

多天线系统中的空时码技术

王海泉 陈颖 赵知劲 著



科学出版社

多天线系统中的空时码技术

王海泉 陈 颖 赵知劲 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是一部关于多天线系统中的空时码技术的专著。首先,介绍了多天线系统的容量,空时码的设计准则,空间分集与频分复用之间的最佳平衡点等基本理论;其次,介绍了正交与拟正交空时码,对角与完备空时码,酉空时码和差分空时码等多种空时码;最后,通过附录给出了主要定理的证明。通过本书,读者将可以掌握各种线性(块状)空时码的构造原理及构造方法。

本书适用于电子工程、通信工程专业高校教师和高年级本科生,硕士、博士研究生等参考,同时也可供从事电子、通信、计算机及相关产业的研究人员、工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

多天线系统中的空时码技术/王海泉,陈颖,赵知劲著. —北京:科学出版社,2011.4

ISBN 978-7-03-030604-3

I. ①多… II. ①王…②陈…③赵… III. 天线-技巧 IV. ①TN82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 046178 号

责任编辑:任 静 / 责任校对:刘亚琦

责任印制:赵 博 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 4 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2011 年 4 月第一次印刷 印张: 14 1/4

印数: 1—3 000 字数: 277 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

随着无线通信技术的快速发展,人们对无线传输的速率和质量都提出了更高的要求。信息论基础理论的研究表明,现有的单根天线发送、接收系统已经不能满足这种日益增长的需要,而 20 世纪末发展起来的多根天线发送、接收系统(简称为多天线系统,MIMO)却能够成倍地提高频谱效用,有效地改善系统的性能。普遍认为,下一代无线通信的主题将是多天线系统。事实上,MIMO技术已经列入了现在的国际无线通信标准。例如,标准 IEEE 802.11 就采用了多天线系统作为选项。

作为多天线系统中的核心内容——空时码技术,已有十多年的发展历史。到目前为止,已出现了许多性能优异的空时码,例如,Alamouti 码、完备码等。多年来,国内外已经出版了许多关于无线通信方面的著作,包括理论著作、教科书和面向应用的著作等,对无线通信的理论与应用进行了全面研究和介绍。但是,目前国内还缺少专门介绍有关空时码的理论与应用的著作。空时码理论与技术的发展十分迅速,在多天线系统中又举足轻重,迫切需要为读者提供一本这样的著作。本书旨在总结提炼空时码的构造原理及构造方法,提供作者在这一领域的研究体会。

本书由七章构成,分别介绍多天线系统理论、正交空时码、拟正交空时码、对角空时码、分层代数空时码、酉空时码和差分空时码。本书具有以下特点:

- (1) 内容新颖,有较高学术水平,是我们近十年的研究成果的总结。
- (2) 各章安排层层深入,又相对独立。读者可以选择自己感兴趣的部分阅读。

本书适合高等院校通信工程专业教师,博士、硕士研究生及高年级本科生阅读(或作为教学参考书),也可供通信领域研究人员参考。

本书是在国家自然科学基金(60972049,60872092),浙江省自然科学基金(Y1090846)及国家教育部第 37 批留学回国人员科研启动基金的资助下完成的,在此对上述基金深表谢意。同时我们要感谢杭州电子科技大学专著出版基金对本书的支持和帮助,还要感谢为本书完成付出大量工作的研究生杨进丽、张伟卫及其他一些相关人员。

由于时间仓促且作者水平有限,书中难免存在疏漏,恳请读者提出宝贵的意见。

目 录

前言

第0章 绪论	1
第1章 多天线系统	6
1.1 信道模型	6
1.2 多天线系统的容量	7
1.2.1 单发单收系统的容量	9
1.2.2 多发多收系统的容量	12
1.3 空时码的设计准则	21
1.3.1 传送方与接收方都完全知道信道信息条件下码的设计准则	22
1.3.2 发信方不知道信道而接收方完全知道信道的情况下码的设计准则	25
1.3.3 传送方与接收方都不知道信道信息的条件下码的设计准则	27
1.4 空间分集与频分复用之间的最佳平衡点	31
第2章 正交空时码	35
2.1 线性空时码	35
2.2 正交空时码的定义	36
2.3 正交空时码的性质	39
2.3.1 正交空时码的性能分析	39
2.3.2 正交空时码与 Hurwitz-Radon 理论	41
2.4 正交空时码的构造	43
2.5 正交空时码的局限性	44
2.5.1 符号率的局限性	44
2.5.2 正交空时码在 D-M tradeoff 上的局限性	45
2.6 有限点集上的正交空时码	47
2.7 正交空时码的仿真结果	48
第3章 拟正交空时码	51
3.1 拟正交空时码的提出	51
3.2 具有满秩性质的拟正交空时码	53
3.2.1 基于 QAM 的具有满秩性的拟正交空时码	55
3.2.2 基于 PSK 上的具有满秩性的拟正交空时码	58
3.3 具有最小解码复杂度的拟正交空时码	59

