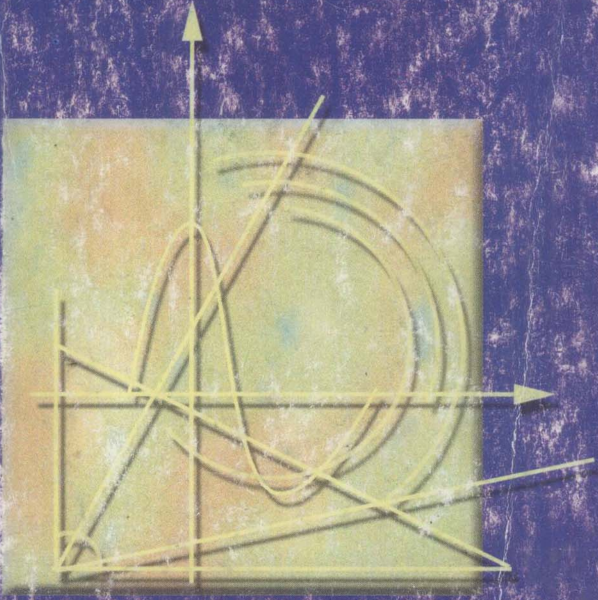
数学思想方法及其教学示例



肖柏荣
潘娉姣 主编

江苏教育出版社

数学思想方法及其教学示例

肖柏荣　潘娉姣　主编
肖柏荣　苏　平　曹卫东　等编著

江苏教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思想方法及其教学示例/肖柏荣,潘娉娇编著.—南京:江苏教育出版社,2000

ISBN 7-5343-3773-9

Ⅰ.数... Ⅱ.①肖...②潘... Ⅲ.①数学课-思想方法-研究-中国②数学课-教案(教育)-中学
Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第70563号

书　　名	数学思想方法及其教学示例
作　　者	肖柏荣　潘娉姣等
责任编辑	王建军
出版发行	江苏教育出版社
地　　址	南京市马家街31号(邮编210009)
网　　址	http://www.1088.com.cn
集团地址	江苏出版集团(南京市中央路165号　210009)
集团网址	凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京展望照排印刷有限公司
印　　刷	常熟市兴达印刷有限公司
厂　　址	常熟市赵市镇南(邮编215518)　电话52381162
开　　本	850×1168毫米　1/32
印　　张	10
插　　页	5
字　　数	246 000
版　　次	2000年10月第1版 2004年10月第3次印刷
印　　数	4 521-7 540
书　　号	ISBN 7-5343-3773-9/G·3468
定　　价	18.00元
邮购电话	025-85400774,8008289797
批发电话	025-83249327,83249091
盗版举报	025-83204538

序

80年代初，在著名数学家徐利治先生的倡导下，我国数学界开始了数学方法论的研究工作.十多年间，不仅数学方法论的文献和著作日益增多，而且它已作为一门重要的课程列入高等师范院校数学系和中小学数学教师继续教育的教学计划之中.时至今日，数学方法论这一新兴学科在我国学术界已日趋成熟.

随着数学方法论的发展和普及，一些数学教育研究工作者和中学数学教师开始了数学思想方法及其教学的课题研究.由肖柏荣教授和特级教师潘娉姣主持的省级课题"中学数学思想方法的研究与实践"便是其中的一个.他们以对事业执著追求的精神，不仅探讨了数学思想方法的涵义和特点，而且以中学数学教学为背景，探讨了中学数学思想方法的内容和教学，并开展了这方面的教学实验.本书中的各章内容正是他们研究成果的记载和反映，这些成果受到同行专家的充分关注和肯定.

当前，国内对中学数学思想和方法进行探讨的论文很多，但进行系统的理论阐述的著作并不多见，在著作中同时提供数学思想方法的教学案例更是寥寥.把数学思想方法的理论与中学教学的实践紧密结合起来正是本书的显著特点.相信本书的问世，无论是对数学思想方法的理论研究，还是对其教学实施都会起到积极的推进作用.时值本书即将出版之际，略致数语以表祝贺之意.同时，愿作者在和读者及同行专家的交流、探讨中，使本课题的研究更加深入.

