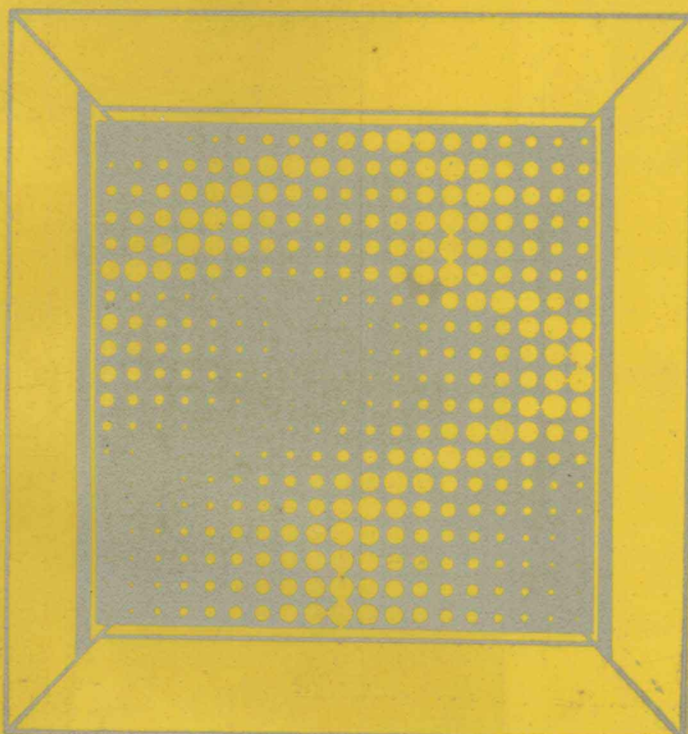
应用数学方法

Methods of Applied Mathematics

高应才　张自立　周义仓　编



陕西科学技术出版社

应用数学方法

高应才　张自立
周义仓
编

应用数学方法

高应才 张自立 周义仓 编

陕西科学技术出版社出版发行

（西安北大街131号）

西安交大轻版印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 7.5印张 18.5万字

1992年12月第1版 1992年12月第1次印刷

印数：1-1000册

ISBN 7-5369-1434-2/G·256

定价：4.50元

内 容 简 介

本书内容包括泛函分析的一些基本知识；古典变分法和近代变分原理以及变分问题的解法；积分方程的解法及一些基本理论；正则摄动法和奇摄动法；偏微分方程的广义解等。

本书可作为理工科高等院校应用数学与计算数学等专业高年级大学生、理工科研究生的教材，也可作为高等学校教师、工程技术人员的参考书。

前 言

为了给工科研究生和理科高年级同学提供一本有关应用数学方法基础知识的教材，我们尝试编写了这本书。这本书是在我们所编讲义的基础上，经过多次试用，反复修改而成，希望本书能帮助读者了解应用数学方法的一些最重要的结果与常用的方法，为学习专业课与扩大数学知识面提供必要的数学基础。

本书分五篇共八章。第一篇介绍泛函分析的一些基本知识；第二篇介绍变分法，内容包括变分问题的引出，固定边界的变分问题，条件变分问题，可动边界的变分问题，变分原理和直接方法；第三篇介绍积分方程，包括化为代数方程组、积分变换、微分法、逐次逼近法等一些常用的求解积分方程的方法，也叙述了积分方程解的存在唯一性、弗雷德霍姆理论等积分方程的基本理论问题；第四篇讨论摄动法初步，内容包括正则摄动与奇摄动问题，L—P方法，匹配法与合成法，多重尺度法；第五篇偏微分方程的广义解，从实际问题入手，引出广义解概念，用 Sobolev 空间基本知识为工具，讨论二阶椭圆型方程边值问题的广义解的存在唯一性和正则性。

本书内容安排次序由浅入深，循序渐进，各篇又相对独立，便于教学，文字叙述条理清楚，通俗易懂，每章配备有适量的习题，书末给出了部分习题的答案与提示，以利于自学，全书讲授时间大约为 54～72 学时，如选用本书作为教材可根据具体情况予以取舍。本书的第一、三篇由周义仓编写，第二篇由张自立编写，第四、五篇由高应才编写。

