高等院校基础数学精品教材

大学文科数学

主　编　丁　巍　张洪阳
副主编　耿　莹　富爱宁
杨淑辉　谢崇远

东北大学出版社
Northeastern University Press

高等院校基础数学精品教材

大学文科数学

主　编　丁　巍　　张洪阳
副主编　耿　莹　　富爱宁
　　　　杨淑辉　　谢崇远

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学／丁巍，张洪阳主编. —沈阳：东北大学出版社，2010. 11
ISBN 978-7-81102-879-9

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①丁… ②张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 216457 号

内容简介

本书内容由微积分、线性代数和概率统计初步三部分组成。三个部分各有 6、3、3 章，全书共有 12 章，各章配有习题，书后附有习题答案。为适应文科学生的知识结构和具体需要，教材编写中进行了一些新的尝试，内容力求深入浅出、涵盖面广，富有启发性、应用性和趣味性。

本书可作为高等院校文科专业本科一年级新生数学课教材。

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024-83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024-83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph@neupress.com
http://www.neupress.com
印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm×235mm
印 张：19
字 数：416 千字
出版时间：2010 年 11 月第 1 版
印刷时间：2010 年 11 月第 1 次印刷
策划编辑：刘乃义
责任编辑：石玉玲
封面设计：唐敏智
责任校对：郎 坤
责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-879-9
定 价：34.00 元

前　言

美国国家研究委员会在一份题为《人人关心数学教育的未来》的研究报告中指出："对所有学生进行优质的数学教育是兴旺发达的经济所必需的." 作为现代科学技术的基础，数学不仅在自然科学和工程技术领域有着举足轻重的作用，而且在社会科学和人文科学等领域也发挥着越来越重要的影响. 数学抽象性、逻辑性、精确性和应用性的特点对开阔文科学生的视野、培养其科学态度和科学思维方式都具有重要的作用，高等数学教育已经成为文科学生数学素养和科学综合素质教育的一个重要组成部分. 目前，在文科类学生中开设高等数学课已成为各高校的共识.

本书是编者在多年为高校文科专业学生开设高等数学的教学实践基础上编写的. 考虑到教学对象的特殊性，本书力求以通俗的语言，由浅入深地向读者介绍高等数学最基础的知识. 本书以中学数学为起点，主要介绍微积分、线性代数、概率与统计等高等数学的基础知识. 微积分部分共分 6 章，分别介绍函数与极限、导数及其应用以及一元函数的积分学. 线性代数部分共分 3 章，分别介绍行列式、矩阵和线性方程组. 概率统计初步共分 3 章，分别介绍数理统计的基本方法、概率的定义和计算概率常用的方法、随机变量及其数字特征.

本书在保留传统高等数学教材结构严谨、逻辑清晰、系统完整等风格的基础上，积极吸收近年来高校教材改革的成功经验，并将我们教学中的有益探索融入其中，努力做到难易适中、例证适当，便于文科学生掌握所学内容. 全书在内容的编写上尽可能做到科学性和通俗性相结合，理论和实际相结合，并力

求条理清楚、重点突出.

本书的绪论由杨淑辉编写，第一部分中的第 1 章、第 2 章、第 3 章和第 4 章由丁巍编写，第 5 章和第 6 章由富爱宁编写；第二部分中的第 7 章和第 8 章由耿莹编写，第 9 章由丁巍编写；第三部分由张洪阳编写. 丁巍和谢崇远对全书进行了认真仔细的修改和统稿. 在本书的编写过程中，得到了北京大学数学科学学院徐树方教授的关心与帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中难免会有一些错误和不足之处，诚恳地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书能够在教学实践中不断完善.

