

应用光学和光学设计

第一分册

A. E. CONRADY 著

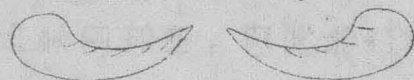
中国科学院

光学精密机械仪器研究所 译

1957.7

应用光学和光学设计

目 录



第一章 基本方程式	1
第二章 球 差	81
第四章 色 差	148
第五章 简单的总结	226

第一章 基本方程式

(1)、球面（包括平面在内，可认为半径是无穷大的球面）是唯一可以用光学的磨制方法使之足够地接近于所需精度的一种。磨制的球面与真正球形的微小偏差其数量级为几个波长，可用“手修”法来纠正；这样的微小偏差，在我们讨论中可注意到用与真正球形的微小偏差来近似似的改正，因此我们限制我们的一般公式是对于真正的球面而言。

球面是所有曲面中最简单的一种，因为它完全被它的半径和球心的位置所决定。从球心仅一半径通过球面上的任何一点，就与过这点的切面垂直，因而是球面的法线。由反射和折射定律，反射线和折射线二者居于入射线和入射点的法线（入射线法线）所决定的平面，我们立即得出结论，在球面的情形，反射面和折射面都包含球心，因此是很容易决定的。

在所有普通光学仪器中，我们有许多方法使所有的面校正中心。经常是企图而且是可以足够精确的得到成功使每个球面的球心位于同一条线上，这条线就是仪器的光轴，这是很明白地告诉我们，任何与光轴相袭的光线在包含光轴的平面中进入系统后将永远保持在此平面内，因此可用平面几何或三角方法通过整个系统追踪光线，这就省去我们许多麻烦去分别决定每一面的新入射平面，其目的在于发展计算方法的理论讨论免去复杂的“斜光线”追踪。

反射和折射定律

(2)、由反射定律，反射光线在入射线和法线所决定的平面内，并和法线所成的角与入射线和法线所成的角相等，但由于这两条光线位于法线的两旁，此两角的意义相反故我们在表示时给以相反的符号，因此反射定律表示为。

$$(1) \quad I' = -I,$$

由折射定律、折射線也是在入射線和折射面的法線所决定的平面内、但是在折射面和法線的两旁、因此折射角和入射角的意义相同、设 N 为包含入射線的媒介质的折射系数、 N' 为包含折射線的媒介质的折射系数折射定律表示为。