3.3.1 问题的提出及其数学的描述	59
3.3.2 具有实数对解码的线性变换	62
3.3.3 QAM 上最优的线性变换	65
3.4 坐标交换正交空时码	69
3.5 数值计算与仿真结果	71
第4章 对角空时码	74
4.1 定义	74
4.2 实格和复格	75
4.3 格上的对角空时码的构造准则	77
4.4 借助于代数扩张理论的格上的对角空时码	79
4.5 举例	80
4.6 最优的对角空时码	82
4.7 对角空时码在单天线中的应用	84
4.8 仿真	86
第5章 分层代数空时码	88
5.1 满秩的分层代数空时码	88
5.2 二阶的完备的分层代数空时码	90
5.3 仿真结果	93
第6章 酉空时码	96
6.1 基于 Fourier 变换的酉空时码	96
6.2 基于 Grassmann 流形摆点的酉空时码	102
6.2.1 Grassmann 流形的基础知识	102
6.2.2 酉空时码的设计准则	103
6.2.3 等斜面(isoclinic)酉空时码	105
6.3 仿真结果	111
第7章 差分空时码	113
7.1 单天线系统中的差分码	113
7.2 多天线系统中的差分空时码	114
7.3 差分空时码的设计	117
7.3.1 来自群及其表示论的差分空时码	117
7.3.2 基于正交设计的差分空时码	120
7.3.3 基于 Cayley 变换的差分空时码	122
7.3.4 基于几何结构的 2×2 差分空时码	123
7.3.5 $L=4,5,6$ 时最优的 2×2 差分空时码	126
7.4 仿真结果	128

参考文献	130
附录 A 有关正交空时码的结论及其证明	141
附录 B 第 3.3 节中定理的证明	167
附录 C 2×2 差分空时码个数 $L=6$ 的最优分集乘积及其证明	185
附录 D 高斯整数环上 2 阶最优对角空时码的证明	215

第 0 章 绪 论

1. 多天线(MIMO)系统

近年来,无线通信技术发展迅猛,特别是在我国,手机用户已达到 7 亿多,即半数以上的人都已拥有手机,手机似乎已成为人们日常生活中不可缺少的通信工具。另一方面,人们对通信的内容与质量的要求也越来越高。目前大部分手机的通信速度都还在 $9.6\text{Kb/s} \sim 2\text{Mb/s}$ 范围内,但国际无线通信标准 IEEE 802.11 已制定了速率为 54Mb/s 的通信标准。据预测,今后十年,无线通信的速率将达到 $100\text{Mb/s} \sim 1\text{Gb/s}$ 。对于如此快速的通信要求,理论上已经证明,单天线(SISO,即发送端与接收端都只有一根天线)系统是难以承载的。

六十年前,通信理论界的天才 Shannon 给出了容量(capacity)的概念。粗略地讲,一个系统的容量是指给定系统带宽和信号能量的条件下,系统最快能够有效地传输信号的速率。这里“有效地传输信号”是指通过编码等技术,在时延可以任意长时,系统的错误概率趋于零。

根据 Shannon 的容量理论,单天线系统的平均容量是由系统的信噪比(SNR)决定的。要提高单天线系统的有效传输速率,就得增加发送信号的能量,显然这在手机上是很难实现的,或者说要付出极大的代价。

20 世纪末发展起来的多天线系统,即发送端与接收端都采用多根天线,从理论上给出了解决上述矛盾的方案。当发送信号能量给定时,多天线系统的容量随着发送与接收天线数的最小值而线性增长,因此从理论上讲,增加发送端与接收端的天线数就能很好地满足高速率无线传输的要求。