编　者

2010 年 9 月

目　　录

第二部分 线性代数

第三部分　概率统计初步

绪　论

人类大约在30万年前就有了数的概念，公元前3400年左右出现了文字记载的数学. 时至今日，绝大多数人对数学的理解，仍然局限于社会实践和生产活动所涉及的数学实践内容，即初等数学涉及的内容，包括算术、几何和代数. 算术是最古老的数学分支之一，是数学的基础，研究的是数及数集上的运算. 古代希腊人、印度人、中国人对算术问题都有比较全面的研究. 我们在小学阶段学习的数学知识主要是几千年时间沉积下来的算术知识及少量的几何知识. 文艺复兴时期，欧洲人开始了对代数学的研究，拉开了近代数学的序幕. 中学阶段学习的代数学属于初等代数学的范畴，主要研究19世纪上半叶以前的方程理论，某一方程或方程组是否有解，怎样求出方程所有的根及根具有的各种性质. 19世纪以后，在初等代数的基础上，探讨高次方程根式解的问题促使抽象代数学科产生和发展起来. 用矩阵来解代数学中多元一次方程组的方法最终导致了线性代数学科的诞生. 在古代，代数与算术交错在一起，代数与算术的主要区别在于，代数首先要引入未知数，然后根据问题条件列方程，最后解方程. "数字符号化体系"的建立导致代数性质发生了重大的变革，使得代数从算术中分离出来成为一门独立的学科. 宋元时期，中国人也曾作过代数符号化的尝试，而真正意义上的数学符号化体系的建立要归功于法国数学家韦达(F. Vieta，1540—1603). 中学阶段，我们还学习了一些几何学与三角学知识，几何知识多是欧几里得《几何原本》的内容.

由此看来，十几年的中小学数学教育，我们掌握的大都是初等数学的内容. 在大学的数学课堂中，我们将跨越几百年，学习一些近现代数学的内容.

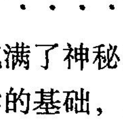
对于普通的数学爱好者来说，当被问及"数学是什么、数学科学是怎么形成的?"时，都很难作出明确的回答. 数学是什么？即数学的本质是什么？这应是一个数学哲学问题. 对数学本质的认识，即抱有何种数学观，将直接影响到学习者对数学感兴趣的程度. 很多人喜欢将理性的数学进行艺术的加工，称数学是思维、数学是语言、数学是艺术等. 这些隐喻性的答案对于了解数学，进而喜欢数学、学习数学是大有帮助的，但显然不能作为一个数学哲学问题的答案. 恩格斯给出了一个实质性的答案：数学是研究客观世界数量关系和空间结构的学科. 在对这一问题的长时间争辩过程中，数学家和哲学家们发出了多种声音：数学是研究量的学科，数学是研究理想、模式的学科，数学是一堆形式系统，数学是

逻辑的分支，等等．实际上，数学的内涵随着时代和数学的发展脉络而变化着，要想一劳永逸地回答“数学是什么”这个问题是不可能的．

1　人类早期对数学本质的认识

从古至今，一直都有人相信，冥冥之中有着主宰．人们被一种信念所驱使，这个信念就是：世界是合理的、简单的，一切复杂的现象均可以归结为最简单的原始因素，即本原．例如，古代中国人认为宇宙是由金、木、水、火、土五种要素构成的．古希腊的泰勒斯认为万物的本原是水，阿纳克西美尼认为是气．而毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前551—前479）宣称“万物皆数”，认为整个宇宙都是由数构成的．毕达哥拉斯学派研究数学的目的并不在于使用，而是为了探索自然的奥秘，企图用数来解释一切．

毕达哥拉斯学派对数的研究包括数与音乐和谐之间的关系、数与几何图形的关系、数与天体运行的关系，把整个学习课程分为四大部分：（1）数的绝对理论——算术；（2）数的应用——音乐；（3）静止的量——几何；（4）运动的量——天文．合起来叫做“四道”① ……他们认为“万物的始基是‘一元’．从一元产生出‘二元’……从完满的‘一元’与不定的‘二元’中产生出各种数目；从数目中产生出点；从点产生出线；从线产生出平面；从平面产生出立体；从立体产生出感觉所及的一切物体，产生出 4 种元素：水、火、土、空气．这 4 种元素以各种不同的方式互相转化，于是创造出有生命的、精神的、球形的世界……”② 从这个意义上讲，把数理解为自然物体的形式和形象，是一切事物的总根源．因为有了数，才有几何学上的点，有了点才有线、面和立体，有了立体才有数目，最终产生火、气、水、土这 4 种元素，从而构成万物，所以数在物之先．自然界的一切现象和规律都是由数决定的，都必须服从“数的和谐”，即服从数的关系．