郑毓信

1999年5月于南京大学

前　　言

随着数学教育的发展，人们越来越认识到数学思想方法是数学基础知识的一部分，数学思想方法的教学是数学教学的重要内容．正如日本数学教育家米山国藏先生所指出的：科学工作者所需要的数学知识，相对地说是不多的，而数学的精神、思想与方法却是绝对必要的．数学的知识可以记忆一时，但数学的精神、思想和方法却随时随地发挥作用，可以使人受益终身．

为加强数学思想方法的教学，亟待对其理论和教学对策进行探讨．我们正是在这样的思想驱使下，开展了对数学思想方法及其教学的省级课题研究，并进行了教学实践的探索．经专家评审，该课题获江苏省首批教学研究课题二等奖．本书不仅反映了对该课题的研究成果，更记载了我们为数学教育发展而努力探索的精神．

全书共分五章．第一章对数学思想方法进行概述，探讨数学思想方法的涵义和特点，数学思想方法的发展和演进，数学思想方法研究的价值和意义．第二章介绍中学常见的数学思想：符号与对应的思想、方程与函数的思想、公理与演绎的思想、整体与分类的思想、转化与变换的思想、集合与无穷的思想．第三章从结论与思考的探索和发现的角度，介绍中学常见的数学方法：数学证明的思考方法、数学结论的发现方法、数学中的美学方法、数学抽象与数学模型方法．第四章探讨数学思想方法的教学，阐述数学思想方法的教学价值、教学原则、教学途径和教学设计．第五章则是课题组的一线教师进行数学思想方法教学实践的部分案例．

本书的主要撰写人是：肖柏荣（第一、四章和第三章的第一、四节），苏平（第二章），曹卫东（第三章的第二、三节）．第五章的教

学案例由潘婷姣、邹家禔、张心珉、栾学智、张志超、赵建强、张昌宁、高纪平、尤小平、潘春雷、张爱平、陶兆龙、周俊、闻建华等撰写，由潘婷姣审阅修改及补充.全书由肖柏荣作总体构思、统稿，并对一些章节作了补充与改写.

在成书过程中，引用了许多学者的研究成果，这对本书的撰写起到很大的启迪作用，谨向有关作者表示谢意.本课题的研究及该书的撰写还得到著名的数学方法论专家郑毓信先生的关心和指导，他多次为课题组成员开设有关讲座，介绍国内外的研究动态，对部分案例的设计给予指导，并欣然为本书作序，在此一并致以衷心的感谢.

由于作者水平所限，书中的疏误之处一定不少，恳请专家、学者及广大读者不吝指正.最后，谨向为本书的编辑出版工作予以大力支持并付出辛勤劳动的王建军同志致以诚挚的谢意.

作　者
1999 年 4 月于南京

目　录

第一章　数学思想方法概述

随着数学教育的不断发展，数学的教育功能越来越为人们所认识．数学不仅是人们参加社会生活、从事生产劳动和学习、研究现代科学技术必不可少的工具，而且它的内容、思想和方法已成为现代文化的重要组成部分．于是，数学思想方法及其教学的课题近年来也越来越引起大家探索和研究的兴趣．本章将首先对数学思想方法进行概述，探讨数学思想方法的涵义和特点，数学思想方法的发展和演进，以及数学思想方法研究的价值和意义．

§1.1　数学思想方法的涵义和特点

一、数学思想方法的涵义

从词义解释看，思想是指客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果．从哲学角度看，思想的涵义有二：一是与“观念”同义，二是指相对于感性认识的理性认识成果①．兴许，人们是从不同的起点出发，使数学思想的涵义有着多种说法．

既然思想是一种理性认识的成果，那么，作为对数学认识的反映，可以认为数学思想是数学历史长河中各阶段上相对真理性认识的总和，是人类对数学及其对象、数学概念、命题和数学结论以及数学方法的本质性认识②．

