梁灿彬

微分几何入门与广义相对论

下册

WEIFENJIHE RUMEN YU GUANGYIXIANGDUILUN

WEIFENJIHE RUMEN YU GUAN

北京师范大学出版社

梁灿彬

微分几何入门与广义相对论

下册

北京师范大学出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

微分几何入门与广义相对论/梁灿彬编著.—北京：北京师范大学出版社，2001.12

ISBN 7－303－05993－8

Ⅰ.微…　Ⅱ.梁…　Ⅲ.①微分几何－高等学校－教材②相对论－高等学校－教材　Ⅳ.①O186.1②O412.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 086460 号

北京师范大学出版社出版发行

（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）

出版人：常汝吉

北京东方圣雅印刷有限公司印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×1 092mm　1/16　印张：22　字数：563 千字

2001 年 12 月第 1 版　2001 年 12 月第 1 次印刷

印数：1～1 000　定价：28.00 元

下册序言

本书下册在上册的基础上介绍经典(非量子)广义相对论及其有关数学工具的深入一步的内容,包含5章(第11-15章)和7个附录(附录B-H).

第11,12章是广义相对论的整体(全局,大范围)理论中的两个重要专题,其中第11章介绍时空的整体因果结构,第12章介绍渐近平直时空.这是专业性颇强的两个专题,初学者也可考虑暂时不读.这对学习后面的章节不会有太大妨碍,因为后续章节中只在个别情况下用到这两章的知识.或者,初学者也可考虑先对第11,12章进行粗读然后再学习后续章节.所谓粗读,是指粗略阅读这两章的非选读内容,只要求对一些基本概念和结论有所了解,不求概念的深究和结论的证明.其中特别值得阅读的是§12.2,它从零开始介绍闵氏时空的类空、类时和类光无限远(即i^0, $i^\pm$, $\mathscr{I}^\pm$),这些概念对学习第12章必不可少,在§13.1和§13.3中也要用到.只要事先粗略读过§12.1,(共形变换,作为数学基础.)则§12.2并不难懂.对"时间机器"一类问题有兴趣的读者不妨阅读§11.3的前两页,更详尽的讨论则可在该两页推荐的文献中找到.

第13章介绍Kerr-Newman(克尔-牛曼)黑洞,这是广义相对论的一个非常基本而重要的内容.之所以放在第13章,只是因为在§13.1至§13.3的少数地方用到第12章的个别概念(i^0, $i^\pm$, $\mathscr{I}^\pm$)和结论(时空的总电量和总能量的表达式).

第14章比较深入细致地讨论了与参考系有关的各个方面的问题,其中对爱因斯坦转盘问题以及参考系内的钟同步问题的讨论也许会引起较大范围读者(包括那些更喜欢"用物理思维"而不是"用几何方法"讨论相对论问题的许多同行)的兴趣.第14章的另一个十分重要的内容就是时空的3+1分解(§14.4),它不仅对于理解时间和空间的概念有重要帮助,而且是学习广义相对论的初值问题(§14.5)和哈氏形式(第15章)的不可或缺的基础.希望§14.4对3+1分解的讲法对初学者以及广义相对论研究人员都有所帮助.

第15章比较详尽地介绍了广义相对论的拉氏和哈氏形式.基于循序渐进的考虑,我们先简单复习有限自由度系统的拉氏和哈氏理论,再介绍如何推广到场系统(无限自由度系统),最后介绍广义相对论的拉氏和哈氏形式.广义相对论的一个特点是引力场是约束系统(指非完整约束).为了打好基础,我们先介绍Dirac-Bergmann关于约束系统的哈氏理论,(为使讨论更加清晰,在陈述中适当地、循序渐进地使用了一些几何语言.)再以闵氏时空的电磁场为例推广到无限自由度系统(电磁场是比引力场简单得多的无限自由度约束系统),然后讨论广义相对论的哈氏形式.

为使读者尽早进入物理内容,本书上册前5章只能精选对学习相对论必不可少的最小量微分几何知识,对相对论虽然很重要、但可在一开始暂时避开的其他数学内容则分别放在书中非用不可的章节之前讲授(或者放入附录之中).例如,费米导数和费米移动放在§7.3, Newman-Penrose形式放在§8.7和§8.8,共形变换放在§12.1,张量密度和辛几何分别放在§15.5和§15.6, Frobenius定理以及李群李代数理论则分别放在附录F和G.