毕达哥拉斯学派对数论作了许多研究，将自然数划分为奇数、偶数、素数、完全数、平方数、三角数和五角数，等等．毕达哥拉斯发现：220 的所有真因数之和 $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$，而 284 的所有真因数之和 $1+2+4+71+142=220$，认为 220 与 284 具有亲密关系，称其为亲和数．毕达哥拉斯还发现：如果两弦的张力相同，长度为简单的整数比时，奏出来的就是悦耳动听的音乐．根据“简单整数比”的原理，这个学派创造了一套音乐理论，1，2，3，4 这头四个自然数，按 4:3，3:2，2:1 的比构成几个主要的音调，而这四个数的和是 10．于是他们认为 10 是一个完美的数，称之为“四数组”，用  来表示，将 10 当做宣誓的誓词，视为神圣的象征．可见毕氏学派对数的认识充满了神秘的色彩．

数是数学的基础，人们对数的原始理解是自然数（不包括零）．零、负整数、分数、

① 梁宗巨．世界著名数学家传记：毕达哥拉斯［M］．北京：科学出版社，2003：11－26．
② 北京大学哲学系．古希腊罗马哲学［M］．北京：商务印书馆，1961：34．

无理数、复数经历了十分曲折的过程，在数系中才获得了合法的地位．人们对数论有着持久的痴迷，对素数作了大量研究．**素数**，即一个大于1的正整数，除了1和它本身外没有因子的数，是数论中最基本、最重要的一类数．关于素数有无数个命题，最著名的当属至今尚未解决的哥德巴赫猜想．哥德巴赫（Goldbach，1690—1764）在1742年给欧拉的一封信中提出：$4=2+2$，$6=3+3$，$8=5+3$，$10=5+5$，…，$20=13+7$，…，$100=97+3$，能否证明**所有的偶数（2除外）都能表示为两个素数的和**，或者至少能找到一个反例来否定这个结论．目前最接近结果的工作是陈景润于1966年做出的，即**每一个充分大的偶数是一个素数和另一个至多为两个素数的乘积的和**．另一个著名的数论问题是“**费马大定理**”，费马的猜想是：方程

$$x^n+y^n=z^n$$

对任意的$n>2$，没有非零整数解．当$n=2$时，方程是我国古代数学著作《周髀算经》记载的勾股定理的代数表达式，西方称其为毕达哥拉斯定理．费马是在研究丢番图的算术手稿时发现这一命题的，他在手稿的空白处标注：“纸的空白边缘太小，不能把这个美妙的证明写下来．”这个不能写下的美妙证明整整困扰了数学家们300多年，一直到1994年，美国普林斯顿大学的维尔斯（Andrew Wiles）证明了这一猜想．然而这一证明过程需要高深的椭圆曲线理论，对于数学业余爱好者来说绝谈不上美妙．

毕达哥拉斯学派将数从具体的事物对象中抽象出来，承认并强调数学的对象是抽象的思维，这是人类认识上的巨大飞跃．柏拉图继承了毕达哥拉斯学派“唯数论”的大部分观点，同时将数学概念的抽象化定义向前推进了一步，开启了数学哲学领域的最初探索．柏拉图的数学实在论是数学历史上影响最大的数学哲学观点，西方数学界一直有着或明或暗的柏拉图主义观念，19世纪，它在数学界几乎占据了统治地位．

柏拉图认为我们的物质世界其实是一个不完美的世界，在它的背后有一个完美的“理念的世界”．他把一类事物的共性同可以感知的具体事物分离开来，使之成为独立的存在，称之为理念．他的数学哲学思想是与他的“理念论”分不开的．柏拉图的数学实在论的基本观点是：数学的对象就是数、量、函数等数学概念，而数学概念作为抽象，一般或“共相”是客观存在着的．数学研究的对象应该是理念世界中永恒不变的关系，而不是感觉的物质世界的变化无常．他不仅把数学概念和现实中相应的实体区分开来，也把它和在讨论中用以代表它们的几何图形严格区分．

他曾以圆为例进行分析说：“有四种圆：

①被世人称为圆的某种东西；

②圆的定义：在任何方向上的边界点到中心的距离都是相等的；

③画出的一个圆，即旋转圆规所得的圆；

④实质性的圆，即圆的理念．”