但是,Shannon 理论没有说明用什么样的具体方法实现容量,这就需要针对具体的系统设计具体的发送与接收信号方案,对于多天线系统也是如此。

下面以数字无线通信系统为例,说明单天线系统与多天线系统之间的区别,由此引入空时码概念,说明空时码的重要性。

数字无线通信系统组成框图如图 0.1 所示。首先连续信号经过 A/D 转换器转换成数字信号;数字信号通过信源编码,去掉冗余,以求得用最小的比特数表示原来的信号。然后再经过信道编码,加上冗余,以保证信号在传输过程中的质量。最后加上冗余的比特流被调制成连续信号,通过天线发送出去。信号经过物理信道到达接收端。在接收端,经过上述的逆步骤得到所需要的信号。

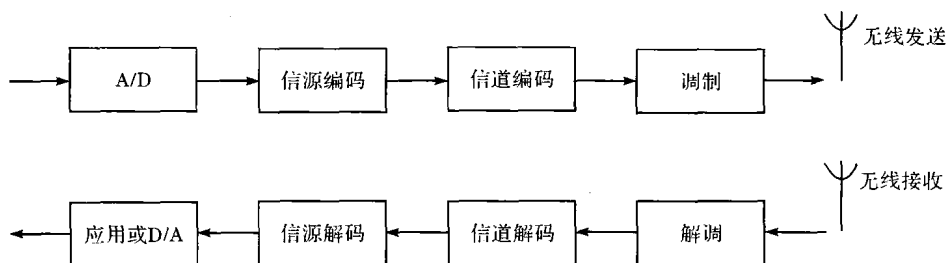


图 0.1 数字通信系统

显然,根据以上步骤,单天线系统与多天线系统之间的区别在于发送天线与接收天线这一块。让我们再来仔细地看发送天线的工作过程。

在发送端,调制器先把比特流映射成一个复数,然后根据这个复数的幅度与相位,调制到要发射的频段;最后通过天线发送。注意,上述的复数所组成的集合一般称为码本。图 0.2 中所画的是常用的 4-QAM。还可以选其他的码本,例如 BPSK、8PSK、16QAM 等。

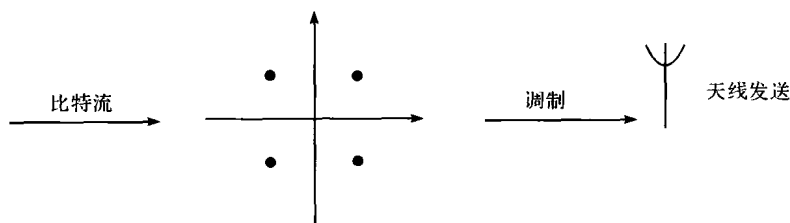


图 0.2 信号的调制与发送

单天线情况下,上述步骤比较简单。如果有多根发射天线,情况就有很大的区别。如何组织这多根天线发送信号是我们面临的新问题。以系统有两根发射天线为例,第一根天线发送什么信号?第二根天线如何发送信号?又如何协调它们所发的信号,使得整个系统更加有效和高质量,这些都是需要考虑的问题。空时码(space time coding)就是要回答这些问题。更具体地说,空时码的主要任务就是设计出码本以协调好多根天线,在不同天线、不同时刻传送不同的信号,使得整个系统有最好的性能。由此也可以看出,多天线系统中的核心内容就是空时码技术,因为只有这一点是与单天线系统有着本质的区别。

空时码技术成为多天线系统理论中的核心,不仅在于上述理由,其实还有更深层次的原因。事实上,由于系统有多根天线发送信号,有多根天线接收信号,而每根发射天线与接收天线之间构成了一个传递信号的通道,这样在发送方与接收方之间就构成了多个通道。另外,由于信道是无线的,所传送的信号受到空间电磁环境的影响。例如,由于距离而引起的信号强度的衰减,由接收方周围环境而

引起的信号反射、折射,由接收方的移动而引起的信号衍射等多种因素都会影响到接收的信号,并且这些影响因素是无法事先确定的,从而信道的影响是随机的,会时好时坏,好的时候能增强接收到的信号,坏的时候则会削弱接收到的信号。因此,单天线系统只有一个通道,被削弱到无法检测的信号就无法恢复;而多天线系统有多个通道,假如某个通道的信号被削弱,但同时另外的通道可能得到增益。多个通道同时被削弱到不可检测的程度的可能性大大地降低,这就是所谓的多天线中的空间分集(space diversity)。充分利用空间分集的最有效方法是同一个原始数据信息(即需要被传送的数据)通过所有的发射天线发送,这样才能充分地利用所有的通道。但如果所有的天线只传送同一信号,势必影响到系统的传输速率。因此需要进行编码来平衡这两者之间的关系。