(I)*

$$N' \sin I' = N \sin I$$

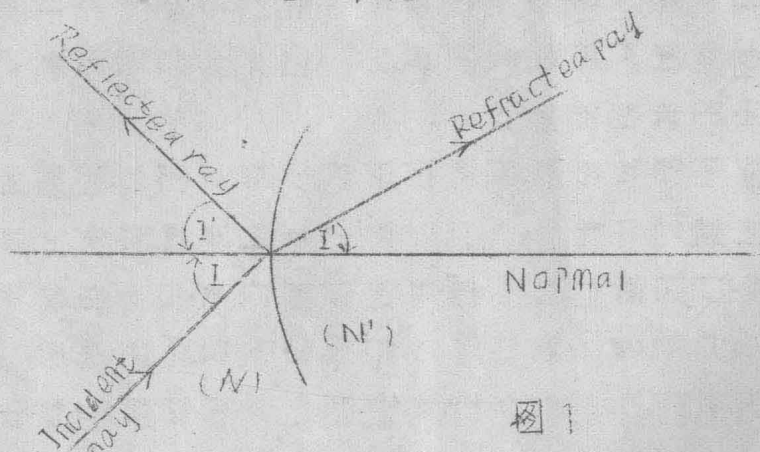


图 1

I 和 I' 微小的对应变化常是很有意义的、可将 (I)* 式微分其结果为。

$$N' \cos I' dI' = N \cos I dI$$

或

$$dI' = dI \cdot N \cos I / N' \cos I',$$

此方程式将包括在 (I)* 式中。

当角度变得很小时、它的正弦值等于其由弧度表示的角值、因此傍轴光線的折射定律、即进入折射面时和法線成很小角度的光線、用小写字母表示“傍轴角”变为。

(I)_p

$$N' i' = N i ; d i' = d i \cdot N / N'$$

比较这两个基本定律、我們立即从数学方面看出可以把反射定律当作为折射定律的特别情况、即是令 $N = -N'$ 得到

$$N' \sin I' = I' \sin I \text{ 或 } \sin I' = -\sin I,$$

此式只要对于锐角而言、只有当 $I' = I$ 时才能满足、这是一个很重要的推论、因为、只须简单地令 $N' = N$ 或 $N'/N = 1$ 、就可使 我

们应用所有的折射公式到反射的问题上去。

基本公式和符号的规定

(3)、上面已经说明、任何球面折射问题、首先找出包含所追踪的光线和曲率中心的平面、可以简化为平面三角的问题。

在图 2 中、令纸面代表入射面、即为经过折射面所要追踪的光线并令它与入射面相交于以 C 为中心的 AP 圆上。令 ACB 为

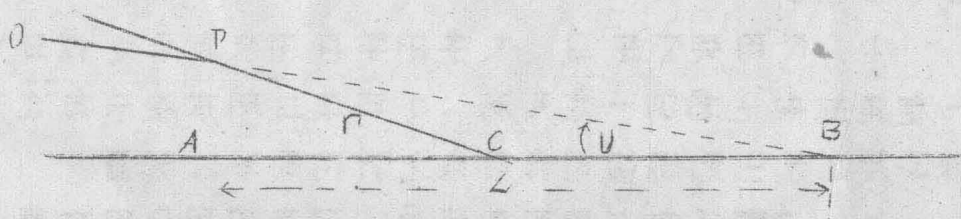


图 2

一通过圆心 C 的直线。在这特别问题中、就会很方便地规定光线的位置：这直线常被认作整个系统的光轴、但并不完全限制这样的假定、一参轴是不能和共心系统的主光轴相重合、在今后它只是被作为是一辅助光轴。

规定光线的位置用、球面顶点至光线与光轴 ACB 的交点的距离 $AB = L$ 、及光线与光轴的交角 u 表示、立即看出这两个量是含糊不明的、我们可在顶点 A 的左边找出一点、其距离也等于 L 、并在这两个交点之一、在 AB 轴上如图 2 或下取角 u 。为要除去含糊不明、假定 AB 在顶点 A 的右边其长度取正号、反之取负号、斜角常规定为锐角、当旋转定规由法定之光轴到光线的位置其方向为顺时针方向时则斜角 u 取正号、如果为反时针方向则取负号、在讨论中唯一添加的数据为折射面的曲率半径、 r 、很明显地、这也需要符号的规定以区别凹凸面、为了符合 L 的符号规定、假定当球心 C 在顶点 A 的右边时 r 取正号、 e 点在 A 的

左边取负号，图2中所示的一切量均正号，被推导出的公式将依照上述的符号规定得出折射光线新的数据。

这样的符号规定在光学设计上是很方便的，因此几乎随处都采用这种规定，可以看出，关于 $\angle$ 和 $\vee$ 的符号规定虽然和几何坐标的规定符合，但角的符号规定是与几何坐标的符号规定相异，有时就需要用解几何的方法来调整推导出的方程式的符号。

在订标公式中利用的字母已经注意选择以便容易记忆，也适合于普通的打字机，选择是根据下面简单的原则：

(1) 仅用英文字母，大写的字母用来表示光线与光轴所成的一定角或离光轴的一定距离，小写字母用来表示接近于光轴的光线或接近于主光线的光线可以允许用简单公式者。

(2) 母音的字母用来表示角，子音的字母用来表示长度， $\vee$ 是依为子音字母用。

(3) 在折射面发生变化时要用“加撇”或“不加撇”表示。

(4) 记脚字如 I, U_4 ——号仅在实际需要时才用，不加撇的字母常用于实际所交的面，记脚字 (-1) 用来表示前一个面，记脚字 1 表示下一个面，普通表示一系列的面就用数字 $1, 2, 3, \dots$ 号连续标记。