附录B(量子力学数学基础简介)也许算是与本书书名无直接关系的一个内容.然而,

根据笔者的经验，读过本书第 1，2 章的物理读者对集合、映射、拓扑、矢量空间及其对偶空间、张量、度规等概念比较熟悉，他们往往跃跃欲试地想把量子力学的内积、左右矢、线性算符以及波函数用正交归一基底展开等一系列问题同上述概念联系起来思考，力图求得一个更为深入和清晰的理解. 他们希望有一份简明读物作参考. 本附录主要为满足这种需要而产生，此外也为附录 C (量子力学的几何相)提供必要的基础. 所谓量子力学的数学基础，此处是指有关泛函分析的知识. 本附录介绍其中最为基础的部分，并尽量注意同量子力学相联系. 根据泛函分析，物理工作者很感兴趣的 δ 函数其实是某种连续线性泛函，我们在讲解连续线性泛函时顺便介绍 δ 函数的数学定义(选读 B-1-2).

自从Berry 在1984 年首次明确提出量子力学的几何相概念以来，几何相的研究就成了国际物理界的热点之一. 笔者在《微分几何与广义相对论》课的教学经历中曾不止一次地利用已讲过的微分几何知识(相当于上册的前 5 章)向学生介绍过几何相的基本概念和某些理论发展，受到学生欢迎. 附录 C 便是以这方面的讲稿为蓝本写成的.

Penrose 和 Hawking 联手证明的奇性定理(1965-1970)无疑是经典广义相对论的重要定理. 由于这些定理的证明涉及太多的专业性极强的知识(本书只介绍过其中的一部分)，我们不拟讲解定理的证明，只用附录的形式(附录 E)对奇性定理以及 Penrose 于 1969 年开始提出的宇宙监督假设做一个定性介绍. 奇性定理以及正能定理(小节 12.7.4)的前提都涉及能量条件，我们特用附录 D 对能量条件做一专题讲解.

李群和李代数的知识对物理工作者的重要性自不待言. 用几何语言表述李群李代数理论有一系列的明显优点. 鉴于本书多处用到李群李代数，考虑到读者已具有一定的几何基础，我们在附录 G 中用几何语言讲授这一理论. 在选材时特别注意理论物理工作者的需要，例如，我们专辟一节(§G.8)比较系统详尽地讲述在相对论中用得特别多的固有洛伦兹群和洛伦兹代数. 在原子物理学发展早期提出的托马斯进动是一个理论上有趣而又难懂的问题，由于本书对它的理论基础——费米移动和洛伦兹群分别有过较为详细的讲授，读者完全有条件对它取得一个较为透彻的理解. 为帮助读者达到这一目的，§G.8 的最后一小节不惜篇幅对托马斯进动做了比较详细的讨论.

Noether 定理是场论教材几乎必讲的重要基础性定理. 多数教材在讲授该定理的证明时都使用坐标语言. 据笔者所知，许多有志于彻底弄懂这一证明的学生学习后都不同程度地感到并未真懂. 然而用几何语言可以给出清晰简洁的证明. 本书附录 H 首先讲解用几何语言的证明，然后以此为基础介绍笔者对坐标语言证明的理解.

关于选读内容以及习题的说明见上册序言.

为了尽量减少错误和不妥之处，与上册类似，笔者请了为数众多的专家、同行和学生分别阅读下册初稿的部分(甚至全部)章节，他们是：(以姓氏汉语拼音为序) 敖滨，曹周健，戴陆如，高长军，高思杰，贺晗，黄超光，邝志全，刘旭峰，马永革，强稳朝，田贵花，吴小宁，杨学军，张红宝，张朋，(“朋”为同音字，实为草头加凡.) 郑驻军，周彬，周美柯. 以上诸君对所读的部分章节都提出过许多意见和建议，其中很大一部分非常宝贵. 笔者要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友，第一位是芝加哥大学的 Wald 教授 (最近入选美国国家科学院院士)，他不但是笔者步入本领域的优秀启蒙导师，而且对笔者回国后的教学和

写作工作不断提供无私帮助. 他的力作General Relativity是本书的最重要参考文献. 第二位是中科院数学所的邝志全研究员, 他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议, 而且在与笔者的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使笔者受益殊深. 此外, 周彬博士、杨学军副教授、曹周健和张红宝同学也是笔者觉得需要特别表示谢意的四位同仁, 他们不仅是笔者近年来讲授本书时最优秀的听众, 而且对本书(特别是下册)都提出过许多很有质量的意见和建议. 北师大数学系从事泛函分析教学多年的周美珂教授对附录B曾做过认真的审阅并提出过许多宝贵的意见和建议(虽然限于篇幅等原因未被全部采用), 笔者在此深表谢意. 笔者还要感谢北师大物理系刘辽教授和大连理工大学物理系桂元星教授, 他们的推荐使本书得以纳入北师大出版社的出版计划并获得出版社的财政支持. 感谢赵峥教授和王永成教授对本书的写作和出版的密切关心和大力支持. 感谢北师大出版社李桂福编审对本书出版的积极支持与帮助. 感谢北京市教委对本书写作和出版的立项资助, 也感谢北师大出版社提供的财政支持.

由于笔者水平太低, 加之成书仓促, 本书上册出版以来已陆续发现一些错误(其中两处还是严重错误). 为补救于万一, 下册之末附上一个“上册勘误”. 笔者为此深表歉意, 并欢迎读者不吝赐教.