柏拉图认为：名称是无关紧要的，只是由习惯形成的．我们甚至可称圆为直线，并反

过来称直线为圆．定义其实也不具有真正的确定性，它是由名词、动词等词语组成的．圆的图形是画出来或旋转出来的具体的圆．这里难免掺杂着其他的东西，它甚至充满着和圆的本质相抵触的成分．例如，数学圆和数学直线仅能相切于一个公共点，但这在画圆时是无法做到的．因此，它们都不是完善的圆，即不是圆的理念，但和圆的理念密切相关①．由此可见，柏拉图所说的圆的理念，其实就是圆的概念．他所说的数学理念，其实就是数学概念．

后世的柏拉图主义认为，数学理论的真理性就是客观的，由那种独立于现实世界之外的存在决定的，而这种真理性是要靠“心智”经验来理解的，是要靠某种“数学直觉”来认识的，人们只有通过直觉才能达到独立于现实世界之外的“数学世界”．数学概念是一种特殊的独立于现实世界之外的客观存在，它们是不依赖于时间、空间和人的思维的永恒的存在．数学家得到新的概念不是创造，而是对这种客观存在的描述；数学新成果不是发明，而是发现．

亚里士多德是柏拉图的学生，他的哲学观点与柏拉图相左．亚里士多德认为，实在界乃是由各种本身的形式与质料和谐一致的事物组成的．“质料”是事物组成的材料，“形式”则是每一件事物的个别特征．“理念”不应被看成“在个别事物之外，与个别事物相分离的、独立存在的实体”，而应“在个别事物之内去发现它们的本质”．也即数学对象不应被看成独立于感性事物的真实存在，而是独立于人类抽象思维的抽象存在．亚里士多德认为，数学是研究大小的量和数的学问，但是作为研究对象的大小的量和数，不是可以感觉到的、占有空间的广延性的、可分大小的具体事物，而是作为某种特殊性质的抽象的大小和数．因为亚里士多德的见解与柏拉图的实在论正相对，简称为“反实在论”．

实际上，上述的“唯数论”“数学实在论”“反实在论”三种哲学观点都存在着致命的缺陷．毕达哥拉斯学派对数的认识局限于有理数的范围，由于不可公度线段（无理数）的发现，唯数论遭到了致命一击．柏拉图自身也深受唯数论的影响，不可公度量的出现，使得柏拉图从数转向了几何．柏拉图在他的学园门口挂了“不懂几何者不得人内”的牌子，甚至提出了“神永远按几何规律办事”的滑稽论断．柏拉图实在论的缺陷在于无法对数学对象究竟是一种什么样的存在作出具体说明．而非实在论在于层出不穷的数学概念中，并不是所有的都建立在对于真实事物或现象的直接抽象之上，而是较为间接的抽象结果，有些甚至与真实世界相脱离．

2 近代对数学本质的认识

近代数学本质上可以说是变量数学，变量数学的第一个里程碑是解析几何的发明．法国哲学家和数学家笛卡儿（Rene Descartes），是解析几何的发明人之一，对自然科学持“唯理论”观点．与笛卡儿的“唯理论”相对的，是培根的“经验论”．培根认为“感觉

---

① 周焕山．世界著名数学家传记：柏拉图［M］．北京：科学出版社，2003：36－51．

是一切知识的源泉，认识必须从感觉开始，除此没有任何其他渠道可以给我们提供实事材料，一切自然的知识都应求助于感觉”，开拓了一条从物到感觉的唯物主义经验论的道路．按此观点，数学归属为经验科学．