(5) 在选镜系统中常用从左到右的次序来标记面，任何一面的左边媒介质的折射系数记以不加撇的 N 字，在右边媒介使用 N' 。不加撇的 $\angle$ 和 $\vee$ 表示光线在左边媒介质中， $\angle'$ 和 $\vee'$ 表示光线在右边媒介质中。

应该记在心里，不加撇和加撇的字母的应用是决定于实际光线所在的方向，并不决定于交点 B 和 B' ，如图2，光线 OP 仅能在折射面左边的媒介质中存在，因此它的坐标是不加撇的 $\angle$ 和 $\vee$ ，虽然实际的交点 B 在延长光线与它实际相交的面之外，即使它在这面右边改变光路的那个面之外。

(4) 在图2(a) (仍旧表示一切量为正) 入射光线 OP 延长后与

光轴交于B点，其至顶点A的距离 $AB = L$ ，与光轴所成的角 φ 或 U 。

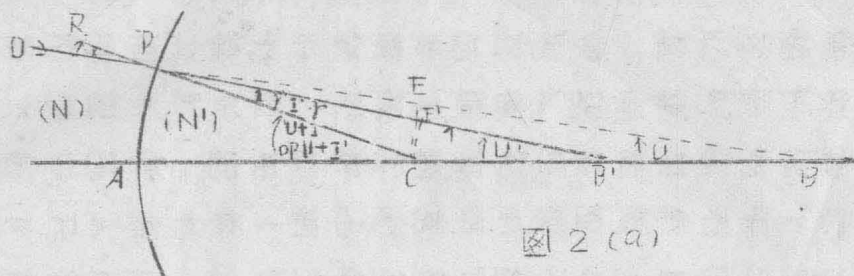


图 2 (a)

过入射点作半径 CP 得入射角 $\angle CPR$ ，用记号 I 表示。在三角形 CPB 中 $\angle CPB$ 角也等于 I 。在此三角形中知道边 $CP = r$ ，边 $CB = AB - AC = L - r$ ，及角 $\angle CBP = U$ ；由 C 作垂线 CE 至 PB ，我们有

$$\sin I = \frac{CE}{r} \text{ 及 } \frac{CE}{L-r} = \sin U$$

将第二式中 CE 之值代入第一式得方程式

$$(1) \quad \sin I = \sin U \frac{L-r}{r}$$

太烦了。

直接用三角形

正弦定理可以了。

由此可以求出入射角。其次变化 (1) 式得

$$(2) \quad \sin I' = \frac{N}{N'} \sin I$$

由折射定律就可决定图 2(a) 中折射光线 PB' 的方向

现决定折射光线的 $\angle$ 及 U' 。由图可看出在曲率中心的角 $\angle PCA$ 是三角形 PCB 的外角，因而 $= (U + I)$ ，对应于折射光线也是三角形 PCB' 的外角因而 $= (U' + I')$ 。故得重要的关系（因以后常用到要记住）：

$$U + I = U' + I'$$

此式变化后得出 U' 之值，即

$$(3) \quad U' = U + I - I'$$

在三角形 PCB' 中，知道边 $PC = r$ 及两角 I' 和 U' ，可决定边 $CB' = L' - r$ 。应用已经在三角形 PCB 所用的道理容易得到

$$(4) \quad L' - r = \sin I' \frac{r}{\sin U'} \text{ 由此}$$

$$(5) \quad L' = (L - r) + r$$

这就完成所设面的工作。

依照普通的习惯、公式的推导係对于光线从左至右传播。但是、这公式不限于普通的方向是真实的、因为定义的意义和 L, U 及 r 的符号对光线任何方向传播是非常自由的。假如在相反的方向追踪同样一条光线就有像已经给予的量一样截距 $AB' = L$ 、及在面的右边媒介质为 N' 中光线与轴的倾斜角 U' 、计算它折射后的光路、用上面公式取相反的顺序依简单的变化方程式 (4) 得到。

