中国科学院“十一五”规划教材配套用书

经·济·管·理·类·数·学·基·础·系·列

线性代数
学习指导

李振东 李金林 主编

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

科学出版社

中国科学院“十一五”规划教材配套用书
经济管理类数学基础系列

线性代数学习指导

李振东　李金林　主编

科学出版社
北京

前　言

本书是中国科学院"十一五"规划教材配套用书——经济管理类数学基础系列《线性代数》(科学出版社出版)配套使用的学习辅导与解题指南，主要面向使用该教材的教师和学生，同时也可供报考研究生的学生作为复习资料使用.

全书以提高大学生的数学素养、领会线性代数基本概念和理论、掌握线性代数的基本解题方法和思路为目的，精心编写而成.书中包括教材中行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型7章内容.每章均有基本要求、内容提要、典型例题、教材习题选解、自测题及自测题参考答案6项内容.

基本要求，既是对学习内容的要求，也是学习的重点；内容提要，指明学习要点，对有关概念、性质和定理作了深入分析与归纳，以方便读者的课后复习；典型例题，是在教材已有例题的基础上，进一步扩展了例题范围，通过对典型例题的深入分析和详尽解答，帮助读者弄懂基本概念、提高分析能力、熟悉解题方法、掌握解题技巧；教材习题选解，针对教材中部分有一定特点或难度较大的习题，给予详细的解答，解决读者在学习课程时遇到的困难，或供课后练习时参考；自测题，是对本章学习内容的进一步扩展，有针对性地给出了一些综合练习题，同时提供参考答案，以帮助读者增强自主学习的能力.

书的最后附有模拟试题及参考答案，以方便学生考试前的总复习.

本书由李振东教授、李金林副教授主编.第1、2章由王国兴编写，第4～6章由李金林编写，第3、7章由李振东编写，全书由主编统稿定稿.

由于水平所限，书中难免有疏漏之处，恳请读者及专家学者批评指正.

编　者

2011年3月

目 录

第1章 行 列 式

一、基本要求

(1) 理解 n 阶行列式的定义.

(2) 掌握用行列式的定义计算较简单的 n 阶行列式的方法.

(3) 熟练掌握用行列式的性质和有关定理计算 n 阶行列式的方法.

(4) 掌握克拉默(Cramer)法则.

二、内容提要

1. n 阶行列式的定义

1) 二阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2) 三阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注 只有二阶和三阶行列式适用对角线法则.

3) 排列与逆序数

由 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级(元)排列. 所有的 n 级排列的总数为 $n!$.

在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若数 $i_t>i_s$,则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为奇数,则称该排列为奇排列;如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数,则称该排列为偶排列;规定逆序数为零的排列为偶排列.

4) n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列组成的

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式. 其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 为行列式的一般项.

更一般地，可以将 n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ 或 j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中 $\sum\limits_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ 或 j_1 j_2 \cdots j_n}}$ 表示对行标构成的所有的 n 级排列或列标构成的所有的 n 级排列求和.

2. 行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式相等，即 $D^{T}=D$.

(2) 交换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 若一个行列式有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

(4) 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD.$$

(5) 若行列式有一行(列)的元素全为零，则行列式等于零.

(6) 若行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式等于零.

(7) 若行列式的某一行(列)各元素都是两数之和，即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(8) 将行列式某一行(列)所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

3. 行列式按行(列)展开

(1) 把 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按某一行(列)展开.

n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即可以按第 i 行展开

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1,2,\cdots,n);$$

或可以按第 j 列展开

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

(3) 异乘变零定理.

n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad (i\neq s),$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad (j\neq t).$$

(4) 拉普拉斯定理.

在 n 阶行列式 D 中,任意选定 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$元素,由这 k 行(列)元素组成的所有 k 阶子式 $M_i(i=1,2,\cdots,t)$ 与各自的代数余子式 $A_i(i=1,2,\cdots,t)$ 的乘积之和等于行列式 D,即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t\quad (t=\mathrm{C}_n^k).$$

4. 克拉默法则

(1) (克拉默法则)若 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$,则方程组有唯一解,其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是将系数行列式 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换成方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而其余各列元素保持不变得到的行列式.