多天线系统还创造了另外一个分集,这就是时间分集(time diversity),即同一原始信号在不同的时刻多次被发送,这些信号同样可以通过不同的通道到达接收端。但如果天线在不同时刻都发送同样的信号,系统的传输速率将大大降低。因此,需要合理地安排信号的发送,这也是空时码的基本任务之一。

总之,多天线系统中的多发多收创造了空间分集与时间分集,这是多根天线带来的物理上的好处。但要充分地利用这两个分集的好处,必须进行编码,安排好所要发送的信号,这就是为什么要构造空时码的最基本原因之一。

2. 空时码

已知多天线系统中的关键技术是空时码,那么,如何来构造空时码呢?更具体地说,给定系统的参数,即发射天线与接收天线个数(分别记为 M 和 N)、传送率 R (每使用信道一次所要传送的比特数)及时延数 T ,如何构造 2^{TR} 个 $T \times M$ 矩阵作为码本来承载信号。要回答这一问题,我们还是要回到单天线的理论中寻求答案。

在单天线理论中,承载信号的码本(codebook)是 2^R 个复数所组成的点集,这里 R 是系统的传送率。根据成对错误概率公式的 Chernoff 上界可知,这 2^R 个复数的构造原则是在总能量限定的情况下,任何两点之间的最小距离越大越好。这样,码本的构造与复平面上摆点(packing)原则相同,从而码本的构造就转化为数学问题。例如, $R=1$ 时就用BPSK, $R=2$ 时就采用4QAM或4PSK等。单天线系统的理论与实践都证明,上述方法与由此而得到的码本是行之有效的。

由此得出以下两点值得借鉴:

- (1) 码本的构造需要遵循一定的构造原则,这就是摆点原则。
- (2) 构造原则是建立在系统的成对错误概率的 Chernoff 上界基础之上。

事实上,空时码的构造也是遵循以上两点。

早在20世纪末,Tarokh等首先考虑了一个多天线系统的码本的构造原则,或

者说构造准则。他们假设系统的传送方不知道信道信息而接收方完全知道信道信息。在这样的假设之下,他们分析了系统的成对错误概率公式,并得到了相应的 Chernoff 上界。为了使得此上界能够达到极小,码本必须满足两个条件,而这两个条件就成了空时码构造的基本准则。在他们的论文发表之后不久,酉空时码与差分空时码的设计准则也相继被提出,这些准则也是建立在成对错误概率公式分析的基础之上。与前面所提到的空时码不同的是,在这两种码适用系统中并不需要接收方知道信道信息。

有了码本的构造准则,接下来的问题是如何在准则的指导下来构造具体的码本。在单天线系统中,由于构造问题转化为成熟的数学理论问题,因而可以借助于数学上已有的结论。但空时码的构造则完全不一样,当时没有完整的、成熟的数学理论可支撑空时码的构造。这样就必须从头开始。因而,在本世纪初,大量的研究者投入了大量的精力来从事这个课题的研究。

最早出现的系统性的构造方法是正交空时码(orthogonal space-time codes)。特殊的正交空时码最先是由 Bell 实验室的 Alamouti 提出,而后由 Tarokh 等借助于数学中的正交设计理论推广到一般的情形。虽然提出正交空时码的出发点是为了降低系统的解码复杂度,但是它能很好地满足先前提到的空时码的设计准则。唯一的不足之处是正交空时码的符号速率不够高。为了提高符号速率,Jafarkhani 等几乎同时提出了拟正交空时码(quasi-orthogonal space-time codes),所付出的代价是解码复杂度的增加及不满足空时码设计准则。

为了使得拟正交空时码满足设计准则,Su 和 Xia 给出了新的设计方案,完全地解决了这一缺陷。而为了降低拟正交空时码的解码复杂度,由 Yuen 等提出,而后由 Wang 等完善的新方案,使得拟正交空时码可以和正交空时码几乎有相同的解码复杂度。