梁灿彬

2001年9月于北京师范大学

下册目录

第 11 章 时空的整体因果结构......324

§11.1 过去和未来......324
§11.2 不可延因果线......332
§11.3 因果条件......334
§11.4 依赖域......338
§11.5 柯西面、柯西视界和整体双曲时空......341
习题......346

第 12 章 渐近平直时空......347

§12.1 共形变换......347
§12.2 闵氏时空的共形无限远......350
§12.3 施瓦西时空的共形无限远......354
§12.4 孤立体系和渐近平直时空......356
§12.5 $\mathscr{I}^{\pm}$ 和 i^0 上的对称性，BMS 群和 SPI 群......364
§12.6 引力能量的非定域性......376
12.6.1 电量和电量守恒......376
12.6.2 闵氏时空的守恒量......380
12.6.3 引力能量的非定域性......383
§12.7 渐近平直时空的总能量和总动量......385
12.7.1 Komar 质(能)量......385
12.7.2 ADM 4 动量......387
12.7.3 Bondi 4 动量......392
12.7.4 正能定理......394
习题......396

第 13 章 Kerr-Newman (克尔-牛曼)黑洞......398

§13.1 Reissner-Nordstrom (RN)黑洞......398
§13.2 Kerr-Newman (克尔-牛曼)度规......401
§13.3 KN 时空的最大延拓......404
13.3.1 $M^2 < a^2 + Q^2$ 的情况......404
13.3.2 $M^2 > a^2 + Q^2$ 和 $M^2 = a^2 + Q^2$ 的情况......409
§13.4 静界、能层和其他......411
13.4.1 静界和能层......411
13.4.2 无限红移面......415
13.4.3 闭合类时线......415

13.4.4 局域非转动观者 416
§ 13.5 从旋转黑洞提取能量 418
§ 13.6 黑洞“无毛”猜想 421
习题 423

第 14 章 参考系再认识 424

§ 14.1 参考系的一般讨论 424
§ 14.2 爱因斯坦转盘 431
14.2.1 转盘周长 431
14.2.2 转盘系是非超曲面正交的刚性参考系 433
14.2.3 刚性参考系及其空间几何 434
14.2.4 转盘系的空间几何 435
§ 14.3 参考系内的钟同步 436
14.3.1 惯性参考系的雷达校钟法 436
14.3.2 任意时空任意参考系的钟同步问题 437
14.3.3 超曲面正交系的钟同步 439
14.3.4 Z 类参考系 442
§ 14.4 时空的 3+1 分解 443
14.4.1 空间和时间 443
14.4.2 时空的 3+1 分解 444
14.4.3 空间张量场 449
14.4.4 空间张量场的空间导数 452
14.4.5 空间张量场的时间导数 453
§ 14.5 3+1 分解应用举例——广义相对论的初值问题 459
习题 463

第 15 章 广义相对论的拉氏和哈氏形式 465

§ 15.1 拉氏理论 465
15.1.1 有限自由度系统的拉氏理论 465
15.1.2 经典场论的拉氏形式 467
15.1.3 广义相对论的拉氏形式 470
§ 15.2 有限自由度系统的哈氏理论 475
15.2.1 有限自由度正规系统的哈氏理论 475
15.2.2 有限自由度约束系统的哈氏方程 476
15.2.3 初级约束和次级约束 479
15.2.4 L 不含 $\dot{q}^1$ 的情况 486
§ 15.3 经典场论的哈氏形式 491
15.3.1 哈氏理论离不开 3+1 分解 491
15.3.2 从拉氏场论到哈氏场论 492

15.3.3 约束系统的例子——麦氏理论的哈氏形式 494
§15.4 广义相对论的哈氏形式 498
§15.5 张量密度[选读] 505
§15.6 辛几何及其在拉氏理论的应用[选读] 513
15.6.1 辛几何简介 513
15.6.2 第一类约束系统 516
15.6.3 作为第一类约束系统的电磁场 521
15.6.4 作为第一类约束系统的引力场 523
15.6.5 约化位形空间 527
§15.7 从几何动力学到联络动力学
——Ashtekar 新变量理论简介[选读] 531
习题 535

附录 B 量子力学数学基础简介 536
§B.1 **Hilbert** (希尔伯特)空间初步 536
B.1.1 **Hilbert** 空间及其对偶空间 536
B.1.2 **Hilbert** 空间的正交归一基 541
B.1.3 **Hilbert** 空间上的线性算符 543
B.1.4 **Dirac** 的左右矢记号 544
B.1.5 态矢和射线 546
§B.2 无界算符及其自伴性[选读] 546
习题 555
附录 C 量子力学的几何相 556
§C.1 **Berry** 几何相 556
§C.2 **AA** 几何相 562
附录 D 能量条件 566
附录 E 奇性定理和宇宙监督假设 569
§E.1 奇性定理简介 569
§E.2 宇宙监督假设 572
§E.3 用 TIP 语言表述强宇宙监督假设[选读] 574
§E.4 奇异边界 578
附录 F Frobenius 定理 580
附录 G 李群和李代数 583
§G.1 群论初步 583
§G.2 李群 584
§G.3 李代数 585
§G.4 单参子群和指数映射 586
§G.5 常用李群及其李代数 589
G.5.1 GL(m) 群(一般线性群, **general linear group**) 589