---

① 《中国大百科全书》哲学（Ⅱ）．北京、上海：中国大百科全书出版社，1987：832

② 严华祥．数学思想与数学教育．数学教育学报，1995(1)

有人还注视到数学活动是一种社会活动，将数学思想阐述为是人们对数学研究对象统一的、本质的认识．它包括对数学本质的理解，对数学基本特性、数学对象、数学与其他科学、数学与客观世界的关系的认识，以及在数学中所创立的新概念、新理论、新模型和新方法的认识. ①

还有人用数学观念来阐述数学思想，认为数学观念是指人们用数学的思考方式去考虑问题、处理问题的自觉意识或思维习惯②，数学思想是以数学观念为核心的对数学关系中最一般规律的认识③.

比较上述各种说法，不难发现它们的共同之处. 首先，数学思想是一种理性认识，因而它必然是在长期的数学认识活动中，经过了实践与认识的多次循环往复和不断深化. 它不断地从数学概念、数学命题和数学方法等理性认识中得到概括和提炼，成为一种对数学本质及其规律的深刻认识，形成解决数学问题的一般性观点. 同时，数学思想作为人们对数学认识的反映，又直接支配着数学的实践活动. 任何数学事实的理解，数学概念的掌握，数学方法的运用，数学理论的建立，无一不是数学思想的体现和运用. 因此，数学思想是对数学概念、方法和理论的本质认识. 于是，我们可以对数学思想的涵义作出简要的概括：数学思想是在数学活动中解决问题的基本观点和根本想法，是对数学概念、命题、规律、方法和技巧的本质认识，是数学中的智慧和灵魂.

数学思想按其对认识的研究范围来划分，可分为宏观数学思想和微观数学思想. 对数学整体的认识，数学与其他科学、数学与

---

① 朱学志、周金才、高沛田. 数学的历史、思想和方法（上册）. 哈尔滨：哈尔滨出版社，1990：9

② 曹才翰主编. 中国中学教学百科全书（数学卷）. 沈阳：沈阳出版社，1991：366

③ 任樟辉著. 数学思维论. 南宁：广西教育出版社，1990：313

客观世界的关系等属于宏观数学思想的范畴.对数学内部各分支及各种体系结构中特定内容和方法的认识,包括对所创立的新概念、新模型、新方法和新理论的认识,则属于微观数学思想的范畴,如古希腊数学家的演绎推理思想以及符号代表数的思想和现代数学的集合论思想等.应该指出,数学中也有从一般科学思想移植过来的思想,比如分类思想,它来自形式逻辑.当然,欲称之为数学思想,需要将一般科学思想"数学化".另外,数学思想(如公理化思想)也可以被其他学科使用,从而转化为一般科学思想.

"方法"一词,从汉字词源看,即行事之条理或度量方形之法,泛指一种标准和规则.西方语言中"方法"一词,源于希腊文的 μετοδος,表示沿某条道路行进.可见,方法是人们活动的步骤、程序和策略等,是为了达到某种目的而采取的途径、手段、方式和操作的总和.所以,数学方法就是指解决数学问题的途径、策略和手段.显然,这种理解是就数学本身而言的.如果将其作用范围考虑到数学以外的世界——自然科学、技术科学或社会科学等各个方面,数学方法作为一种科学方法,有时可更广义地理解为用数学语言表述事物的状态、关系和过程,并加以推导、演算和分析,以形成对问题的解释、判断和预言的方法①.在这样的意义下,数学本身就是一种方法.它既具有一般科学方法的特征,又具有横向移植的特征,从而在整个科学领域中有着广泛的应用.在现代科学中,运用数学的程度已成为衡量一门科学发展是否成熟的重要标志.