(2) 如果含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$,则该方程组只有零解;

(3) 如果含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组有非零解,则该方程组的系数行列式 $D=0$,如果含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数行列式 $D=0$,则该方程组有非零解.

三、典 型 例 题

例 1 已知排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 a,则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为________.

分析 若在排列 $x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_n$ 中任取两个数 x_i 与 x_j,那么在排列 $x_n\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_1$ 中相应的两个数为 x_j 与 x_i,若(x_i,x_j)在 $x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_n$ 中不构成逆序对,则在$x_n\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_1$中构成逆序对;若$(x_i,x_j)$在 $x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_n$ 中构成逆序对,则在$x_n\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_1$ 中不构成逆序对;若在这两个排列中任选一对数,只有在其中一个排列中构成逆序对,则 n 个数中任选一对数的选法为 C_n^2,也就是这两个排列逆序数的总和. 因为

$$\tau(x_1x_2\cdots x_n)+\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以 $\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-a$.

答案 $\dfrac{n(n-1)}{2}-a$.

例 2 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}=$________.

分析 行列式的展开式中,每一项都包含最后三行中位于不同列的元素,而后三

行的前 3 列元素全为 0,因此每一项都包含 0 因子,从而这个行列式的值为 0.

答案　0.

例 3　行列式 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充分条件是(　　).

(A) $k=0$;　　(B) $k=0$;　　(C) $k=2$;　　(D) $k=3$.

分析　因为 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=k^2-k-6=(k+2)(k-3)$,所以使该行列式为零的充分条件是 $k=3$.

答案　(D).

例 4　设 D 为 n 阶行列式,则 $D=0$ 的充分必要条件是(　　).

(A) D 中有两行(列)的对应元素成比例;

(B) D 中有一行(列)的所有元素全为零;

(C) D 中有一行(列)的所有元素均可以由行列式的性质化为零;

(D) D 中有一行(列)的所有元素的代数余子式均为零.

分析　四个选项都是 $D=0$ 的充分条件,而 $D=0$ 只能推出 D 中有一行(列)的所有元素均可以由行列式的性质化为零,即(C).

答案　(C).

例 5　计算 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解　利用各行的元素之和相同的特点,把除第 1 列以外的各列加到第 1 列,然后再给第 5 行减去第 4 行、……、第 2 行减去第 1 行,得

$$D=\begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

将上面最后一个行列式的各行加到第 1 行并提取第 1 行的公因子(−1)，得

$$D=-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}=-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-5&0\\0&-5&0&0\\-5&0&0&0\end{vmatrix}=1875\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix},$$

在上面最后一个行列式中，交换第 1 行和第 4 行，再交换第 2 行和第 3 行，得

$$D=(-1)^2\times1875\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=1875.$$

例 6　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$.

解　将第 j 列元素的 $-\frac{1}{j}(j=2,3,\cdots,n)$ 倍加到第 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

注　原行列式在三条线上(第 1 行、第 1 列及主对角线)元素不为零，其余元素均为零，俗称爪型行列式，其解法是化成上三角行列式.

例 7(拆项法)　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1+1&x_1+2&\cdots&x_1+n\\x_2+1&x_2+2&\cdots&x_2+n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n+1&x_n+2&\cdots&x_n+n\end{vmatrix}\quad(n\geqslant2).$$

解　当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}x_1+1&x_1+2\\x_2+1&x_2+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+1&1\\x_2+1&1\end{vmatrix}=(x_1+1)-(x_2+1)=x_1-x_2;$$

当 $n>2$ 时，$D_n=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ 1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}.$$

前一个行列式从第2列起各列分别减去第1列，则行列式除第1列外各列成比例，故值为0，后一个行列式第2列起各列分别减去第1列的 $2,3,\cdots,n$ 倍，得到的行列式除第1列外各列相同，值也为0. 即

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 2 & \cdots & n \\ x_2 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & n \\ x_n & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}=0.$$

例8 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第1列，然后按第1列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=D_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=D_{n-1}+1.$$

由上述递推关系得

$$D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+n-1=2+n-1=n+1.$$

注 若改成证明 $D_n=n+1$，则可用数学归纳法证明.