G.5.2 O(m) 群(正交群, **orthogonal group**)....................592
G.5.3 O(1, 3) 群(洛伦兹群)....................595
G.5.4 U(m) 群(酉群)....................598
G.5.5 E(m) 群(欧氏群)....................601
G.5.6 Poincare 群(彭加莱群)....................602
常用矩阵李群一览表....................603
§G.6 李代数的结构常数....................603
§G.7 李变换群和 **Killing** 矢量场....................608
§G.8 固有洛伦兹群和洛伦兹代数....................611
G.8.1 固有洛伦兹变换和固有洛伦兹群....................611
G.8.2 洛伦兹代数....................617
G.8.3 用 **Killing** 矢量场讨论洛伦兹代数....................620
G.8.4 洛伦兹群的应用 —— 托马斯进动[选读]....................624
习题....................630

附录 H 时空对称性与守恒律(Noether 定理)....................631
§H.1 用几何语言证明定理....................631
§H.2 正则能动张量....................634
§H.3 关于用坐标语言的证明....................636

下册符号一览表....................644

上册勘误....................645

参考文献(上下册)....................647

下册索引....................655

(附) 上册目录摘要

第 1 章 拓扑空间简介 1
§1.1 集论初步 1
§1.2 拓扑空间 4
§1.3 紧致性[选读] 8
第 2 章 流形和张量场 12
§2.1 微分流形 12
§2.2 曲线、切矢和切矢场 15
§2.3 对偶矢量场 24
§2.4 张量场 28
§2.5 度规张量场 31
§2.6 抽象指标记号 36
第 3 章 内禀曲率张量 42
§3.1 导数算符 42
§3.2 矢量场沿曲线的导数和平移 47
3.2.1 矢量场沿曲线的平移 47
3.2.2 与度规相适配的导数算符 48
3.3.3 矢量场沿曲线的导数与沿曲线的平移的关系 49
§3.3 测地线 51
§3.4 内禀曲率张量 57
§3.5 内禀曲率再认识 62
第 4 章 李导数、Killing 场和超曲面 65
§4.1 流形间的映射 65
§4.2 李导数 67
§4.3 Killing 矢量场 69
§4.4 超曲面 72
第 5 章 微分形式及其积分 78
§5.1 微分形式 78
§5.2 流形上的积分 81
§5.3 Stokes 定理 84
§5.4 体元 86
§5.5 函数在流形上的积分, Gauss 定理 88
§5.6 对偶微分形式 91
§5.7 用标架计算曲率张量[选读] 92
第 6 章 狭义相对论 99
§6.1 4 维表述基础 99
6.1.1 预备知识 99
6.1.2 狭义相对论的背景时空 100
6.1.3 惯性观者和惯性系 101

6.1.4 固有时与坐标时 102
6.1.5 时空图 104
6.1.6 狭义相对论与非相对论时空结构的对比 105
§6.2 典型效应分析 108
6.2.1 "尺缩"效应 108
6.2.2 "钟慢"效应 109
6.2.3 孪子效应(孪子佯谬) 112
6.2.4 车库佯谬 113
§6.3 质点运动学和动力学 114
§6.4 连续介质的能动张量 121
§6.5 理想流体动力学 124
§6.6 电动力学 128
6.6.1 电磁场和4电流密度 128
6.6.2 麦氏方程 131
6.6.3 4维洛伦兹力 132
6.6.4 电磁场的能动张量 133
6.6.5 电磁4势及其运动方程, 电磁波 134
6.6.6 光波的多普勒效应 137
第7章 广义相对论基础 140
§7.1 引力与时空几何 140
§7.2 弯曲时空的物理定律 143
§7.3 费米移动与无自转观者 147
§7.4 任意观者的固有坐标系 153
§7.5 等效原理与局部惯性系 158
§7.6 潮汐力与测地偏离方程 162
§7.7 爱因斯坦场方程 167
§7.8 线性近似和牛顿极限 169
7.8.1 线性近似(线性引力论) 169
7.8.2 牛顿极限 172
§7.9 引力辐射 174
第8章 爱因斯坦方程的求解 187
§8.1 稳态时空和静态时空 187
§8.2 球对称时空 189
§8.3 施瓦西真空解 191
8.3.1 静态球对称度规 191
8.3.2 施瓦西真空解 192
8.3.3 Birkhoff(伯克霍夫)定理 196
§8.4 Reissner-Nordstrom(来斯纳-诺斯特朗)解 197
§8.5 轴对称度规简介[选读] 200
§8.6 平面对称度规简介[选读] 202
§8.7 Newman-Penrose 形式 (NP formalism)[选读] 204

