杭州商学院统计学与公共数学系列辅导教材

线性代数

学习与辅导

主　编　王海敏
副主编　李剑秋

中国物价出版社

图书在版编自（C I P）数据

线性代数学习与辅导／王海敏主编，北京：中国物价出版社，2003.9

ISBN 7-80155-618-6

Ⅰ.线…　Ⅱ王…　Ⅲ.线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 082805 号

出版发行／中国物价出版社（邮政编码：100837

地址：北京市西城区月坛北小街 2 号院 3 号楼

电话：读者服务部 68022950　发行部 68033577）

经销／新华书店

印刷／西冷印刷厂

开本／787x1092 毫米　16 开　**印张**／13.5　**字数**／360 千字

版本／2003 年 9 月第 1 版　**印次**／2003 年 9 月第 1 次印刷

印数／1000 册

书号／ISBN7-80155-618-6/0.2

定价／25.00 元

前　言

线性代数是大学数学教育中一门主要的基础课程，但由于它较抽象，这就给初学者带来了不少困难，尤其是反映在做习题上，有时甚至对某些题目感到无从下手。本书是编者在进行多年的教育实践的基础上编写而成的，以期对学习线性代数这门课程提供一些帮助与辅导。

本书共分六章，涵盖行列式、矩阵、线性方程组、向量空间与线性变换、特征值与特征向量、二次型。每章含三个部分：内容提要、例题解析、练习题。第一部分“内容提要”是该章的主要概念和结果的简单叙述。第二部分“例题解析”是为了帮助学生搞清基本概念，学会解题的基本方法，熟悉线性代数中常见题目的类型。在这里我们建议，看例题时，先看题目，不看分析与解答，自己想一想，动手算一算，尽可能自己给出结果，然后将自己所得的结果与本书的结果作一比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错？第三部分是练习题，主要是为了学生学过例题以后，能够亲手练习，巩固学习效果。若有不会做的题目，可以与你的同学、老师研讨。如果用这样的态度与方法来阅读本书，不仅能提高你的解题能力，而且能使你更深刻地理解、掌握有关数学的基本概念、基本理论和基本方法。

向量空间与线性变换这一章以及打*号的例题与习题只对工科学生要求。另外，书后还附有三份文科和二份工科的模拟试卷与参考答案，可以供大家了解考试的形式和难度。

本书编写的具体分工为：第一章丁嘉华，第二章王海敏，第三章李剑秋，第四章许加英，第五章、第六章王波。全书最后由王海敏审核、定稿。

王淑茜老师、王宝文老师仔细审阅了初稿，提出了许多宝贵意见，特此致谢！

由于时间仓促，编者水平所限，书中难免存在差错和缺欠，敬请读者批评指正。

编者于杭州商学院

2003 年 8 月

目　录

第一章　行 列 式

内容提要

一、n阶行列式的概念

由n行n列n^2个数加上行列式的记号“$|\ |$”组成一个n阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

规定:当$n=1$时,$D=|a_{11}|=a_{11}$(此处“$|\ |$”不是绝对值记号).

当$n\geq 2$时,$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}$.

其中,$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,$A_{ij}$称为元素$a_{ij}$的代数余子式,$M_{ij}$为$n$阶行列式中划去元素$a_{ij}$所在的行,所在的列剩下的元素按原来的顺序组成的$n-1$阶行列式,称为元素$a_{ij}$的余子式.

余子式与代数余子式或者相等(当$i+j$为偶数时);或者相差一个符号(当$i+j$为奇数时).

根据n阶行列式的定义可知.

二阶行列式:

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式:

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

当$n>3$时,用定义求n阶行列式的值的计算量是很大的,n阶行列式的计算公式中包含有$n!$项,其中$\frac{n!}{2}$项前面带正号,$\frac{n!}{2}$项前面带负号,而每一项是由

行列式中位于不同行不同列的n个数相乘而得.

二、行列式的性质

1.行列互换,行列式的值不变.即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2.交换行列式的某两行(列)的位置,行列式的值变号,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论:若行列式中有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

3.若行列式中某一行(列)每个元素都有公因子k,则k可提到行列式符号外,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论:如果行列式中有两行（列）元素对应成比例,则行列式的值为零.