数学方法按不同标准有不同的分类.例如,按其作用的范围可以划分为三个不同的层次.第一,一般的逻辑方法,如分析、综合、类比、联想、归纳、演绎、猜想等,它们不仅适用于数学,而且适用于其他学科领域.第二,全局性的数学方法,如极限方法、关系映射反

① 《中国大百科全书》哲学(Ⅱ).北京、上海:中国大百科全书出版社,1987:821

演方法、数学模型方法等，这些方法的作用范围广，有的甚至影响着一个数学分支和其他学科的发展方向. 第三，技巧性的数学方法，如换元法、待定系数法、配方法等，它们往往和具体数学内容联系在一起，是解决某类数学问题的方法. 如果按数学方法的运用功能可以分为数学发现方法、数学证明方法等.

数学思想与数学方法之间既有联系又有区别. 首先，两者都是以一定的数学知识(数学符号、概念、命题、算法等)为基础，反过来又促进着数学知识的深化以及向数学能力的转化. 其次，两者具有抽象概括程度的不同，表现出互为表里的关系. 一方面，数学方法应受到数学思想的指引，是数学思想在数学活动中的反映和体现，表现形式外显；另一方面，数学思想是相应数学方法的结晶和升华，表现形式内隐. 也就是说，数学思想往往带有理论性的特征，而数学方法具有实践性的倾向. 由于人们在数学学习与研究活动中，很难把思想和方法严格区分开，所以常统称为数学思想方法. 同一数学成就，当用它去解决别的问题时，就常称之为方法；当评价它在数学体系中的自身价值和意义时，就常称之为思想. 例如，在解决实际应用问题时，用含未知数的式子建立等量关系，由此求得未知数的值，我们就说“方程方法”；当评价和讨论它的价值，人们发现方程不仅是解决实际问题的数学模型，而且可以用代数方程研究几何曲线，还可以把方程理论和思想方法用到非方程的许多等式问题上去，于是又讲“方程思想”. 当然，有时也将这两者意思合在一起，笼统地说成“方程思想方法”.

二、数学思想方法的特点

数学思想方法具有以下几方面特点.

1. 概括性

心理学指出，任何个体认识客观事物的本质属性和规律性的联系都要经过抽象和概括过程. 数学知识的学习离不开概括，且较之其他学科的知识更抽象、更概括. 例如，物理学中的匀速直线运

动的运动规律 $s = vt$ 和简谐运动的规律 $a = -\frac{k}{m}x$（m、x、a 分别表示小球的质量、离开平衡位置的位移和运动的加速度，k 是常数）均是对现实世界具体事物的抽象和概括，而数学上的正比例函数概念则是在上述基础上的再抽象和再概括．而数学思想方法又是不断地从数学概念、数学命题和数学理论中提炼和概括的产物．比如，数学归纳法是在对皮亚诺（Peano）自然数公理基础上的提炼，是对自然数集合“序”的内省．正是由于数学对象本身的概括性以及数学思想方法又是对数学知识的提炼和再概括，这就使得概括性成为数学思想方法的最本质的特征．

应该指出，数学思想方法一旦形成，便舍弃了具体的数学内容，只以形式而存在，从而可以运用到一切合适的场合之中．例如，数学中的关系映射反演方法的建立标志着一般的化归方法达到更新更高的抽象概括程度，因而成为数学研究各个领域中有普遍应用价值的一般方法．

2. 隶属性

数学思想方法高度的概括性，使它不同于具体的数学知识，而以元知识的形态与数学知识浑然一体地存在着，成为数学科学体系中两个不可分割的部分．数学知识内部蕴含着丰富的数学思想方法，数学思想方法隶属于数学知识．形象地说，数学思想方法是生长在数学知识这块“皮”上的“毛”．数学知识成为数学思想方法的载体，数学思想方法通过数学知识来显化．例如，多项式的恒等定理中蕴含着待定系数法，待定系数法在因式分解、化部分分式、求函数解析式、解方程（组）等数学内容中得到显化．正是由于这种隶属性，进行数学思想方法的教学时，应注意对教材的挖掘，从数学知识的教学开始，就通过数学活动逐步明示相应的思想方法．

3. 层次性

数学思想方法是概括的结果，概括程度的高低决定了数学思

想方法具有不同的层次. 思想又是方法的结晶与升华,思想相对于方法通常居更高层次. 除了按其对认识的研究范围将数学思想分为宏观与微观之外,又有人把数学思想分为三个层次：一为数学核心思想(序化的思想),二为一般数学思想(公理思想、转化思想、符号思想、分类思想),三为具体数学思想(参考文献[4]).