§8.8 用NP形式求解爱因斯坦-麦克斯韦方程举例[选读] 209
8.8.1 NP形式中的电磁场和电磁场方程 209
8.8.2 柱对称条件下爱因斯坦－麦克斯韦方程求解一例 211
§8.9 坐标条件, 广义相对论的规范自由性 216
8.9.1 坐标条件 216
8.9.2 广义相对论的规范自由性 219
第9章 施瓦西时空 222
§9.1 施瓦西时空的测地线 222
§9.2 广义相对论的经典实验验证 225
9.2.1 引力红移 225
9.2.2 水星近日点进动 227
9.2.3 星光偏折 229
§9.3 球对称恒星及其演化 231
9.3.1 静态球对称恒星内部解 231
9.3.2 恒星演化 237
§9.4 Kruskal延拓和施瓦西黑洞 244
9.4.1 时空奇点(奇性)的定义 244
9.4.2 Rindler度规的坐标奇点 246
9.4.3 施瓦西时空的Kruskal延拓 248
9.4.4 施瓦西时空的无限红移面 253
9.4.5 球对称恒星的引力坍缩和施瓦西黑洞 254
第10章 宇宙论 260
§10.1 宇宙运动学 260
10.1.1 宇宙学原理 260
10.1.2 宇宙的空间几何 261
10.2.3 Robertson-Walker (罗伯逊-沃克)度规 265
§10.2 宇宙动力学 268
10.2.1 哈勃定律 268
10.2.2 宇宙学红移 269
10.2.3 尺度因子的演化 271
10.2.4 宇宙学常数和爱因斯坦静态宇宙 275
§10.3 宇宙的演化 276
10.3.1 宇宙演化简史 276
10.3.2 宇宙的未来, 暗物质 285
10.3.3 宇宙学常数问题 288
§10.4 标准模型的疑难和克服 292
10.4.1 粒子视界 292
10.4.2 标准模型的疑难 293
10.4.3 暴涨模型及其对视界、平直性疑难的解决 298
附录A 几何与非几何单位制的转换 304

第 11 章　时空的整体因果结构

§11.1　过去和未来

在狭义相对论中，任一时空点 p 的全体类时和类光矢量(零元除外)被分为指向未来和指向过去两大类(见小节 6.1.6 末). 无论弯曲还是平直时空，一点的切空间并无区别(无非是 4 维矢量空间配以一个洛伦兹度规)，因此弯曲时空中任一点的类时和类光矢量(零元除外)的集合也可类似地分为两大部分. 若只孤立地讨论一点 p，可任意指定其中一个部分为指向未来部分(记作 F_p)，其中每一元素称为**指向未来的**(future directed)类时(或类光)矢量，另一部分(记作 P_p)的元素则称为**指向过去的**(past directed)类时(或类光)矢量(见图 11-1). 但在讨论全时空时，物理上总希望这种指定在从一个时空点到另一时空点的过渡中是连续的(闵氏时空就如此). 然而并非所有时空都能做到这一点. 考虑以 $S^1\times\mathbb{R}$ (圆柱面)为底流形的 2 维时空，为画图方便，把它沿母线剪开并画成图 11-2. 设其上度规这样给定，使各点的光锥如图 11-2 所示，便无法对指向未来部分(F)作连续指定. (若按图11-2指定，则把左右两竖线粘合后，粘合处的 F 有突变.) 不妨认为这样的时空没有物理意义. 能连续地指定光锥未来部分的时空叫**时间可定向时空**(time orientable spacetime).① 今后谈到时空都指时间可定向时空，并认为每一时空都已作了这样的连续指定.

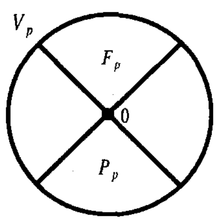

图 11-1　p 点的指向过去和指向未来类时(类光)矢量组成的子集 P_p 和 F_p

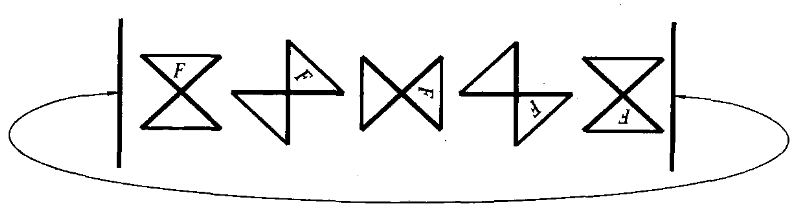

图 11-2　时间不可定向时空一例

命题 11-1-1　设 (M, g_{ab}) 为任一 4 维时空，$p\in M$，v^a, $u^a\in V_p$ 为类时或类光，而且 $v^a\neq 0$, $u^a\neq 0$，