$$(1) \quad \text{从右至左: } \sin I' = \sin U' \frac{L - r}{r}$$

变化方程式 (2) 有

$$(2) \quad \text{从右至左: } \sin I = \frac{N'}{N} \sin I'$$

其次变化 (3) 式有

$$(3) \quad \text{从右至左: } U = U' + I' - I$$

最后变化 (1) 式有

$$(4) \quad \text{从右至左: } L - r = \sin I \frac{r}{\sin U}$$

$$\text{得出 (5) 从右至左: } L = (L - r) + r$$

注意这些方程式在数学上与由左至右计算的方程式恒等、因此这些方程式可用简单的变换“加撇”和“不加撇”的记号来得到。

这个非常方便的计算公式是 + 介老 [右的、或许是倒退到十八世纪。德国天文学家 *Bessel* 用这些公式来研究 *Königsberger Heliometer* (1841) 许多寻找达到他们目的更好方法的企图必然没有是失败的、在本书中没有记载。

(5) 如像已经指出的这些基本计算公式只要入射面已经决定就可应用到球面折射和反射的每一种情形、在一般所谓斜光线的情形、在接连的每个面决定入射面需要一些困难的计算、要避免这些困难、我们主要的目的是尽可能免去斜光线的追踪、并从光线在其

心系统的光轴所色含的平面内进行的光线中推出需要的结果。对于这些光线把数据从一个转移到另一个面是最简单的一种办法。

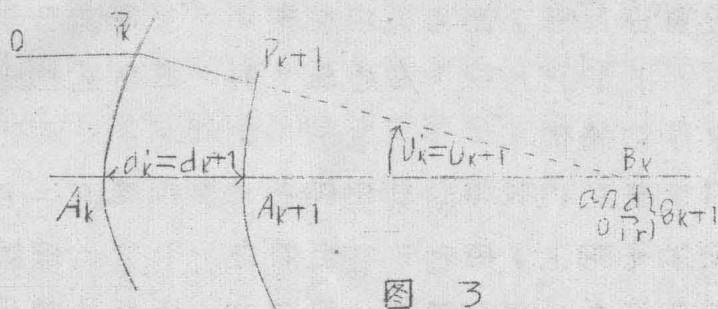


图 3

假定 $A_k P_k$ 是共心透镜系统的第 k 面、在色含系统的光轴的平面内的光线 OP_k 已经通过 k 面追踪，已知截距 $A_k B'_k = L'_k$ ，及其收敛角 U'_k 。令 $A_{k+1} P_{k+1}$ 为次一面，即第 $(k+1)$ 面，离开第 k 面的轴向距离 $A_k A_{k+1} = d'_k$ ，依照我们最后关于符号的假定，记号 d'_k 将位于 $A_k P_k$ 的右边，而是一正量。我们表示间距这个重面常在其记号上加一撇。但必须注意对于自右至左的追踪，同一间距很自然地作为第 k 面离开 $(k+1)$ 面左边的距离并记为 d_{k+1} （没有“撇”），其本质为负。在一般理论公式的情形向离观念的改变有时是可取的，间距或厚度的 22 重命名（色含相反的符号）应该搞清楚并好好记着。在任何公式中，这个意义就是可以用 $-d_{k+1}$ 代替 d'_k 或相反应用。

在相邻两面向媒介质的折射系数这两个名字：当对于 k 面而言的，应记为 N'_k ，但对于 $(k+1)$ 面而言的应记为 N_{k+1} ，但由于折射系数是绝对的正数，在此情形就有 $N'_k = N_{k+1}$ 。

现在由图直接写出转换公式，任何光线从第 k 面到第 k 面的收敛角 U'_k 是等于这光线到第 $(k+1)$ 面或从第 $(k+1)$ 面的收敛角，因之 $U'_k = U_{k+1}$ ，但是由这两个面计算光线与光轴相交的截距，因两个面的间距关系其值是不同的，由此得出转换公式。

$$L_{k+1} = L'_k - d'_k ; U_{k+1} = U'_k ; N'_{k+1} = N'_k .$$

或者对于从右至左的追踪其转换公式为

(5)× 从右至左

$$L_k' = L_{k+1} + d_k' = L_{k+1} - d_{k+1};$$

$$U_k' = U_{k+1}; \quad N_k' = N_{k+1}$$

这要注意在从右至左追迹的公式中“不加撇”与“加撇”是互相交换了、 K 和 $(K+1)$ 面也是一样、后者是由于光线与面相正在相反次序的缘故。

(6) 最后讨论在应用校准公式时的一个特殊情况、即一点物体位于共心系统的光轴上。假若 B 为点物体、 P 为光线的投射点、折射光线与轴的交点 B' 可用普通公式求出、但在此情况得出一最重