4.如果行列式的某一行(列)的每个元素都是两个数之和,则此行列式可以写成两个行列式之和,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5.行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数 k 然后加到另一行(列)上,行列式的值不变,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

三、行列式按任意一行(列)的展开定理

行列式等于它的任一行(列)的各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和;行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即:

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases};$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}.$$

四、几个特殊的行列式

1.上三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2.下三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3.范德蒙(Vandermonde)行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i).$$

五、克莱姆(Cramer)法则

如果n个未知数n个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \ne 0,$$

则方程组有惟一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式D中第j列的元素换成线性方程组右端的常数项$b_1,\cdots,b_n$所得到的n阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

克莱姆法则的推论(齐次线性方程组有非零解的条件):

n个未知数n个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是系数行列式$D = 0$.

例题解析

例 1 计算四阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

分析 计算四阶数字行列式,基本方法一种是利用行列式的性质将行列式化为上三角行列式;另一种是利用行列式按任意一行(列)的展开公式把计算一个四阶行列式转化为计算若干个三阶行列式.本例如果我们采用第一种方法,为使计算过程一开始不出现分数,可通过交换某两行(列)的位置将第一行第一列位置上的元素换成1或-1.在本例中可交换第一列与第三列的位置,以下我们用记号"$r_j + k \cdot r_i$"表示第j行加上第i行的k倍,"$c_j + k \cdot c_i$"表示第j列加上第i列的k倍.

解 交换第一列与第三列,则

$$原式=-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+(-2)r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3+(-2)r_2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

注 把a_{11}位置上的元素变换为1是为了使计算过程简便,暂时不出现分数.本例中,若直接把第二行加上第一行的$\dfrac{3}{2}$倍,虽然把a_{21}位置上的元素化成了零,但出现了分数,使后面的计算增加困难.另外,在上述变换过程中,主对角线上的元素$a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$不能为零,若出现零,可通过交换某两行(列)使主对角线上的元素不为零.

例 2 设$D=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 5 & 6 & 4 & 3\end{vmatrix}$,求$A_{41}+2A_{42}+3A_{44}$的值,其中$A_{4j}$为元素$a_{4j}$ $(j=1,2,4)$的代数余子式.

分析 由题意,本题可分别求出三个代数余子式A_{41},A_{42},A_{44},从而得出所要求的式子的值,这样做,计算较繁,容易出错.注意到

$$A_{41}+2A_{42}+3A_{44}=A_{41}+2A_{42}+0A_{43}+3A_{44},$$

等式右端的四个代数余子式的系数1,2,0,3恰好是行列式D的第三行的值.根据代数余子式的特点,易知$A_{4j}(j=1,2,3,4)$的大小与元素$a_{4j}(j=1,2,3,4)$的值无关,如果我们把行列式D的第四行的元素换成1,2,0,3,得行列式D_1:

$$D_1=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

则D_1的第四行的各代数余子式仍为A_{41},A_{42},A_{43},A_{44},所要计算的式$A_{41}+2A_{42}+0A_{43}+3A_{44}$为$D_1$按第四行的展开式,另一方面,$D_1$中有二行元素对应相同,$D_1$的值为零.

解 记$D_1=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{vmatrix}$,由行列式的性质,得$D_1=0$,由于$D_1$的第四行的代数余子式与$D$的第四行的代数余子式对应相同,仍为$A_{4j}(j=1,2,3,4)$,把$D_1$按第四行展开得,$D_1=A_{41}+2A_{42}+0A_{43}+3A_{44}=0$.

例 3 计算$\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}$.

分析　本题每行每列都只有二个元素不为零,因此用行列式按任意一行(列)的展开公式计算比较方便.

解　按第一行展开,

$$
\text{原式}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3)-b_1b_4(a_2a_3-b_2b_3)
$$

$$
=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).
$$

例 4　计算$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

分析　考察这个行列式的特点,各行(列)的元素之和相同,都为$a+3b$,因此我们可以把第2,3,4列都加到第1列上,提出公因子$a+3b$,然后根据行列式的性质,把行列式化成一个上三角行列式.

解　把各列都加到第1列上,则

$$
\text{原式}=\begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-1)r_1 \\ r_3+(-1)r_1}}(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ o & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}
$$

$$
=(a+3b)(a-b)^3.
$$

例 5　证明$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}=4(a-b)(a-c)(b-c)$.