限于我们的水平，错误与不妥之处在所难免，热忱地希望读者给予批评指正。

编　者

1992 年 7 月

目　　录

第一篇　泛函分析的一些基本知识

第二篇　变分法

第四篇 摄动法初步

第七章 摄动法初步

第五篇 偏微分方程的广义解

第一篇　泛函分析的一些基本知识

泛函分析以其高度的统一性和广泛的应用性，在数学领域及应用学科中占有重要地位。在这一篇中主要介绍泛函分析的一些基本概念和基础知识，有些定理没有给出证明，需要进一步了解的读者可参阅泛函分析方面的教材。

第一章　泛函分析的一些基本知识

§1　距离空间

1.1　距离空间的定义和例子

定义 1.1　设 X 是由某些元素组成的非空集合，对于其中任意两个元素 x、y，按照一确定的法则对应于一个实数 $d(x,y)$，满足

(i)　非负性：$d(x,y)\geqslant 0$ 且 $d(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；

(ii)　对称性：$d(x,y)=d(y,x)$；

(iii)　三角不等式：$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$。

则称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 的距离，而称 X 是以 d 为距离的距离空间。

为了给出一些具体的例子，我们先证明一个著名的不等式：柯西－许瓦兹(Cauchy－Schwarz)不等式。

柯西－许瓦兹不等式：对任意的实数 a_i 和 b_i，均有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2. \tag{1.1}$$

证明　任取实数 t，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^2+tb_i)^2\geqslant 0$，即

$$t^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 0,$$

上面关于 t 的二次三项式非负，故其判别式不能大于零，即 $4(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2-4\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0$，消去常数 4 后再移项就得到了要证明的不等式(1.1)。

用类似的方法可以证明连续型的柯西—许瓦兹不等式：对任意的平方可积函数 $x(t)$，$y(t)$均有

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt. \tag{1.2}$$

例 1 n 维欧氏空间 R^n，对 R^n 中任意两个向量 x 和 y，记其各分量是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义距离为

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

定义 1.1 中的条件(i)和(ii)显然满足，下面仅验证(iii)。

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n}((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= d(x,z) + d(z,y),
\end{aligned}$$

故由(1.3)定义的 R^n 上的距离满足条件(iii)，R^n 是以式(1.3)为距离的距离空间。

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$。在区间$[a,b]$上连续函数的全体所组成的集合记为 $C[a,b]$，对任意两个 $C[a,b]$中的元素 $x(t)$、$y(t)$，定义它们之间的距离为

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|, \tag{1.4}$$

定义 1.1 中的条件(i)、(ii)显然成立，由于当 $t\in[a,b]$时，

$$\begin{aligned}
&|x(t)-y(t)|\\
&\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\
&\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\\
&=d(x,z)+d(z,y).
\end{aligned}$$

故 $d(x,y)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，(iii)成立，$C[a,b]$在(1.4)式定义的距离下是距离空间。

例 3 平方可积函数空间 $L^2[a,b]$。在$[a,b]$上平方勒贝格可积的实函数的全体所组成的集合记为 $L^2[a,b]$，对其内任意两个元素 $x(t)$和 $y(t)$，定义它们之间距离为

$$d(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

非负性和对称性很容易证明，至于三角不等式，注意到

$$\begin{aligned}
d(x,y)&=\left[\int_a^b|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\left[\int_a^b|x(t)-z(t)^2dt+2\int_a^b|x(t)-z(t)|\right.\\
&\quad\left.\cdot|z(t)-y(t)|^2dt+\int_a^b|z(t)-y(t)|^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\left[\int_a^b|x(t)-z(t)^2dt+2\left(\int_a^b|x(t)-z(t)|^2dt\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot\int_a^b|z(t)-y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}+\int_a^b|z(t)-y(t)|^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left[\int_a^b|x(t)-z(t)|^2dt\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b|z(t)-y(t)|^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=d(x,z)+d(z,y),
\end{aligned}$$