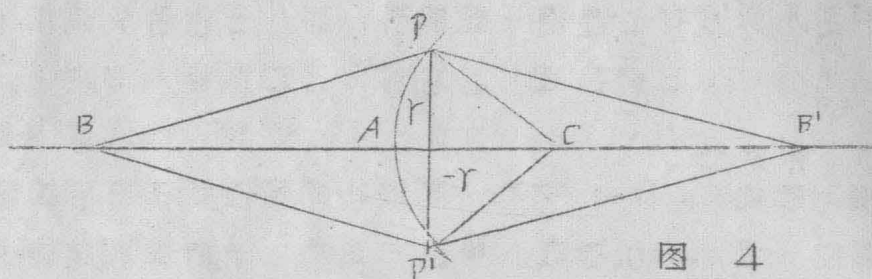


图 4

要的结论、由于球面对球心完全是对称的、立即明白、假如讨论一条光线由 B 经过在轴下边离开与在上轴上边的 P 点离开同样距离为 r 的一点 P' 所得出的图形完全是与第一条光线一样、这个证明可以推广应用到经过球面的光轴 AC 与画面依任何角度的任何画面。我们得出结论、第一次讨论得到的像点 B' 可利用到在折射前以 B 为顶点的光锥全部光线及离开光轴距离为 r 在折射面折射以后、以 B' 为顶点的光锥的全部光线、这一讨论就代表了面的整个环节的讨论；对于任何数量接连的面、只要它们的曲率中心在原来的光轴上 同样很明显地成立。

重要附注

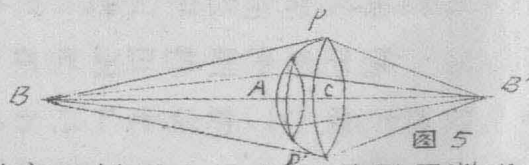


图 5

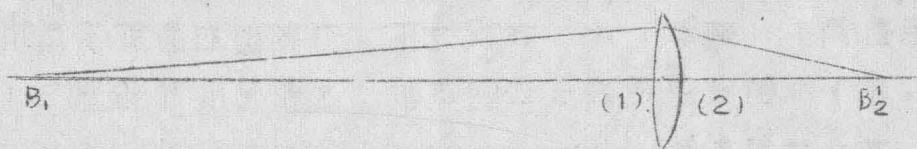
可以看出光线方向由于折射所产生的改变与相对折射系数 N 有关、折射系数并用分光计来测定、玻璃製造者給予的数值是玻璃对于普通空气而言的相对折射系数、这自承认空气的折射系数 (约为 0.00029) 在玻璃——空气折射的作用。

事实证明在一般光学实际中可把空气的折射系数作为“1”至少是把它当作不变的媒质、实际上空气的折射系数近似的比例于它的密度、而且随大气的温度而变化。这种紊乱的原因可归结于空气的折射系数在小数点后第五位有几个单位的不精确、这足够表明在光学计算中过份的精密是无用的。

C 实际光学计算

[9] 在理论部份所给的光线追踪公式、在每个光学系统的实际设计上是很有用的；必须完全熟习它们、并能在实际例子的工作中直至步骤方法变成自动化为止。给出一些改良的例子作为将来示范之用并供给以后的材料。实际例子是选择来为了适合检验上一章所推理论的结论。

Example 1



一个简单的双凸的冕号玻璃的透镜、其规格为：

$$\begin{aligned} r_1 &= 10.000'' \\ r_2 &= -5.000'' \end{aligned} \quad d_1' = 0''.600$$