1637 年，笛卡儿发表了著作《方法论》，其中提出了理性演绎方法论．方法论，就是人们认识世界、改造世界的一般方法，是人们用什么样的方式、方法来观察事物和处理问题．笛卡儿不满意经院哲学从圣经教义出发的演绎法，认为从中得不出任何可靠的知识，主张一切知识都应该像几何学那样，从几条“不证自明的”“天赋的”公理中推演出来，认为只有这种知识才是最可靠的知识．笛卡儿认为公理并非是以经验事实为基础并经由归纳得出的，而是先天固有的，即数学的绝对真理性．由此可见，笛卡儿对自然科学持“唯理论”立场．《方法论》书后有附录三篇，其中一篇为《几何学》．在笛卡儿之前，几何与代数是数学中两个不同的研究领域．笛卡儿站在方法论的自然哲学的高度，认为希腊人的几何学过于依赖于图形，束缚了人的想象力．对于当时流行的代数学，他觉得它完全从属于法则和公式，不能成为一门改进智力的科学．因此他提出必须把几何与代数的优点结合起来，建立一种“真正的数学”．在《几何学》中，笛卡儿建立了直角坐标系，借助坐标系，把几何学的问题归结成代数形式的问题，用代数学的方法进行计算、证明，从而达到最终解决几何问题的目的．后世的数学家和数学史学家都把笛卡儿的《几何学》作为解析几何的起点．在数学史上，一般认为和笛卡儿同时代的法国业余数学家费尔马也是解析几何的创建者之一．解析几何的诞生，改变了自古希腊以来代数和几何分离的趋向，把相互对立着的“数”与“形”统一了起来，使几何曲线与代数方程相结合，使得在平面上的点与数对之间建立了一一对应的关系，将变量引入数学，使运动与变化的定量描述成为可能，从而打开了近代数学的大门，为微积分的诞生创造了条件，在科学史上具有划时代的意义．17 世纪，牛顿和莱布尼茨在前人工作的基础上，建立了微积分学的主要框架：一元函数微分学和一元函数积分学基本理论．它给出一整套的科学方法，开创了科学的新纪元，使得数学迎来了一次空前繁荣的时期，对 18 世纪的数学产生了重要而深远的影响．但是两者都缺乏清晰的、严谨的逻辑基础．18 世纪的数学家成功地用微积分解决了许多实际问题，微分方程、变分法等一系列数学分支发展起来，但微积分的基础问题一直受到一些人的批判和攻击．18 世纪的数学思想的确是不严密的、直观的、强调形式的计算，而不管基础是否可靠．比如，没有清楚的无穷小概念，因此导数、微分、积分等概念不清楚；对无穷大的概念也不清楚；发散级数求和的任意性；符号使用的不严格性；不考虑连续性就进行微分，不考虑导数及积分的存在性以及可否展成幂级数等．在 18 世纪，数学家们不间断地努力探索着微积分严格化的途径，直到 19 世纪才彻底解决了这一难题．对此作出不可磨灭贡献的是法国人柯西（Cauchy，1789—1851）和德国人魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815—1897）．柯西对微积分的一些基本概念给出了明确的定义，这是迈向分析严格化的关键一步．本质上分析严格化这一贡献应归功于魏尔斯特拉斯，他创造了一

套 $\varepsilon-\delta$ 语言，从而给出了极限系统化的定义，进而可以定义函数的连续性以及微分、定积分等，使微积分的定义有了今天严密的形式．戴德金和康托尔实数的定义及其完备性的确立，标志着由魏尔斯特拉斯倡导的分析算数化运动的终结．数学发展进入了激烈的变革时期．

3 现代对数学本质的认识

经过19世纪的变革与积累，20世纪的数学呈现出指数式的飞速发展．

在20世纪初期，由集合论“悖论”引发了数学基础大论争，数学家开始反思“如何理解数学的存在”“数学的基础是什么”，实际上这仍然是“数学是什么”的问题．数学的严格基础，自古希腊以来就是数学家们追求的目标．每一次对数学基础的怀疑，都引发了数学界地动山摇的危机．不可公度量的发现给古希腊毕达哥拉斯学派的“唯数论”致命一击，引发了数学史上的“第一次数学危机”；17，18世纪对于微积分基础的研究，引发了数学史上的“第二次数学危机”；康托的集合论可以看做分析严格化的最高成就，数学家们甚至以为一劳永逸地摆脱了基础危机．然而，英国数学家罗素（B. Russell，1872—1970）的集合论“悖论”，引起了关于数学基础的新的争论，导致了“第三次数学危机”的发生．