所以 $L^2[a,b]$是以式(1.5)为距离的距离空间。

1.2 距离空间中的点集

下面我们要通过距离定义开集和闭集，首先引入球形邻域的概念。设 r 是一正数，则集合 $S_r(x_0)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\}$称为距离空间 X 中 x 点的球形邻域，简称邻域。

定义 1.2 设 M 是距离空间 X 中的一个子集，对任意 $x\in M$，如果存在一个 x 的球形邻域 $S_r(x)$，满足 $S_r(x)\subset M$，则称 x 是 M 的内点。如果集合 M 的元素都是 M 的内点，则称 M 是开集。对 X 的另一子集 K，当 $X\backslash K$ 是开集时，则称 K 是闭集。

例如集合 $S_r(x_0)$ 是开集，$B_r(x_0)=\{x\in X\,|\,d(x,x_0)\leqslant r\}$ 是闭集，需要指出的是还有既不是开集也不是闭集的集合，且由于一般距离空间 X 和它的距离的多样性，开集和闭集将出现不同于欧氏空间的新情况。

例 4 离散的距离空间。设 X 是一些元素的集合，在 X 上定义距离如下

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y;\\ 1, & x\neq y.\end{cases} \tag{1.6}$$

容易验证 X 是距离空间。对任何 $x\in X$，以 x 为中心，半径为 $\frac{1}{2}$ 的开球 $S_{\frac{1}{2}}(x)$ 只含有 x，因此 X 的每一个单元素集都是开集，且以 x 为中心，半径为 $\frac{1}{2}$ 的闭球 $B_{\frac{1}{2}}(x)$ 也只含 x，故 X 的每一个单元素集也是闭集，这种情况在欧氏空间中是不能出现的。

1.3 收敛性与完备性

定义 1.3 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的一个点列，如果有 $x\in X$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$，则称 $\{x_n\}$ 是收敛序列，x 是它的极限。

根据这个定义容易推出，收敛序列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的，且收敛序列是 X 中的有界点列。

定义 1.4 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的点列，如果对任意给定的正数 ε，能找到一自然数 N，当 $n>N$，$m>N$ 时，必有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ 成立，则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西列。若 X 中的每一个柯西列都是收敛序列，则称 X 是完备的距离空间。

利用这个定义去考察在例 1、例 2、例 3 中给出的三个距离空间，就可以得到下面的定理。

定理 1.1 n 维欧氏空间 R^n，连续函数空间 $C[a,b]$，平方勒贝

格可积的函数空间 $L^2[a,b]$ 都是完备的距离空间。

§2 线性赋范空间

在一个空间上仅有距离的概念是不够的，因为在很多问题中不仅涉及到两元素之间的距离，还涉及到两元素之间的一些运算，这就有必要给出本节讨论的线性空间和范数的一些概念。

2.1 线性空间的定义和例子

定义 2.1 设 E 是一个非空集合，K 是一个实数域，如果(i)对 E 中的任意两个元素 x 与 y，均对应于 E 中的一个元素，称为 x 与 y 的和，记为 $x+y$；(ii)对 E 中的任一个元素及 K 中任一实数 α，均对应于 E 中的一个元素，称为 x 与 α 的数乘，记为 αx；(iii)对 E 中的元素 x、y、z 和 K 中的实数 α、β，上述两种运算满足下列运算规律：

(a) $x + y = y + x$；

(b) $x + (y + z) = (x + y) + z$；

(c) E 中有零元素 θ，满足 $x + \theta = x$；

(d) E 中有 x 的加法逆元素 $-x$，满足 $x + (-x) = \theta$；

(e) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$；

(f) $1 \cdot x = x,\quad 0 \cdot x = \theta$；

(g) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$；

(h) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$。

则称 E 是实的线性空间，简称线性空间。

类似地，当上述定义中的“实数”均改为“复数”时，则称 E 是复的线性空间，但在本教材之中，如果没有特别声明，我们指的都是实线性空间，向量空间 E 中的元素也称为点或者向量，元素的相加以及数与元素相乘统称为线性运算。

