，易证A、B、C、D四点共圆，$\angle 1$与$\angle\varphi$互补。由于$\varphi\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\angle 1>\dfrac{\pi}{2}$，而两条异面直线成的角不大于90°，所以$\theta=\varphi$。本题应选①。

【例1-4】从1到9这九个数字中任取两个分别作为对数的底数和真数，共可得到不同的对数值的个数是①52个；②53个；③57个；④72个。

分析　这是一个排列问题，把底数与真数看成两个不同的位置。由于底数不能放1，底数的取法有P_8^1种；真数的取法有P_8^1，据乘法原理有$P_8^1P_8^1=64$(个)，但是以1为真数的对数都是0共8个应减去7个；$\log_2 4=\log_3 9=2$；$\log_4 2=\log_9 3=\dfrac{1}{2}$；$\log_3 2=\log_9 4$；$\log_2 3=\log_4 9$各多加1个应减去4个，因此总的个数是$64-7-4=53$(个)，故本题应选②。

【例1-5】一球内切于圆台，若此圆台的上下底面半径分别是a和b，则圆台的体积是①$\pi(a^2+b^2+ab)\sqrt{ab}$；

②$\dfrac{2}{3}\pi\left(a^2+b^2+ab\right)\sqrt{ab}$；　③$\dfrac{\pi}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)ab$；

④$\dfrac{1}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)\sqrt{ab}$。

分析　作出圆台的轴截面如图1-2。圆台的高h位于$Rt\triangle ABC$中，由切线的性质得$AB=a+b$，$BC=b-a$。

$\therefore h=\sqrt{(a+b)^2-(b-a)^2}=2\sqrt{ab}$，由体积公式$V_{圆台}=\frac{2}{3}\pi\left(a^2+b^2+ab\right)\sqrt{ab}$，本题应选择②。

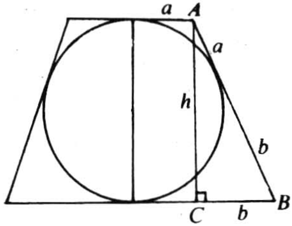

图1-2

【例1-6】复平面内两点A、B分别对应于非零复数α、β且$\alpha^2+\beta^2=0$，则$\triangle OAB$为（　　）

①等腰直角三角形；②正三角形；③等腰三角形；④直角三角形。

分析　由已知$\alpha^2+\beta^2=0\Longrightarrow\alpha^2=-\beta^2\Longrightarrow\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=-1$，

$\frac{\alpha}{\beta}=\pm i$　$\therefore$　$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=1$，　$|\alpha|=|\beta|$，　$\alpha/\beta=\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$，由复数除法的几何意义知：$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，又$|OA|=|OB|$，本题应选择①。

2．作图法　有些选择题与函数有关，如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，可以通过做出函数的图象，从图象中顺利得到结果；有的选择题与几何有关，无论是平面几何、立体几何，还是解析几何，我们都可以做出图形，从几何图形的位置关系中找结果，从而准确地做出选择。

【例1-7】方程$\sin x=\lg x$的根的个数是（　　）

①1个；　②2个；　③3个；　④4个。

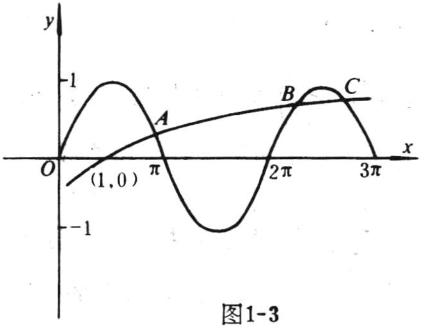

图1-3

分析　这是一个解方程的问题，我们不能把两边化成同名函数，然而只要找到这两条曲线的公共点，其横坐标就是方程的解。从$y=\sin x$图象看出，整个曲线位于$y=\pm 1$两条平行线之间；而对于对数函数$y=\lg x$则是过（1，0）点的增函数，它的图象有可能超出直线$y=1$之外，只要在$y=1$之内找交点个数即可。由于$\lg 10=1$，而$3\pi<10$，所以在［0，3π］上，$\lg x$的值不超过1，这个区间内两曲线有三个公共点，因此方程的根有3个，所以本题应选③。