数学方法更有着不同的层次划分. 除前面所述外,张奠宙等在《数学方法论稿》(参考文献[20])中将数学方法分为以下四个层次：一是基本和重大的数学思想方法(模型化方法、微积分方法、概率统计方法、拓扑方法、计算方法等),二是与一般科学方法相应的数学方法(类比联想、分析综合、归纳演绎等),三是数学中的特有方法(数学表示、数学等价、数形转换等),四是中学数学中的解题方法与技巧. 以上所述,都反映了人们对数学思想方法具有层次性特点的一致看法.

4. 迁移性

心理学认为迁移就是概括,意即任何学习的迁移都离不开概括. 所有学习中的迁移都必须通过概括这一思维过程才能得以实现,且概括程度越高,迁移半径就越大,适用的范围就越广.

数学思想方法是抽象、概括的结果,它具有广泛迁移性的特点. 这种迁移性表现在数学内部,它是沟通数学各分支、各部分之间联系的纽带和桥梁,是构建数学理论的基石;表现在数学外部,它能沟通数学与其他科学及社会的联系,产生更加广泛的迁移. 源于几何的公理化思想方法,不仅后来迁移到代数、分析、概率等数学分支,从而在现代数学中占据统治地位,而且已迁移到物理学、社会学等学科中,成为一般的科学思想方法.

需要指出,由于思想和方法的不同层次,数学思想和数学方法还具有不同的特点. 数学思想应该呈现它的本质性、导向性和内隐性,而数学方法则更多的表现出程序性、操作性和外显性.

§1.2 数学思想方法的发展和演进

数学是一门古老的学科. 它从萌芽时期发展至今已有数千年的历史. 数学的发展史不只是一些新概念、新命题的简单堆砌,它包含着数学思想和方法的积淀,尤其是数学本身许多质的飞跃,即数学思想方法的重大突破. 本节将概述数学思想方法的发展与演进,以便能使我们对数学思想方法有一个比较全面、历史的认识.

一、古代的数学思想和方法

从远古到公元前5世纪左右的数学萌芽时期是一个漫长的历史过程. 在此过程中,人们不断积累了算术和几何方面的零碎知识,逐渐形成了抽象意义下的数和图形的概念,产生了记数法和各种数制下的算法,出现了测地术. 虽然此时尚未形成一般的数学理论,还谈不上有什么重要的数学思想,但是在数的概念的萌芽和逐步完善中,一一对应的记数法(对应思想)和记数符号的使用起到十分重要的作用,它们有力地推动了数学的发展. 另外,直接的观察和体验被作为是最重要的认识方法.

数学经过漫长的萌芽时期,在古巴比伦、埃及和中国积累了大量的数学知识之后,汇成了两股不同的数学源流,形成了两个各具特色、风格各异的数学体系. 一个是以古巴比伦和埃及数学为源头的,在希腊汇合后又得到长足进步与发展的古希腊数学,另一个则是以解决问题为宗旨、以注重算法为特点的古代中国数学.

古希腊数学在世界文明史上占有极其重要的地位. 它融数学和哲学于一体,以哲学促进数学理论的建立,提出了一系列思辨性的数学观点、理论和方法. 首先,古希腊人对数学的认识有了根本性的变化. 他们认为数学不仅可用来解决一些实际问题,更重要的是他们试图用数学来理解世界,把数学看作是理解宇宙的一把钥匙,是研究自然的一部分,其深刻的数学思想对后世影响甚大. 其