例 1 n 维欧氏空间 R^n，对 R^n 中的向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义加法和数乘如下：

$$\begin{cases} x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n), \\ ax=(ax_1,ax_2,\cdots,ax_n) \end{cases} \tag{2.1}$$

则容易验证由(2.1)定义的线性运算满足定义 2.1 的条件，R^n 就是一个线性空间。

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$，对 $C[a,b]$中的元素 $x(t)$、$y(t)$及实数 a，定义加法和数乘如下：

$$\begin{cases} (x+y)(t)=x(t)+y(t), \\ (ax)(t)=ax(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

则 $C[a,b]$就是一个线性空间。

对平方可积空间 $L^2[a,b]$，利用(2.2)式定义加法和数乘后，就得到了线性空间。

2.2 线性赋范空间

定义 2.3 设 E 是线性空间，如果对于 E 中每个元素 x 按照一定的法则对应于一个实数，记为 $\|x\|$，满足

(i) $\|x\| \geqslant 0$， 且 $\|x\|=0$ 的充要条件是 $x=0$；

(ii) $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$，这里 a 是实数；

(iii) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$， $x,y\in E$.

则称 E 为线性赋范空间，$\|x\|$ 称为元素 x 的范数。

对于线性赋范空间 E 中的两个元素 x 和 y，我们可以利用范数，按照公式 $d(x,y)=\|x-y\|$ 定义 x 与 y 之间的距离。容易验证，这样定义的距离满足距离空间的定义，这样 E 就是一个由范数导出的距离的距离空间。将线性运算和距离的概念结合在一起，就使我们能够将欧氏空间中的结果推广到更一般的空间中去，在处理具体问题时发挥更大的作用。

例 3 在 n 维欧氏空间 R^n，连续函数空间 $C[a,b]$，平方可积函数空间 $L^2[a,b]$中分别定义范数

$$
\begin{cases}
\| x \| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}; \\
\| x(t) \| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|; \\
\| x(t) \| = (\int_a^b x^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

则容易验证 R^n，$C[a,b]$，$L^2[a,b]$都构成了线性赋范空间。

定义 2.3 当线性赋范空间 E 在由范数导出的距离下构成完的距离空间时，则称 E 为巴拉赫(Banach)空间。

利用定理 1.1 的结果可以得到，在由(2.3)式定义的范数所导出的距离下，R^n，$C[a,b]$，$L^2[a,b]$都是巴拉赫空间。

在这一节的最后，我们给出在讨论方程解的存在唯一性时用到的压缩映象原理。

定理 2.1 设 X 是一个完备的距离空间，T 是将 X 映入自身的映射，并且对任意的 $x,y\in X$ 有满足 $0\leqslant\alpha<1$ 的数 α 存在，使得 $d(T_x,T_y)\leqslant\alpha d(x,y)$ 成立，则 T 存在唯一的不动点，即有且仅有一个 $x_0\in X$，使 $Tx_0=x_0$。

这儿映射的含义指的是对任意 $x\in X$ 按照一定的法则都有一个 X 中的元素 Tx 与 x 对应。我们经常把满足定理 2.1 中条件的映射 T 称为压缩映射。在很多情况下，定理 2.1 是用在巴拉赫空间中的。

§3 希尔伯特(Hi[redacted]lbert)空间

本节将解析几何与线性代数中内积的概念推广到一般的线性空间中去，这种具有内积的空间比线性赋范空间有更丰富的性质。

定义 3.1 设 E 为线性空间，如果对于 E 中任意两个元素 x 和 y，均有一个实数与之对应，记为(x,y)，满足

(i) $(x,x)\geqslant0$，且$(x,x)=0$ 的充要条件是 $x=\theta$；

(ii) $(x,y)=(y,x)$；