分析严格化的过程中，极限、实数、级数等基本概念的研究都涉及无穷多个元素的集合，对无穷多个元素进行研究导致了集合论的诞生，从而开拓了一个全新的数学研究领域．1874年，29岁的康托在《克雷尔数学杂志》上发表了关于无穷集合理论的第一篇革命性文章，文章引入了无穷的概念．数学史上一般认为这篇文章的发表标志着“集合论”的诞生．1902年，罗素发现的一个悖论引起了数学家强烈的恐慌．罗素悖论可以表达为：所有不以自身为元素的集合所组成的集合是否属于这个集合．罗素悖论之所以不能等闲视之是因为，只要将它的陈述形式稍作修改，就可以用最基础的逻辑形式表达出来．因此，罗素悖论不仅触及集合论这一数学基础，而且也触动了逻辑学，因而使数学家和逻辑学家同时发出惊呼：数学基础发生危机了！“第三次数学危机”是引发数学基础研究的导火索．

集合论“悖论”向数学家们提出了一个问题：如何解决数学基础的可靠性和基础性的问题？要解决这个问题，需要从逻辑上寻找突破口．数学家们对于数学逻辑基础的研究形成了相互对立的三大学派：以罗素为代表的逻辑主义，它强调逻辑而排斥直觉，主张逻辑是整个数学的唯一基础；以布劳威尔为代表的直觉主义，它强调直觉而排斥逻辑，主张直觉才是数学的唯一基础；以希尔伯特为代表的形式主义，认为逻辑具有先验的真理性以及数学整个地具有逻辑的特征，它主张通过逻辑的相容性即无矛盾性来维护数学的真理性和合法性．三派之间的热烈辩论成为现代数学史上著名的数学基础大论战．他们从各自的哲学观点出发，对悖论引起的数学危机，从概念的准确性、提法的严密性、推理的合理性等方面一一加以审查，对数学的本质、数学对象的存在性、数学的真理性以及与数学有关的逻辑问题等进行哲学思考．

以罗素为代表的逻辑主义学派认为，数学是由逻辑派生出来的，即数学与经验事实无关，而是先验地从逻辑公理系统演绎出来的．数学研究的对象只是形式结构，数学只有形式而无内容．数学变成纯逻辑的产物．显然，这种观点与数学渊源于客观实际是背道而驰的，所以说，逻辑主义从哲学和认识论的观点来看，其出发点带有唯心主义的色彩．逻辑主义者试图从一个逻辑公理系统中演绎出整个数学是不可能的．他们在纯逻辑公理系统的基础上进行逻辑演绎推理时，实际上已经使用了集合论中的无穷公理和选择公理，而这两个公理并非逻辑公理．给逻辑主义以致命打击的是哥德尔的不完备性定理，它证明了从逻辑并不能推出算术的正确性来，因而宣告了把数学全部归结为逻辑的企图是不可能的．即便如此，逻辑主义对数学的发展仍然作出了不可磨灭的贡献，它们为现代数理逻辑奠定了基础．而符号逻辑的公理化，揭示了数学与逻辑之间的关系，对于当今计算机的研制和人工智能的研究具有巨大现实意义．

克罗内克和庞加莱是直觉主义的先驱，现代直觉主义系统理论的创立者是荷兰数学家布劳威尔（L. E. Brouwer，1881—1966）．布劳威尔认为，庞加莱仅仅强调数学的存在性，这并不能消除逻辑主义者的悖论，只有直觉的构造才能成为数学的基础．直觉主义学派的基本哲学立场是把数学看成人类心智的自由创造，它是以自明的原始概念——原初直觉——构造数学对象的．数学概念嵌入人脑先于语言、逻辑和经验．决定概念的正确性和可接受性的是直觉，而不是经验和逻辑．逻辑只不过是数学的一个分支和论证手段之一．直觉主义者也不承认数学研究的对象渊源于客观实际，因此他们的观点也属于唯心主义流派．直觉主义者强调可构造性或可行性对现代递归函数论的建立和发展起了很大的推动作用，特别是对计算机数学的发展意义更大．但是直觉主义的一个重要缺陷在于：严格限制使用排中律，致使大批古典数学珍贵财富被舍弃，引起了许多科学家的抨击．希尔伯特认为："禁止数学家使用排中律，就像禁止天文学家使用望远镜一样．"①