(a) 若 v^a, u^a 不都类光，则 $g_{ab}v^a u^b\begin{cases}<0 \Leftrightarrow v^a\text{与 }u^a\text{ 同指向,}\\ >0 \Leftrightarrow v^a\text{与 }u^a\text{反指向,}\end{cases}$

① 更准确的定义是：时空 (M, g_{ab}) 称为**时间可定向的**，若对每点 p 可指定 V_p 的指向未来部分，使得 M 的每点有邻域 O，其上存在一个 C^0 的指向未来类时矢量场. 由此还可证明如下命题：(M, g_{ab}) 为时间可定向时空当且仅当 M 上存在 C^∞ 类时矢量场[见 Wald (1984)].

(b) 若v^a, u^a都类光, 则 $g_{ab}v^a u^b \begin{cases} =0 \Leftrightarrow \exists\beta\in\mathbb{R} \text{使} v^a=\beta u^a, \\ <0 \Leftrightarrow v^a \text{与} u^a \text{同指向,且} v^a\neq\beta u^a, \\ >0 \Leftrightarrow v^a \text{与} u^a \text{反指向,且} v^a\neq\beta u^a. \end{cases}$

证明　因为任意时空的一点的切空间都一样, 只须对闵氏时空一点 p 证明本命题.

(a) 设$v^a\in V_p$类时, 则总可选惯性系 $\{t, x^i\}$ 使v^a切于 t 坐标线, 亦即可选 V_p 的正交归一基底使$v^a=\alpha(e_0)^a$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$. 这表明v^a在该基底的分量为$v^\mu=(\alpha,0,0,0)$, 于是 $g_{ab}v^a u^b=\eta_{\mu\nu}v^\mu u^\nu=-\alpha u^0$. 而由图6-12 关于指向未来和过去的定义可知$v^a$与$u^a$同(反)指向等价于$\alpha$与$u^0$同(反)号, 故

$$g_{ab}v^a u^b<0 \Leftrightarrow \alpha u^0>0 \Leftrightarrow v^a \text{ 与 } u^a \text{ 同指向},$$

$$g_{ab}v^a u^b>0 \Leftrightarrow \alpha u^0<0 \Leftrightarrow v^a \text{ 与 } u^a \text{ 反指向}.$$

(b) 设v^a, $u^a\in V_p$类光, 则总可选正交归一基底使$v^a=\alpha[(e_0)^a+(e_1)^a]$, $\alpha\in\mathbb{R}$, 从而 $v^\mu=(\alpha,\alpha,0,0)$, 这样便有 $g_{ab}v^a u^b=-v^0u^0+v^1u^1=-\alpha(u^0-u^1)$, 所以

$$g_{ab}v^a u^b=0 \Leftrightarrow u^0=u^1 \Leftrightarrow u^\nu=(u^0,u^0,0,0) \Leftrightarrow \exists\beta\in\mathbb{R} \text{ 使 } v^a=\beta u^a,$$

$$g_{ab}v^a u^b<0 \Leftrightarrow u^0\neq u^1 \text{ 且}\alpha\text{与 } u^0-u^1 \text{ 同号}$$

$$\Leftrightarrow |u^0|\geq|u^1| \text{ 且 }\alpha\text{ 与 } u^0 \text{ 同号} \Leftrightarrow v^a\neq\beta u^a \text{ 且} v^a\text{与 } u^a \text{ 同指向}.$$

同理可证

$$g_{ab}v^a u^b>0 \Leftrightarrow v^a\neq\beta u^a \text{ 且} v^a \text{ 与 } u^a \text{ 反指向}.$$

□

定义 1　C^1 曲线γ叫**指向未来类时曲线**, 若γ上每点的切矢是指向未来类时矢量; γ叫**指向未来因果曲线**(future directed causal curve), 若γ上每点的切矢是指向未来类时或类光矢量(含零元). **指向过去类时曲线**和**因果曲线**可类似地定义.

注　我们以前把观者定义为一条以固有时(线长)为参数的类时线, 现在应在“类时线”前加上“指向未来”. 就是说, 要求观者的 4 速是指向未来的单位类时矢量.

定义 2　$p\in M$ 的切空间 V_p 的子集 $\{v^a\in V_p \mid g_{ab}v^a v^b=0\}$ 叫 p 点的**光锥**(light cone).

按照定义2, p 点的光锥是p 点的切空间 V_p 的子集, 由 p 点的所有类光矢量组成. 但在狭义相对论中许多人把光锥理解为时空流形 $\mathbb{R}^4$ 的子集—— 以 $p\in\mathbb{R}^4$ 为顶点的实心锥体, 即由 p 点出发的所有指向未来因果线所到之点的集合. 在广义相对论中这也是很重要的子集, 不过不宜称作光锥而应另给专名. 比较统一的专名是“ p 点的因果未来”, 见定义6. 下面先介绍编时未来的概念.