无论是正交或拟正交空时码,它们的传送率都受到限制。为了提高传送率,在 2003 年之后,满秩的对角空时码由 Damen 等提出。这种码的构造建立在代数数论中的数域扩张理论基础之上,他们的发现使得空时码的构造与代数数论联系在一起。从而,丰富的代数理论可以为空时码的构造提供强有力的手段。而后,由 Belfiore 等提出的 2×2 黄金空时码,使得全速率、满秩且行列式下有界的完备空时码成为可能。在 2004 年,Liao 等得到了几乎是最优的 2×2 完全空时码。近年来,许多学者都致力于推广黄金空时码的概念,找到了高阶的完全空时码。这其中,由印度科学家 Rajan 首倡的,利用可分代数的表示论构造空时码的思想同样完成了高阶完备空时码的构造。

完备空时码具有满秩、全速率等高性能性质,但是它的解码复杂度相当高。如何来平衡复杂度与高性能这两者之间的关系是近两三年的主要研究目标,在这方面,也有相当多的成果出现,很遗憾由于时间和篇幅的限制,这些工作没有包括

在本书中。

另一方面,酉空时码与差分空时码的研究也取得了相当可观的成果,大量的数学工具已被用来构造这两种码。例如群论、群的表示论、Cayley 变换、Grassmann 流形及其上的摆点理论、Hurwitz-Radon 理论等。

3. 本书的构成

本书由 8 章构成。第 0 章是绪论;第 1 章介绍多天线系统理论,是后续 6 章的理论基础;第 2~7 章分别介绍各种不同的空时码理论。

第 1 章多天线系统理论主要包括多天线系统的容量理论、空时码的设计准则和分集(diversity)与频分复用(multiplexing)之间的最佳平衡点这三部分内容。容量理论奠定了通信系统研究的理论基础;空时码设计准则给出了空时码设计的目标;分集与频分复用的最佳平衡点不仅给出了系统能量与速率之间的最佳平衡,而且还给出了衡量码本质量的标准。

第 2 章着重介绍正交空时码。正交空时码是一种具有低解码复杂度的空时码。因而我们将从解码复杂度入手,导入正交空时码的概念,然后介绍正交空时码的性质、构造方法等。

第 3 章介绍拟正交空时码。由于正交空时码的符号率低,为了提高符号率,适当增加解码复杂度,提出了拟正交空时码。我们将介绍拟正交空时码的定义、性质、满秩性及求得具有最小解码复杂度的拟正交空时码的构造方法。

第 4 章与第 5 章介绍建立在追求极大分集乘积(diversity product)而得到的空时码。第 4 章介绍对角空时码,它是完备码(complete code)的基础,它结构简单,可以借助于代数数域扩张理论来构造。

第 5 章介绍分层代数空时码,它建立在代数扩张的基础之上,到目前为止,能够达到最大分集乘积的空时码都是以此码为基础的。

上述章节介绍的空时码都是假定接收方已知信道信息,而第 6 章转向接收方不知道信道信息时的空时码,这就是酉空时码。主要介绍基于 Fourier 变换和基于 Grassmann 流形的两种构造方法。

第 7 章介绍差分空时码,它也用于接收方不知道信道信息的情况。换句话说,如果系统采用差分空时码,则解码方不需要信道信息。简单介绍利用群论及其表示论的差分空时码构造,然后再介绍一种基于几何结构的差分空时码构造。

本书最后有四个附录,这四个附录都是有关空时码的几个基本定理的证明。附录 A 是有关正交空时码的符号率上界的证明。附录 B 给出了拟正交码中具有最低解码复杂度的几个结论的证明。最后两个附录给出了一个差分空时码和对角空时码具有最优分集乘积的证明。这四部分的证明都比较长,但也比较详细,感兴趣的读者可以参考阅读。

第 1 章 多天线系统

1.1 信道模型

假设系统有 M 根发送天线与 N 根接收天线,如图 1.1 所示。从第 i 根天线到第 j 根天线的信道增益系数设为 h_{ij} , $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$ 。假设各信道之间是相互独立的,并且每个 h_{ij} 在时间 T 之内是不变的(T 称为相干时间),但从上一个 T 时间段跳到下一个 T 时间段是变化的,其转化规律服从于零均值、单位方差的复 Gauss 分布。记 $\mathbf{H}=(h_{ij})_{M \times N}$,则 $\mathbf{H}$ 可以看成是一个 $M \times N$ 的随机矩阵的一个实现。