希尔伯特在批判直觉主义的同时，也抛出了自己的克服数学危机的方案，史称"希尔伯特纲领"，通常也叫形式主义纲领．虽然希尔伯特本人从未以形式主义者自称，但一般将其认定为形式主义的奠基人．在1899—1931年发表的十几部著作中，希尔伯特提出了大部分形式主义观点．这些观点一方面要尽量地保留经典数学中的基本概念、方法和逻辑推演规则，特别是涉及有关无限概念的逻辑演绎规则．但另一方面，又为了保证所有数学证明的可靠性及整个数学大厦的纯洁性，他把数学分为"真实数学"和"理想数学"两大类．凡是涉及有限概念和有限集合的数学称为真实数学，而涉及实无限概念和超穷方法的数学系统称为理想数学．同时，希尔伯特试图通过有限步骤的构造性方法，在元数学中实现理想数学的协调性和完全性，以达到实无限的理想化在应用上的有效性．他提出了两条基本原则：①形式主义原则：将所有符号完全看做没有意义的内容，即使是符号、公式

① 李文林．数学史概论［M］．北京：高等教育出版社，2002：302.

或证明的任何有意的意义或可能的解释也不管，而只是把它们看做纯粹的形式对象，研究它们的结构性质；②有限主义原则，即总能在有限机械步骤之内验证形式理论之内一串公式是否一个证明. 应用数学方法于这样一个形式理论，避免涉及无穷的推断，这就排除了康托尔集合论的方法. 这个思想是只应用靠得住的方法，因为只有证明数学或其一部分无矛盾的方法是大家公认可靠的，整个数学才有牢固的基础. 由此得出，数学本身是一堆形式演绎系统的集合，每个形式系统都包含自己的逻辑、概念、公理、定理及其推导法则. 数学的任务就是发展出每一个由公理系统所规定的形式演绎系统，在每一个系统中，通过一系列程序来证明定理，只要这种推演过程不产生矛盾，便获得一种真理. 形式主义的缺陷在于忽视了数学渊源于实际，而且片面地夸大了逻辑对数学的作用. 形式主义学派的积极作用在于，引发了的数学公理化思潮，曾推动了数学科学的巨大发展. 例如，概率论的公理化、理论力学的公理化、相对论与理论量子力学的公理化等，都是公理化思潮的产物，对20世纪的数学进展起了很大的推动作用，特别是对数学基础理论的研究.

20世纪中后期，许多科学巨匠倾向于接受柏拉图主义的哲学观念，如怀德海、希尔伯特、哥德尔、布尔巴基学派等. 怀德海于1939年12月在美国哈佛大学作了一次题为《数学与善》的著名讲演. 在这次演讲中，怀德海明确地提出了“数学是研究模式的科学”的观点. 所谓“模式”，就是反映事物关系结构的“理想化的形式模型”，它是经历科学抽象过程的概念思维的产物. 而模式一经形成，便具有形式客观性，人们就只能对它进行客观的分析和研究，因而按逻辑规则推导出来的一切结论，也就具有“模式真理性”①. “数学模式观”从整体上分析刻画了数学对象的本质特征，所以它与数学公理化思想及结构主义是不矛盾的. 现代数学界的大多数，实际上是承认或默认“数学模式观”与“数学模式真理性”的观点的，一般数学工作成果也都是符合这些观点的. 模式多元论观点除了促进数学模型理论发展外，还帮助消解了各种不同数学流派之间的长期争论.

历经几次危机，数学仍在累积的基础上飞速前进，人们对数学究竟是什么开始采取了宽容的态度，对历史上数学基础的三大派系采取扬长避短的态度，继承各派的合理成分. 时至今日，很多人认为数学不再从属于自然科学，而是一门与自然科学和社会科学并列的大部类科学. 现代数学不再是代数、几何、分析等经典学科的集合，而已成为分支众多的、庞大的知识体系. 纯粹数学、应用数学、数学与计算机成为数学研究的三大领域.

① 徐利治. 对新世纪数学发展趋势的展望 [J]. 高等数学研究，2001，4 (3)：4-6.

第一部分　微积分