【例1-8】如果椭圆$\begin{cases}x=m+2\cos\varphi\\y=3\sin\varphi\end{cases}$（$m$为常数，$\varphi$为参数）与抛物线$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}+t^2\\y=6t\end{cases}$（$t$为参数）有公共点，则$m$的取值范围是（　　）

①$m\leqslant\frac{7}{2}$；　②$-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{7}{2}$；③$m\geqslant\frac{7}{2}$或$m\leqslant-\frac{1}{2}$；

④m取任意实数。

分析　首先把椭圆和抛物线方程都化成普通方程：椭圆

$\frac{(x-m)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，中心在（$m$，0），可在$x$平行上轴移动；抛物线$y^2=36\left(x-\frac{3}{2}\right)$，顶点在$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，开口向右且其位置固定。欲确定$m$的范围也就是找出椭圆与抛物线有公共交点的极限位时$m$的取值即可。从图1-4中可以看出，当椭圆中心位于线段C_1C_2上时，椭圆与抛物线总有公共点，由于$|AC_1|=|AC_2|$，$|OA|=\frac{3}{2}$，$\therefore C_1$与C_2的坐标分别是

$C_1\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，$C_2\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$，$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{7}{2}$，本题选②。

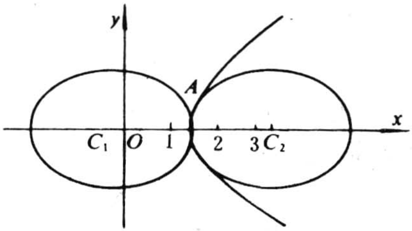

图1-4

【例1-9】若四面体的一条棱长为x，其余的棱长都是1，若体积用$F(x)$表示，那么$F(x)$在其定义域内是（　　）

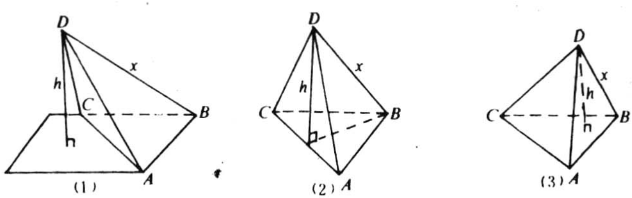

图1-5

①增函数，但无最大值；②增函数且有最大值；③是减

函数且无最大值；④不是单调函数且有最大值。

分析　设四面体的底面为$\triangle ABC$，它的边长都是1，另外棱AD、DC长也是1，棱BD为x，体积$F(x)$是随x的变化而变化的。从图1-5中（1）、（2）、（3）可看出四面体的高首先随着x的减少而增大；（当面$ADC\perp ABC$时，高最大），然后高随x的减少而减少。在整个变化过程中：x由大变小，而体积由小变大，再由大变小，$F(x)$不是单调函数但有最大值，故本题应选择④。

【例1-10】 若$\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$则 $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\theta$、$\log_{\sqrt{2}}\sin\theta$、$\log_{\sqrt{2}}\sin\theta$的大小关系是（　　）

①　$\log_{\sqrt{2}}\sin\theta>\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\theta>\log_{\sqrt{3}}\sin\theta$

②　$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\theta>\log_{\sqrt{2}}\sin\theta>\log_{\sqrt{3}}\sin\theta$；

③　$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\theta>\log_{\sqrt{3}}\sin\theta>\log_{\sqrt{2}}\sin\theta$；

④　$\log_{\sqrt{2}}\sin\theta>\log_{\sqrt{3}}\sin\theta>\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\theta$。

分析　首先做出$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x$、$\log_{\sqrt{2}}x$、$\log_{\sqrt{3}}x$的图象如图1-6所示。

$\because\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore 0<\sin\theta<1$，设$A$、$B$、$C$三点分别表示对数值$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\theta$、$\log_{\sqrt{3}}\sin\theta$、$\log_{\sqrt{2}}\sin\theta$，显然有$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\theta>\log_{\sqrt{3}}\sin\theta>\log_{\sqrt{2}}\sin\theta$。故本题应选③。