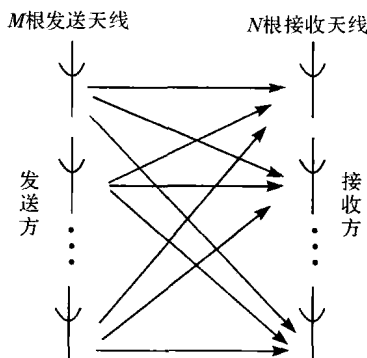


图 1.1 多天线系统

再假设第 i 根天线在第 t 时刻发送的信号为 x_{ti} , ($t=1,2,\dots,T; i=1,2,\dots,M$), 并且记 $\mathbf{X}=(x_{ti})_{T \times M}$, 则基本的发送-接收方程可以认为

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{\rho}{M}} \mathbf{X} \mathbf{H} + \mathbf{W} \quad (1.1.1)$$

其中, $\mathbf{Y}=(y_{tj})_{T \times N}$ 为 N 根天线在 T 时刻内接收到信号; ρ 是每根天线接收到的信噪比(SNR); $\mathbf{W}=(w_{tj})$ 是一个 $T \times N$ 的矩阵, 它的每一个元素 w_{tj} 表示第 j 根接收天线在第 t 时刻由接收天线接收信号时所产生的噪声。一般假设为 Gauss 白噪声, 即它们之间相互独立, 且服从零均值、方差为 σ^2 的复 Gauss 分布, 但由于我们的方程出现 ρ , 因而假设 $\sigma^2=1$ 。另外, 也正是由于方程中出现了信噪比 ρ , 要求假定每个发出信号的平均能量为 1, 即 $\mathbf{X}$ 满足下列方程:

$$E[\|\mathbf{X}\|^2] \leq TM \quad (1.1.2)$$

方程(1.1.1)是 M 发 N 收的多天线系统的基本方程,它是我们今后工作的基础。这个方程与单天线的基本方程有许多不同。但从设计码本的角度来看,主要区别如下:当 $M=N=1, T=1$ 时,得到单发单收的基本方程为

$$y = \sqrt{\rho} x h + w \quad (1.1.3)$$

在式(1.1.3)中,发送的信号是一个复数 x 。而在式(1.1.1)中发送的信号 $\mathbf{X}$ 是一个矩阵。从复数到矩阵,无论从通信的角度,还是从数学的角度来看,都有了很大的区别。首先,矩阵的维数(TM 维)要比复数的维数(1 维)高得多。因而在设计码本时,所持有的自由度也高得多,同时,也给设计带来了难度。其次,所有矩阵组成的集合,既是一个线性空间,又是一个流形(如果加上某些性质或条件的话)。因而在设计码本时就可以利用一些流形的工具,如第 6 章要介绍的酉空时码就可以看成是 Grassmann 流形上的点集。最后,从代数的角度来看,矩阵的某些子集可以看成是群,因而又可以用群论的工具,例如用群的表示论来构造空时码。总之,由于从复数变到了矩阵,许多数学的工具可以应用到空时码的构造当中来。而且从已有码的构造方法来看,成功的码本背后都有深奥的数学理论的支撑。这是多天线码本与单天线码本构造的最大区别。

1.2 多天线系统的容量

系统的容量分析是通信理论研究中最重要内容之一。自从 Shannon 在 20 世纪 40 年代末 50 年代初开始对一个不确定性、离散输入、离散输出信道的容量分析开始以来,对系统的容量分析就成为信息论这一学科的主要内容。从本质上讲,系统容量就是在保证通信质量的前提之下给出系统的最大传送率。因此系统容量就成为系统质量的重要衡量标准,同时也对人们该如何利用该系统给出了理论指导及保障。在本节中,首先给出了单发单收系统的容量计算公式,其次再给出一个多发多收系统即多根天线发送、多根天线接收的无线通信系统的容量计算公式。在具体分析系统的容量计算公式之前,先来回顾一下一般的系统的容量计算公式。

假设一个输入输出系统如图 1.2 所示。这里, X 表示系统的输入, Y 表示系统的输出,而信道可以是多种多样的。它可以是离散的,也可以是连续的。所谓离散的是指系统的输入只限制在一个有限的点集内,可以记为 $\mathcal{X} \triangleq \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 。此时系统的输出也是离散的,可以记

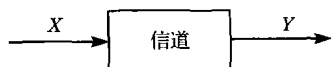


图 1.2 输入输出系统

为 $\mathcal{Y} \triangleq \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 这时的信道是由转移概率 $P(y_j | x_i)$, $(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 所刻画。而所谓连续的是指输入 X 和输出 Y 都可以是任意的点集, 此时的点集可以是实数轴上的任意子集或全部, 也可以是复平面上的子集, 还可以是实数域上或复数域上的向量空间中的子集, 或者是某一个流形。事实上, 将要关注的多天线系统的输入与输出可以看成是流形间的通信, 此处的流形由矩阵所组成。至于连续型的信道, 一般由一个 X 与 Y 之间的关系式组成, 通常为一个方程, 它可以是线性的, 也可以是非线性的。