例9 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx+y+z=0, \\ x+ky-z=0, \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

有非零解，k 应取什么值？

解　齐次线性方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=k^2-2-1-2k-1-k=k^2-3k-4=(k+1)(k-4).$$

如果方程组有非零解，则 $D=0$，即 $(k+1)(k-4)=0$，解得 $k=-1$ 或 $k=4$，所以，当 $k=-1$ 或 $k=4$ 时，该齐次线性方程组有非零解.

例 10　证明齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0, \\ 2x_1+4x_2+8x_3+\cdots+2^n x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ nx_1+n^2x_2+n^3x_3+\cdots+n^n x_n=0 \end{cases}$$

仅有零解.

证　因为齐次线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4 & 8 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & (n-1)^3 & \cdots & (n-1)^n \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

$$=2\times 3\times\cdots\times n\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-1} \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)\cdots(n-2)\cdots(n-(n-1))$$

$$=n!(n-1)!\cdots 2!\neq 0,$$

所以方程组仅有零解.

四、教材习题选解

(A)

2. 解方程.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3+3x-x^2-x=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)=0$，解得 $x_1=-1, x_2=3$.

4. 求下列排列的逆序数.

(3) $23\cdots(n-1)n1$；　　(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots2n$；

解 (3) $23\cdots(n-1)n1$ 的逆序为：$21,31,\cdots,(n-1)1,n1$，逆序数为 $n-1$；

(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots2n$ 所含逆序为：

与 2 构成逆序的有 $3,5,7,\cdots,2n-1$，共 $n-1$ 个；

与 4 构成逆序的有 $5,7,9,\cdots,2n-1$，共 $n-2$ 个；

……

与 $2n-2$ 构成逆序的有 $2n-1$，共 1 个.

逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

7. 根据行列式的定义计算下面的行列式.

(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$；　　(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

解 (2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}=acfh+(-1)^{\tau(1324)}adeh+(-1)^{\tau(4321)}bdeg$

$+(-1)^{\tau(4231)}bcfg=acfh+bdeg-adeh-bcfg.$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{\tau(n12\cdots n-1)}a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}=(-1)^{n-1}a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}.$

9. 用行列式性质证明.

(1) $\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

证 (1) 将左端行列式分为 8 个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+a_1 & c_1+b_1 \\ a_2+c_2 & b_2+a_2 & c_2+b_2 \\ a_3+c_3 & b_3+a_3 & c_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & c_2 & a_2 \\ a_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & a_1 \\ b_2 & b_2 & a_2 \\ b_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(2) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 2 列减去第 3 列}} \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{第 2 列乘}(-k)\text{加到第 1 列}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

10. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i - b & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i - b & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i - b & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right) b^{n-1}.$$

(2) 先将第 n 列加到第 $n-1$ 列，再将变化后的第 $n-1$ 列加到第 $n-2$ 列，……，最后将变化后的第 2 列加到第 1 列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2+3+\cdots+n & \cdots & 2n-1 & n \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} (n-1)! = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n+1)!.$$

(3) 先将第 1 列加到第 2 列，再将第 2 列加到第 3 列，…，最后将第 $n-1$ 列加到第 n 列. 得

$$D_n=\begin{vmatrix}-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}na_1a_2\cdots a_{n-1}.$$

11. 解下列方程.

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix}=0.$

分析　行列式是关于 x 的函数 $f(x)$，首先将行列式化为代数式 $f(x)$，然后求解.

解　(1) $$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1)\end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)],$$

由 $f(x)=0$，即 $(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]=0$，解得 $x_1=1, x_2=2, \cdots, x_{n-1}=n-1$.

14. 解方程

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & x & 2 & 3\\ 0 & 0 & x & 2\\ 0 & 0 & 2 & x\end{vmatrix}=0.$$

解　$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & x & 2 & 3\\ 0 & 0 & x & 2\\ 0 & 0 & 2 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x & 2\\ 2 & x\end{vmatrix}=(x-2)(x^2-4)=(x+2)(x-2)^2=0,$$