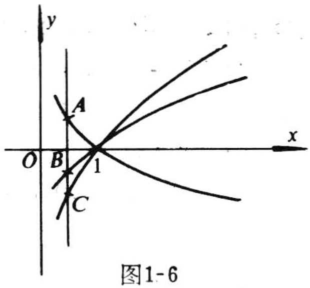

图1-6

【例1-11】直线a与直二面角α-l-β的两个面分别交于A、B两点，则a与α、β成的角的和是（　　）

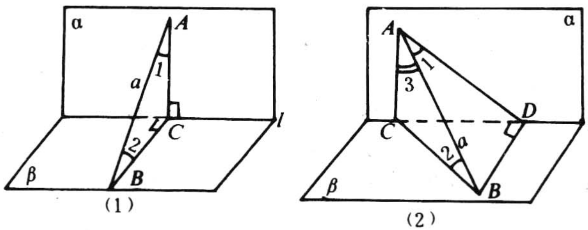

图1-7

① 90°；

② 小于90°；

③ 大于90°；

④ 不大于90°。

分析　从图1-7（1）中看出当$a\perp l$时，$\angle 1+\angle 2=90°$；从图（2）中看出在Rt$\triangle ABC$中$\angle 2+\angle 3=90°$；$\because\angle 1$是a

与α成的角，由于直线与平面成的角是直线与平面内过斜足的一切直线成的角中的最小者，$\therefore \angle 1 < \angle 3$，$\therefore \angle 1 + \angle 2 < 90^\circ$，由（1）、（2）知本题应该选④。

【例1-12】 若方程$\sqrt{2x+1} = x + a$有两个相异实根，则a的取值范围应是（　　）

① $a > 1$；　　② $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$；

③ $-\frac{1}{2} \leqslant a < 1$；　　④ $a \geqslant 1$。

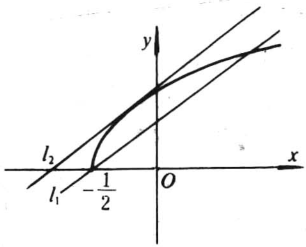

图1-8

分析　如果把方程两边看成两个不同的函数$y = \sqrt{2x+1}$和$y = x + a$，该方程的实根就是两个函数图象有两个公共点时a的取值范围。在$x \geqslant -\frac{1}{2}$，$y \geqslant 0$的条件下，$y^2 = 2x + 1$是抛物线，而$y = x + a$是截距不定的直线，如图1-8。

从图中看出l_1与l_2是两曲线的极限位置，在l_1时直线过$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$点，代入$y = x + a$解得$a = \frac{1}{2}$，在$l_2$的位置时，直线与抛物线相切，解得$a = 1$，$\therefore \frac{1}{2} \leqslant a < 1$。故本题应该选择②。

3．淘汰法　有些选择题用直接法不易得出结论，特别是某些计算繁琐的题目，用直接法是很伤脑筋的，如果我们能够从题目的已知条件和结论的结构、图象或数字上找出其特征，从而进行淘汰做出正确的选择，往往是行之有效的。

【例1-13】化简多项式 $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}$

$+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$ 的结果是（　　）

① $\frac{-2a}{(a-b)(a-c)}$；　　② $\frac{-2b}{(b-c)(b-a)}$；

③ $\frac{2c}{(c-a)(c-b)}$；　　④ 0。

分析　由于被化简式的结构具有对称性的特点，那么化简的结果也一定具有对称特征，而给出的四个结果中只有④具有对称特点，故本题应选④。

【例1-14】三角形的三个顶点A（1，1）、B（5，3）、C（4，5），一条平行于y轴的直线把三角形的面积二等分，则直线方程是（　　）

①$x=1+\sqrt{6}$；

②$y=1\pm\sqrt{6}$；

③$x+y=1+\sqrt{6}$；

④$x=1-\sqrt{6}$。

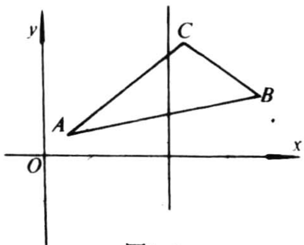

图1-9

分析　如图1-9，由三角形和直线都位于第一象限的特征，直线$x=m>0$，故本题要选择①，其余均被淘汰。

【例1-15】若$\text{tg}\theta=-(\sqrt{2}-1)$，$610°<\theta<700°$，则$\sin\frac{\theta}{2}$等于（　　）

① $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$；　② $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$；