对于上述系统, 其容量的定义是比较复杂的, 具体可参见信息论的经典书 (Cover et al., 1991)。在此给出信息容量 C (information capacity) 的定义:

$$C \triangleq \max_{f_x(x), E(|x|^2) \leq P} I(X; Y) = \max_{f_x(x), E(|x|^2) \leq P} (h(Y) - h(Y | X)) \quad (1.2.1)$$

这里, $I(X; Y)$ 表示随机变量 X 与 Y 之间的交互信息; $h(Y)$ 表示输出 Y 的熵 (entropy); $h(Y | X)$ 表示给出输入 X 条件下的输出 Y 的条件熵 (conditional entropy)。而式 (1.2.1) 中, $f_x(x)$ 表示输入 X 的分布函数, $E(|x|^2) \leq P$ 是指输入信号的能量限制在 P 的范围之内。注意, 式 (1.2.1) 中的极大值是在所有的 X 的分布函数中寻找的。从这一计算公式中可以知道, 所谓信息容量就是在所有的输入方式中找到一种方法, 使得输入与输出之间的交互信息达到极大。

信息容量与容量从定义上讲是两个不同的概念, 但在很多的信道中被证明是相等的。因而在本书中这两者不加区别。

有了上述公式, 就可以针对具体的系统给出容量的计算。例如对于一个简单的 AWGN 系统, 其输入 X 与输出 Y 之间的关系如下:

$$Y = X + W \quad (1.2.2)$$

这里, X 可以取任意的复数值; W 表示噪声, 它是一个复的 Gauss 随机变量, 其均值为零, 方差为 σ^2 , 即 $W \sim \text{CN}(0, \sigma^2)$ 。也就是说, W 可以表示为 $W = W_1 + jW_2$, W_1, W_2 分别表示实部和虚部, 是相互独立的实随机变量, 且 $W_1, W_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2})$ 。这个系统中输入与输出可以是任意的复数, 但对输入会有一个能量限制, 其数学表达式如下:

$$E[\|X\|^2] \leq P \quad (1.2.3)$$

这里, P 是一个大于零的常数, 而 E 表示期望。

对于上述系统, 可以用式 (1.2.1) 来计算其容量。由文献 (Cover et al., 1991) 可知, 式 (1.2.1) 中的极大值是在输入 X 的分布为 Gauss 分布时达到, 即 $f_x(x)$ 取 $\text{CN}(0, P)$ 时, 其交互信息达到最大值。这样, 由于 $Y = X + W$, Y 也是一个高斯随机变量, 其均值为 0, 而方差为 $P + \sigma^2$ 。所以得到

$$h(Y) = \log_2(\pi e(P + \sigma^2)) \quad (1.2.4)$$

另一方面, 当 X 固定为某一个值时, 例如 $X = x$, 则 Y 也是一个高斯随机变量, 其

均值为 x , 而方差为 σ^2 , 所以得到

$$h(Y | X) = \log_2(2e\sigma^2) \quad (1.2.5)$$

这样,

$$\begin{aligned} C &= \log_2(2e(P + \sigma^2)) - \log_2 2e\sigma^2 \\ &= \log_2\left(1 + \frac{P}{\sigma^2}\right) \\ &= \log_2(1 + \rho) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

这里, $\rho = \frac{P}{\sigma^2}$ 表示信噪比。这个计算结果表明, 系统 $Y = X + W$ 的容量是 $\log_2(1 + \rho)$, 即每使用一个信道, 就平均而言, 假如要求错误概率能够趋于零, 其最大的可能的传送比特数为 $\log_2(1 + \rho)$ 比特。注意此时的单位是每使用一次信道所能传送的比特数, 今后记此单位为 pcu。有了以上的公式, 让我们来计算单发单收的系统的容量。

1.2.1 单发单收系统的容量

在这一小节中, 假设系统只有一根发射天线和一根接收天线, 而信道是无线信道。要得到这一系统的容量, 必须明确发送方与接收方对信道信息的掌握情况, 因为容量是与发送方或接收方对信道信息的掌握情况密切相关的, 这一点与上述讨论的 AWGN 信道情况大不相同, 并且在下面几小节中讨论多天线系统的容量时表现得更加明显。