分析　该行列式的特点是第2列,第3列用乘法公式展开后都含有第1列的元素,因此,利用行列式的性质将第1列乘以-1后分别加到第2,3列可使行列式化为较简单的形式.

证　左端$\xlongequal[c_3+(-1)c_1]{c_2+(-1)c_1}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+(-2)c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 2 \\ b^2 & 2b & 2 \\ c^2 & 2c & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 2 \\ b^2 & 1 & 2 \\ c^2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1} 4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^2-a^2 & c-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} b^2-a^2 & b-a \\ c^2-a^2 & c-a \end{vmatrix}=4(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & 1 \\ c+a & 1 \end{vmatrix}$$

$$=4(b-a)(c-a)(b-c)=\text{右端}.$$

例 6 证明:

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(a+c-b-d)\,(a+d-b-c).$$

分析 本例每一行(列)的元素各不相同,也没有零元素,因此,直接把行列式化成上三角形或按某行(列)的展开公式来计算,则运算量大,十分复杂.注意到行列式各行(列)的和为一常数,因此我们可以把各行(列)加到第一行(列),提出公因子,然后再利用行列式的性质化简.

证 将各列加到第一列上,提出公因子$(a+b+c+d)$,

$$D=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_1 \\ r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1}(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2+c_3]{c_1+c_3}(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a+c-b-d & 0 & c-d \\ 0 & a+b-c-d & b-d \\ a+c-b-d & a+b-c-d & a-d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-1)r_2]{r_3+(-1)r_1}(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a+c-b-d & 0 & c-d \\ 0 & a+b-c-d & b-d \\ 0 & 0 & a+d-b-c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$$

注 行列式中若各行(列)的元素的和为一常数,则可以考虑用上述的方法进行化简.

例 7 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

分析 由于 D 的次对角线以外的元素全部为零,因此 D 可通过相邻两行的互换或不相邻两行的对换把行列式化为上三角形.

解 把 D 的 n 列, $n-1$ 列, $\cdots$, 2 列, 1 列依次经过 $n-1$, $n-2$, $\cdots$, 2, 1 次相邻两行的互换,换成新的行列式的第 1 列, 2 列, $\cdots$, $n-1$ 列, n 列,总的互换次数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$,则,

$$D=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

注 注意本题两列互换的总的互换次数.

例 8 计算 $n+1$ 阶行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{vmatrix}$.

分析 n 阶行列式的计算一般来说技巧性较强,方法也较多.归纳起来,主要有以下几种:(1)化为上(下)三角行列式.利用行列式的性质把行列式化为上(下)三角形,则行列式的值等于主对角线上的元素之积.(2)降阶法.主要利用行列式按任意一行(列)的展开公式把行列式化为低一阶的行列式.(3)升阶法.升阶法也叫加边法,做法是在行列式上增添一行一列,转化为计算一个高一阶的行列式,见例 11.(4)拆项法.如果行列式的某一行(列)的每个元素为两个数之和,则我们可以利用行列式的性质把行列式拆成两个行列式之和.(5)递推公式法.利用行列式的性质及展开公式找出 n 阶行列式 D_n 与 $n-1$ 阶行列式 D_{n-1}(或 $n-2$ 阶行列式 D_{n-2})之间的递推关系式.(6)数学归纳法.有关 n 阶行列式的等

式的证明,可用数学归纳法.(7)利用范德蒙(Vandermonde)行列式的结论.对于某些类型的行列式,经过适当的变换可以化成范德蒙行列式的形式,则我们可以利用范德蒙行列式的结论.本例我们用方法(1),即设法利用行列式的性质把D_{n+1}化成上(下)三角行列式.保留第1列至第n列的值不变,每一列分别乘一个常数加到第$n+1$列,可使第$n+1$列除了第一个元素之外其余全为零.

解 第i列乘以$-b_i(i=1,2,\cdots,n)$全部加到第$n+1$列,

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & -\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

上式按最后一列展开,即得

$$D_{n+1}=-(-1)^{n+2}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=(-1)^{n+3}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i .$$

例 9 计算$n+1$阶行列式$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix}$.

分析 考察这个$n+1$阶行列式的各行元素的特点,发现最后两行只有一个元素不同,其余任意相邻的两行之间只有两个元素不同,因此,为了把尽可能多的元素消为零,我们从第二行开始,相邻二行相减,而不是采取把某一行的元素固定,其余各行乘以常数然后加到该行的做法.