次，古希腊人用演绎证明方法研究几何，使几何学成为一个演绎系统．欧几里得（Euclid）的《几何原本》和阿波罗尼斯（Apollonius）的《圆锥曲线》是演绎数学的代表著作．把逻辑证明系统地引入数学，把数学奠基于逻辑之上，这是对数学认识的一个质的飞跃．由此带来数学思想方法的更新——公理化的思想和演绎推理的方法进入了数学．另外，阿基米德（Archimedes）在推导球的体积公式时，用有限方法处理无限问题，得出许多今日要用极限和微积分才能推算出的结果，他的发现和证明的严密性令后人叹服．值得指出的是，古希腊数学虽然强调演绎推理，但数学思想发展的历史表明，他们的数学创造也离不开观察、实验，离不开归纳、猜想和分析．

中国古代数学是以问题为中心的算法体系，《九章算术》的成书是其形成的标志．就数学知识和方法而言，它不仅包括了现代算术的大部分内容，而且还包括了初等几何中的体积、面积计算方法以及代数中的一些理论、方法和公式．刘徽的《九章算术注》使以《九章算术》为代表的中国古典数学体系得以充实和完善．他在割圆术中，创造了无限逼近的思想，还在面积体积计算中，提出了“出入相补原理”，采用了割补法．中世纪的中国数学尤以代数方面成就辉煌，创造了高阶等差数列的求和方法、布列方程的一般方法、高次方程的数值解法、一元同余式组的解法等．中国古代不仅创造了以问题为中心的算法体系，还形成了具有东方特色的数学思想．

常量数学时期（公元前 5 世纪到 17 世纪），算术、几何、代数、三角逐渐发展成为独立的数学分支．从数学思想方法发展与演进的角度看，从算术发展到代数，是人们对数及其运算在认识上的一次突破，也是数学在思想方法上的一次重大转折．古代算术的主要内容是自然数、分数和小数的性质与四则运算．这里所说的“数”，经历了具体量到抽象数的演进．利用算术解应用题时，正是将抽象的数用加、减、乘、除四则运算符号连结，列出算式，建立能够反映实际问题本质特征的数学模型，尔后通过算术运算获得问题的解．

然而，如何正确地列出算式并不容易. 对于那些含有多个未知数的问题，算术方法几乎不可行. 算术解题法的这种局限性，不仅限制了数学的应用，而且也影响和束缚了数学自身的发展，从而导致代数解题法的产生.

代数解题法的基本思想是：设立未知数，依问题条件列出含有已知数与未知数的代数式，按照等量关系列出方程(组)，通过对方程作变形，求出未知数的值. 代数方法和算术方法的根本区别在于前者允许把未知数作为运算的对象，而后者未知数没有参加运算的权利. 代数解题法的产生过程，正是代数学的形成过程. 在这一历史阶段中，它经历了从文字代数、简字代数到符号代数的过渡，用抽象符号来代表数成为代数学的一个主要特征，对应思想为代数学的建立奠定了基础. 代数学的出现对整个数学的进程产生了巨大而深远的影响，许多重大发现都与代数的思想方法有关. 例如，求解二次方程导致虚根的发现，求解五次和五次以上方程导致群论的诞生，应用代数解决几何问题导致解析几何的建立，等等. 正因为如此，我们把代数的产生作为数学思想方法第一次重大转折的标志.

二、近代的数学思想和方法

17～18 世纪的欧洲处在资本主义的上升时期，生产力的发展推动了科学的进步. 在继承希腊数学和吸收印度阿拉伯数学的基础上，欧洲的数学创造也进入了一个崭新的时期. 在这一伟大的时期里，数学不仅产生了许多新的分支，而且产生了许多新的思想和方法. 它突出地表现在从演绎几何到几何代数化、从常量数学到变量数学以及从必然数学到或然数学的几个重大转折上.

随着几何学的进一步发展，演绎几何的局限性越来越明显，因为许多问题的解决往往缺乏一般性的方法，需要高超的技巧，且推证过程又显得繁难. 而此时代数学日臻成熟，尤其是在形成了一整套简明的字母符号又成功地解决了五次以下代数方程的求解问题