接受来自一距透镜较平的一面的顶点为 $24''$ 的物体 B_1 的光线。对于通常自左至右的光线追踪、则有 $L = -24$ 、玻璃的折射系数 $= 1.5180$ 、从 B_1 点发出的光线中被追踪的是与光轴成 1° 、 2° 、 3° 的三条。如果直接计算的光线是在透镜的光轴之上、通过透镜（这是习惯广为采用的）我们必须分别令 $u_1 = -1^\circ$ 、 -2° 、 -3° 、这是因为规上从光轴旋到光线是顺时针方向旋转的缘故。当几条光线都要通过系统追踪、最好是排列在平行栏内工作、整个工作给出在下面、这两个面的计算是排列在一页纸的两旁、实际上最好是把第二面的计算放在第一面计算的下面；1 栏至了栏最后的数

字移到4碗6碗的头上的手續就可省去。

訂標的詳細詳釋

訂標用标准表格。开始訂標用方程式 (1) $\sin I = \sin u (\angle - r)$ 分。为此須知道 $\angle - r$ 。这訂標是由水平前三行的作出、写下 $\angle$ 的值和它真正的符号—24、 r 的值 (給予值为10) 和它的反号— $r = -10$ 。得出 $\angle - r = -34$ 。在第二面、因为三条光線均从同一處发出 ($\angle - r$) 值的訂標是同样的。在第二面、每条光線有不同的 $\angle$ 值、($\angle - r$) 的值而分別訂標。

其次对数工作开始。 $\log \sin \angle$ 根据角度查出数值因为角度的符号为负、故在其对数值后面加上记号 n 、 $\log (\angle - r)$ 同样查出其数值、因为 ($\angle - r$) 是负、它的对数值也跟上一个记号 n 。把这两个对数相加得出 $\log (\angle - r) \sin u$ 因为这加得的对数包含两个 (偶数) n 、其积为正、对数值后面就不再附加记号 n 。用 r 除的意思是减去它的对数、这就完成方程式 (1) 的訂標。其次訂標方程 (2) $\sin I' = \sin I \cdot N/N'$ $\log \sin I$ 已经得出在紙上、构成 $\log N/N' = \log N - \log N'$ 因为光線便从空气 (N 取为1) 到玻璃、其折射系数 $N' = 1.5180$ 、其对数值为 0.18127、故有：

$$\log N/N' = 0.00000 - 0.18127 = -0.18127 +$$

根据公式此数应与 $\log \sin I$ 求代数和、相加后即得 -0.1827、此即所求 $\log \sin I'$ 之值。

† 用系数 N/N' 作出标准的光線追踪公式时真正的反对数比它的等价的正对数 (+9.81873) 好、因为它省去一个数字、并且常常在下一个面又由正变为负。

Original U	-1°	-2°	-3°	-1°	-2°	-3°
	First Surface			Second Surface		
L	-24.000	Same	Same	147.938	144.551	139.046
-r	-10.000			+5.000	5.000	5.000
L-r	-34.000	Same	Same	152.938	149.551	144.046
log sin U	8.24186n	8.54282n	8.71880n	7.45050	7.76221	7.95625
+log (L-r)	1.53148n	1.53148n	1.53148n	2.18452	2.17479	2.15850
log (L-r) sin U	9.77334	0.07430	0.25028	9.63502	9.93700	0.11475
-0.9r	-1.00000	-1.00000	-1.00000	-0.69897n	-0.69897n	-0.69897n
log sin I	8.77334	9.07430	9.25028	8.93605n	9.23803n	9.41578n
+log N/N'	-0.18127	-0.18127	-0.18127	+0.18127	+0.18127	+0.18127
log sin I'	8.59207	8.89303	9.06901	9.11732n	9.41930n	9.59705n
+log r	1.00000	1.00000	1.00000	0.60897n	0.69897n	0.69897n
log r sin I'	9.59207	9.89303	0.06901	9.81629	0.11827	0.29602
log sin U'	-7.45050	-7.76221	-7.95625	-8.67929	-8.98890	-9.18026
log (L'-r)	2.14157	2.13082	2.11276	1.13700	1.12937	1.11576
U	-1-0-0	-2-0-0	-3-0-0	0-9-42	0-19-53	0-31-5
+I	3-24-7	6-48-53	10-15-0	4-57-4	9-58-43	15-5-56
U+I	2-24-7	4-48-53	7-15-0	4-47-22	9-37-50	14-34-51
-1'	-2-14-25	-4-29-0	-6-43-55	7-34-42	15-13-28	23-37-30
U'	0-9-42	0-19-53	0-31-5	2-44-20	5-35-38	8-42-39
L'-r	138.538	135.151	129.646	13.7088	13.4701	13.0545
+r	10.000	10.000	10.000	-5.0000	-5.0000	-5.0000
L'	148.538	145.151	139.646	8.7088	8.4701	8.0545
-d'	-0.600	-0.600	-0.600			
L ₁	147.938	144.551	139.046			