定义 3　设 $p\in M$, 则 p 点的**编时未来**(chronological future)定义为

$$I^+(p):=\{q\in M \mid \exists \text{从 } p \text{ 到 } q \text{ 的指向未来类时线}\}.\text{①}$$

还有一个与$I^+(p)$类似而又有区别的重要定义, 即

定义 4　设 $p\in M$, U 是 p 的任一邻域, 则 p 的**相对于 U 的编时未来** $I^+(p,U)$ 定义为

① “从 p 到 q 的曲线” γ 是指γ : $[a,b]\to M$, 满足 $p=\gamma(a)$, $q=\gamma(b)$. 本章的“曲线”往往是指曲线映射的像.

$$\mathrm{I}^+(p,U) := \{q\in U \mid \exists \text{从 } p \text{ 到 } q \text{ 的位于 } U \text{ 内的指向未来类时线}\}.$$

注 (1) $\mathrm{I}^+(p)=\mathrm{I}^+(p,M)$. (2) 图 11-3 给出闵氏时空中 $\mathrm{I}^+(p,U)\neq \mathrm{I}^+(p)\cap U$ 的一例. (3) 把定义 3, 4 的"未来"换为"过去",便得到 $\mathrm{I}^-(p)$(p 点的编时过去)和 $\mathrm{I}^-(p,U)$ 的定义. 这种做法称为"对偶地定义". (4) 本书只按定义 2 使用光锥一词,(例如图 9-11, 17, 18 的光锥都符合定义2.) 只有小节 6.1.6 例外, 那里谈到的 p 点的"光锥面"实际是 $\dot{\mathrm{I}}^+(p)$, 即 $\mathrm{I}^+(p)$ 的边界.

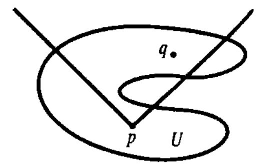

图 11-3 $q\in \mathrm{I}^+(p)\cap U$ 但 $q\notin \mathrm{I}^+(p,U)$

命题 11-1-2 $p\in \mathrm{I}^+(q)$, $q\in \mathrm{I}^+(r) \Rightarrow p\in \mathrm{I}^+(r)$. (不妨形象地表述为"$\mathrm{I}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$".)

证明 $p\in \mathrm{I}^+(q)$, $q\in \mathrm{I}^+(r)$ 表明存在从 q 到 p 的指向未来类时线 γ_{qp} 和从 r 到 q 的指向未来类时线 γ_{rq}. 令 $\gamma\equiv\gamma_{rq}\cup\gamma_{qp}$, 在 q 点附近可对 γ 适当"磨光"使成 C^1 曲线(图11-4)(磨光的可行性的证明略), 便有 $p\in \mathrm{I}^+(r)$. □

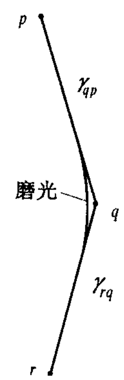

图 11-4 $\mathrm{I}+\mathrm{I}=\mathrm{I}$ 示意

命题 11-1-3 $\mathrm{I}^+(p)$ 为开集 $\forall\, p\in M$.

证明 见选读 11-1-1. □

定义 5 M 的任一子集 S 的编时未来定义为

$$\mathrm{I}^+(S) := \bigcup_{p\in S} \mathrm{I}^+(p).$$

S 的编时过去 $\mathrm{I}^-(S)$ 可对偶地定义.

注 由定义 5 和命题 11-1-3 可知 $\mathrm{I}^+(S)$ 为开集.

命题 11-1-4 设 $S\subset M$, $\bar{S}$ 代表 S 的闭包, 则 $\mathrm{I}^+(\bar{S})=\mathrm{I}^+(S)$.

证明 (A) 设 $q\in \mathrm{I}^+(S)$, 则 $\exists\, p\in S$ 使 $q\in \mathrm{I}^+(p)$. 但 $p\in S \Rightarrow p\in \bar{S}$, 故 $q\in \mathrm{I}^+(\bar{S})$. (B) 设 $q\in \mathrm{I}^+(\bar{S})$, 则 $\exists\, p\in\bar{S}$ 使 $q\in \mathrm{I}^+(p)$, 所以 $p\in \mathrm{I}^-(q)$. 因 $\mathrm{I}^-(q)$ 为开, 故 $\exists\, p$ 的开邻域 $O\subset \mathrm{I}^-(q)$, 见图11-5. $p\in\bar{S}\Rightarrow O\cap S\neq\varnothing$ (见第 1 章习题 12). 令 $r\in O\cap S$, 则 $r\in \mathrm{I}^-(q)$, 故 $q\in \mathrm{I}^+(r)\subset \mathrm{I}^+(S)$. □

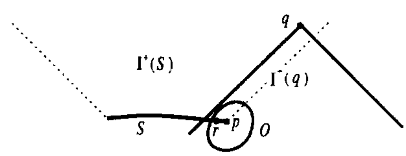

图 11-5 命题 11-1-4 证明(B)用图

命题 11-1-5 $\mathrm{I}^+[\mathrm{I}^+(S)]=\mathrm{I}^+(S)$.