首先来看一下无线信道。无线电波在传播过程中会产生衍射、反射, 当然还有电波强度的衰减等。因此无线信道由发送方与接收方的周围环境所决定, 而这种环境是可能随时随地变化的, 这就导致信道是随机变化的。因而可以假设信道是一个随机变量, 记为 h 。通常情况下, 可以假设 h 是一个复高斯随机变量, 其均值为 0, 方差为 1。

有了信道的假设, 可以写出发送接收基本方程如下:

$$y = \sqrt{\rho}hx + w \quad (1.2.7)$$

这里, x 是发送的信号, 通常是一个复数; w 是噪声, 它是取自于一个复的高斯随机变量, 其均值为 0, 方差为 1; y 表示接收到的信号; ρ 表示接收到的信噪比。注意, 由于我们假设噪声方差为 1, 则信号的能量约束为

$$E[|x|^2] \leq 1 \quad (1.2.8)$$

很明显, 与 AWGN 信道中的发送接收方程(1.2.2)相比, 在这里多了一个随机变量所产生的数 h , 它代表信道。

下面继续对信道 h 作进一步的假设。我们将讨论一种慢变的信道, 即假设此信道在传送数个信号的区间内是不变的, 这种信道称为块状变化信道。

对信道及发送接收方程作出如下假设:在 K 个信号传送区间内,发送接收方程可以表示如下:

$$y[k] = h_1 x[k] + w[k], \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (1.2.9)$$

在接下来的 K 个信号区间,发送接收方程表示如下:

$$y[k] = h_2 x[k] + w[k], \quad k = K+1, K+2, \dots, 2K \quad (1.2.10)$$

以此类推,在上面两个式子中, h_1 和 h_2 都是随机地从复数高斯变量 $CN(0,1)$ 中抽取的复数值,而 K 是一个大于 1 的整数。

以上是对信道的假设,接下来对发送方、接收方对信道 h 的掌握情况作一些分类:第一类是假设发送方与接收方都知道信道 h 。这种情况在实际当中是有可能实现的。例如发送信号与接收信号都采用同一频段,则通过上行与下行的训练可以得到信道 h 。第二类是假设发送方不知道信道而接收方知道信道。这种情况最为常见,它是通过发送方在发送正式的信号之前发送训练信号,而使接收方能够测试出信道信息。第三类是假设发送方与接收方都不知道信道的情况。这类假设最为方便,即不用测试信道,但由于这样做,检测出的信号误码率很高而很少采用。在这一小节中主要是采用第二类,其他两类的情况在下面几小节中再讨论。

现在我们来讨论第二类假设下的信道容量。由于

$$y = \sqrt{\rho} h x + w \quad (1.2.11)$$

假如信道 h 是一直不变的,即 h 是一个恒定的值,则此信道又退化为 AWGN 信道,则由 AWGN 的信道容量式(1.2.6)可知,其容量 $C(h)$ 为

$$C(h) = \log_2(1 + |h|^2 \rho) \quad (1.2.12)$$

与式(1.2.6)相比,这里多了一个因子 $|h|^2$,而且直接乘以信噪比 ρ ,因此可以称 $|h|^2$ 为信道增益因子。

遗憾的是信道 h 是随机变化的, $|h|^2$ 有时可能大于 1,有时也可能小于 1,甚至有可能趋于零。而当 $|h|^2$ 趋于零时, $C(h)$ 也趋于零。因而对于一个变化的信道,从严格的意义上讲,信道的容量为零。因为发送方以任何的速率传送信号都不能保证其错误概率趋于零。把上述的文字表示成数学语言,就有了溢出概率的概念。具体如下:假设传送信号的速率是每使用一次信道 R 比特(R 比特 pcu),则由 Shannon 定理可知,当 $C(h) < R$ 时,信号传送的错误概率是不可能趋于零的。事实上,当编码的长度趋于无穷大时,其错误概率趋于 1。这种情况是很不利的,我们把发生这种情况的概率称为溢出概率(outage probability),严格的定义如下:

$$P_{\text{out}}(R) \triangleq P_r\{C(h) < R\} \quad (1.2.13)$$

让我们来计算一下这个概率,由式(1.2.12)可知:

$$P_{\text{out}}(R) \triangleq P_r\{C(h) < R\}$$