解 从第一行开始,一行加下面一行的-1倍,行列式D化为

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_2-x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_{n-1} & a_{n-1}-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a_n & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

上式按最后一列展开,即得

$$D=(-1)^{2n+2}\begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a_{n-1} & a_{n-1}-x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

例 10 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

分析 本例行列式的元素的特点,从第2行至$n-1$行,各行除一个元素外其余都是零,因此我们可以根据行列式按任意一行(列)的展开公式把D_n转化为计算一个低一阶的行列式,此种方法称为降阶法,当然,为了使计算简单,也可利用行列式的性质使行列式中出现较多的零,再降阶.本例我们直接按照第一行展开,计算也很简便.

解 按第一行展开,得

$$D_n=a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

上面第二个行列式按第一列展开,得

$$D_n=a^n+(-1)^{n+1}(-1)^n a^{n-2}=a^n-a^{n-2}.$$

例 11 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1+k & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+k & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+k \end{vmatrix}$ $(k\neq 0)$.

分析 计算n阶行列式的方法很多,本例我们介绍升阶法.也叫加边法,在原行列式的基础上增添一行一列,使n阶行列式成为$n+1$阶行列式,一般来说,高阶行列式的计算比低阶行列式更复杂,但合理地选择添加的行、列中的元素,使升阶后的行列式更便于利用行列式的性质.但须注意,加边后必须使行列式的值保持不变,常见的做法是加上的某一行(列)为$1,0,\cdots,0$,这样,行列式的值仍保持不变,如以下的做法.

解 将D增加一行一列,得

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\0 & a_1+k & a_2 & \cdots & a_n\\0 & a_1 & a_2+k & \cdots & a_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+k\end{vmatrix},$$

从第2行起,每一行都加上第一行的(−1)倍,得

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\-1 & k & 0 & \cdots & 0\\-1 & 0 & k & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\-1 & 0 & 0 & \cdots & k\end{vmatrix},$$

从第2列起,每一列都乘以$\frac{1}{k}$加到第一列,可得

$$D=\begin{vmatrix}1+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\0 & k & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & k & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & k\end{vmatrix}=(1+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}a_i)k^n .$$

例12 计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n\end{vmatrix}$.

分析 本例中n阶行列式D_n的特点是,每一个元素都为两个数之和,因此我们可以利用行列式的性质将行列式D_n拆成若干个行列式之和,这种方法称为拆项法.本例,如果我们把所有的加号全部拆开,由初等数学的乘法原理可知,这样的行列式共有2^n个,在这些行列式中,绝大多数都有两行(列)的元素全部相同或成比例,因此这些行列式的值为零,我们只须求出少数值不为零的行列式即可.

解 当$n=1$时,

$$D_1=|a_1+b_1|=a_1+b_1 .$$

当$n=2$时,

$$D_2=\begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2\\a_2+b_1 & a_2+b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_1\\a_2 & a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_1\\b_1 & b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\a_2 & a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

$$=a_1b_2-a_1b_1+a_2b_1-a_2b_2=(a_1-a_2)(b_2-b_1).$$

当$n>2$时,按第一行将D_n拆成二个行列式之和:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

将上式右边二个行列式分别按第二行拆成二个行列式之和,则 D_n 可拆成四个行列式的和,其中有二个行列式的第一行与第二行对应成比例,它们的值为零,剩下的二个行列式为:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & \cdots & a_3+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_n \\ a_2 & a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & \cdots & a_3+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

将上式二个行列式分别按照第三行拆成二个行列式的和,这样 D_n 可写成四个行列式的和,由行列式的性质知,这四个行列式的值均为零,从而,$D_n=0$,因此

$$D_n=\begin{cases} a_1+b_1, & n=1, \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2,. \\ 0, & n>2. \end{cases}$$

例 13 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

分析 该行列式的特点,第一行(列)与最后一行(列)都只有二个数不为零,而去掉第一行第一列,或者最后一行最后一列后,所剩下的 $n-1$ 阶行列式的形状与 D_n 相同.因此,我们可以把 D_n 按照第一行(列)或最后一行(列)展开,得到 D_n 与 D_{n-1} 之间的关系式,即递推公式,此种方法称为递推公式法.

解 将 D_n 按第一行展开,得:

$$D_n=5D_{n-1}-3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$