其次计算方程式 (3) $U' = U \pm -I'$. 除去第五行外, 为了完成以后的对数工作, 我们建立角度记载表, 开始把每条光线的 U 值记入, 再把第五行的三个 $\log \sin I$ 的角度值查出记入角度表

的第二行、在现在的情形 $\sin I$ 及 I 的值都为正。假如 $\log \sin I$ 有一个记号 h 在末尾、在查出角度后须在前添上负号、如象在第二面发生的那样、由于方程式 (3)、 u 与 I 、必须代数地相加、但是由于 u 为负、 I 为正求和就必须从 I 减去 u 、然而我们必须用它代数的名称来称呼这个结果、完成 (3) 式须要查出 $\log \sin I'$ 对应的角度值、根据方程式称为 $-I'$ 、我们从表上查出角度值再加上负号、这样就得出 u' 之值、即折射光线与光轴的交角。

现在回到对数的工作来计算方程式 (4) $L' - r = \sin I' \cdot r / \sin u'$ $\log \sin I'$ 已经有了、因此只须从第 4 行摘抄 $\log r$ 的数值但须加一正号、把这个号当一个因子看待、相加后得出 $\log r \sin I'$ 、完成 (4) 式就须要用 $\sin u'$ 来除或是减去 $\log \sin u'$ 、这就得到 $\lg (L' - r)$ 、再把每列的真数值 $(L' - r)$ 查出。完成光线追踪用 (5) 式、如象去角度记载栏下面所表示的那样、由于光线须要经过第二面、就必须用 $(5) \times$ 作为准备即是从所得出的 u' 值中减去 (代数的) 所给的厚度 $d' = 0.600$ 。这样就得出三条光线对于第二面顶点的截面、即是用来自迹经过第二面的光线的改正值 L 根据第二个 $(5) \times$ 式第一面的 L' 值可以简单地转变为第二面的 L 、同样的、在第一面对教工作倒数第二行的 $\log \sin u'$ 可摘抄为第二面的 $\log \sin u$ 、经过这面的计算完全是重复如第一面所说的那样、但是只须注意符号的变化、最后结果如像在角度记载栏最后一行所看到的那样、全部最后一行为：

第一条光线与光轴的交点在第二面顶点、右边的距离为 $L' = 8.7088$ 、顺时针方向与光轴构成的角度为 $L' = 2^\circ 44' 20''$ 、

对于第二条光线 $L' = 8.4701$ 、 $L' = 5-35-38$

对于第三条光线 $L' = 8.0545$ 、 $L' = 8-42-39$

角度的写法用连字号 (即—) 来分开角、分、秒、可免发生错误 (如像把 2° 错写为 20 、或 $4'$ 错写为 41)、关于度、分、秒、

对于轴 AC 与入射线法线 PC 之间在 C 点的角由于是 $\triangle$ 中 $\angle B$ 的外角、得出：

$$\text{在 } C \text{ 点的角} = (\alpha) - (I)$$

根据正弦公式有：

$$\sin I = \sin \alpha \frac{(\angle - \alpha)}{r}$$

和在 C 点的角 $= \alpha + I$ 上二者似乎与几何得出的结果相矛盾。但若先检查对于 $\sin I$ 的三角公式、我们可写出它的绝对值。在这种情形所有量均为正。

$$\sin I = \sin (\alpha) \frac{(\angle) - (r)}{(r)} = -\sin (\alpha) \frac{(r) - (\angle)}{(r)}$$

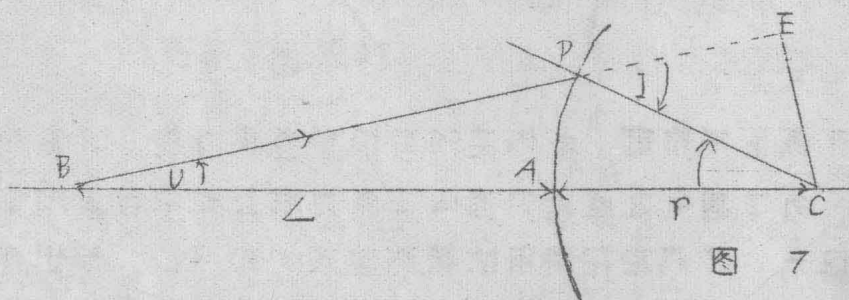
这表示我们的正弦公式得出的 $\sin I$ 与几何推导出同样的绝对值。但在 $\sin I$ 还附带一个负号；因此 I 角本身也附带一个负号；或者教学的可令 $I = -(I)$ 。若把这个值代入正弦的公式中、在 C 点的角 $= \alpha + I$ ，得出绝对值。

$$\text{在 } C \text{ 点的角} = (\alpha) - (I)$$

这与上面几何的结果非常符合。因此从正弦公式得出的全部结果是符合几何的推导。只是简单地把入射角当为负就可以从公式推出。

很明显这些关系对于 B 点在折射面与球心之间的任何位置都能成立。

第三类的情形发生于当 B 点在折射面的左边（图 7）



由几何的关系得

$$\sin (I) = \sin (\alpha) \frac{(\angle) + (r)}{(r)} \quad \text{及在 } C \text{ 点的角} = (I) - (\alpha)$$

标公式不变时的形式为：

$\sin i = \sin u \frac{L-r}{r}$ 反在 C 点的角 $= u + i$ 但是、由于 B 点在面的左边、根据符号规定、 L 为负或 $L = -(L)$ 。又由于 u 是反时针方向、应为负、或 $u = -(u)$ 、由此得出 $\sin i$ 的订标公式

$$\sin i = \sin(-(u)) \frac{-(L)-(r)}{(r)} = -\sin(u) \frac{-(L)-(r)}{(r)} = \sin(u) \frac{(L)+(r)}{(r)}$$

这与从几何方面得出的结果完全符合、因此我们得到正的入射角或 $i = (i)$ 、如果现在求出在曲率中心的角 $= u + i$ 、因 $u = -(u)$ 、 $i = (i)$ 、则得、

在 C 点的角 $= -(u) + (i) = (i) - (u)$

这也与从几何得出的结果符合。立程情形明白地表明 B 点在折射面与无穷远之间的任何一个位置、因此这就完成对于半径为正的面的被轴上任何点发出的光线在轴的上面穿过镜面的研究。

从几何方面考虑在这些重之间的所有可能的关系、对于其他可以发生的几种情形得出同样的图解、只是旋转至不同的位置。因此把这三个图解在它们自己的平面内旋转 180° (从上面往下看) 给出三种对于光线在轴下的面的情形 (图 B)。

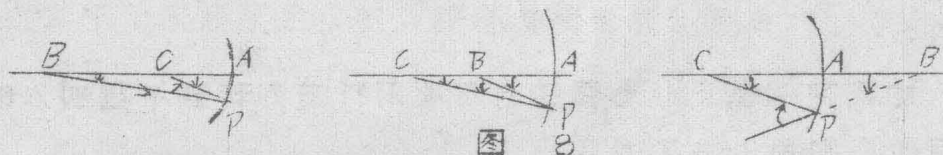


图 B

根据符号规定这些情形的角度有同一样的符号、但是 L 及 r 和第一种情形比较符号相反。把原来的三个图解像翻书一样翻转过来并通过纸面去看就得出三个图解关于光线在凹镜轴上面的三种情形、把这三个图解倒转来看 (仍然通过纸) 最后产生光线在凸镜轴下面三种可能情形。在这三种情形的第三种所有符号和原来比较是相反的。为了证明基本公式应用到每一种可能发生的情形是可以绝对信任的、另外一些情形由学者像上面 2 及 3 种情形依计