证明 习题. □

定义 6 $\mathrm{J}^+(p) := \{q\in M \mid \exists$ 从 p 到 q 的指向未来因果线$\}$

称为 **p 点的因果未来**(causal future),

$$\mathrm{J}^+(p,U) := \{q\in U \mid \exists \text{从 } p \text{ 到 } q \text{ 的位于 } U \text{ 内的指向未来因果线}\}$$

称为 **p 点的相对于 U 的因果未来**. $\mathrm{J}^-(p)$ 和 $\mathrm{J}^-(p,U)$ 可对偶地定义.

注 p 点本身可看作一条曲线 $C(t)$ (把 $\mathbb{R}$ 的一个区间映为 $\{p\}\in M$ 的映射), 其在 p 点

的切矢 $(\partial/\partial t)^a=0$，因而是类光矢量，故 p 点可看作类光曲线，于是有 $p\in \mathrm{J}^+(p)$．但不能把 p 点看作类时曲线，所以一般来说 $p\notin \mathrm{I}^+(p)$．然而也有例外．例如，只要把 2 维闵氏时空中的直线 $t=0$ 和 $t=1$ 认同(图 11-6)，就存在从 p 经 a 回到 p 的类时曲线(是一条闭合的类时线)，从而有 $p\in \mathrm{I}^+(p)$．更有甚者，事实上这个人造时空的任一时空点都属于 $\mathrm{I}^+(p)$，即 $\mathrm{I}^+(p)=M$．

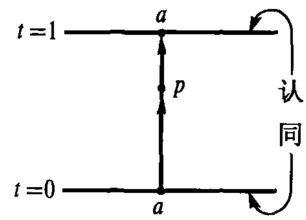

图 11-6　闭合类时线 pap

不难证明闵氏时空任一点 p 的 $\mathrm{J}^+(p)$ 是闭集(习题)．为此只须证明其补集为开集．然而一般时空未必如此．设 p 是闵氏时空的一点，把 $\dot{\mathrm{J}}^+(p)$ 的一点挖去(见图 11-7)，则 $r\notin \mathrm{J}^+(p)$，故 $r\in \mathbb{R}^4-\mathrm{J}^+(p)$．但 r 的任一邻域都与 $\mathrm{J}^+(p)$ 有交，故由定理 1-2-1 可知 $\mathbb{R}^4-\mathrm{J}^+(p)$ 不是开集，因而 $\mathrm{J}^+(p)$ 不是闭集．后面(§11.5)将看到，当时空满足一定条件(称为整体双曲条件)时，任一时空点 p 的 $\mathrm{J}^+(p)$ 都是闭集．

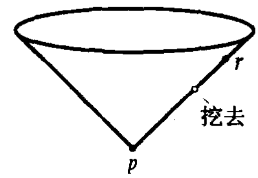

图 11-7　把 $\dot{\mathrm{J}}^+(p)$ 的一点挖去后 $\mathrm{J}^+(p)$ 不再是闭集

对闵氏时空作挖点和认同处理是相对论学者对许多貌似正确的伪命题举反例的惯用手法．这种做法虽然有人为性，但已足以证明在讨论时空因果结构时必须保持高度谨慎．事实上，本章讨论的时空 (M, g_{ab}) 多数并无物理意义，例如，我们并不在乎 g_{ab} 是否满足爱因斯坦方程．这是因为经验表明在人为例子中出现的现象往往也出现于真实时空中．

命题 11-1-6

(a) $p\in \mathrm{J}^+(q), q\in \mathrm{I}^+(r) \Rightarrow p\in \mathrm{I}^+(r)$．(可形象地表为“J + I = I”．)

(b) $p\in \mathrm{I}^+(q), q\in \mathrm{J}^+(r) \Rightarrow p\in \mathrm{I}^+(r)$．(可形象地表为“I + J = I”．)

证明　见 Penrose (1972)的 **2.18**.　□

在闵氏时空中，若 $q\in \mathrm{J}^+(p)$ 而 $q\notin \mathrm{I}^+(p)$，则由 p 到 q 的指向未来因果线必为类光测地线．这一结论其实对任何时空都成立，见如下命题：

命题 11-1-7　在任意时空中，若 $q\in \mathrm{J}^+(p)-\mathrm{I}^+(p)$，则由 p 到 q 的指向未来因果线必为类光测地线．

证明　见选读 11-1-1.　□

思考题　判断如下命题的真伪：若存在从 p 到 q 的指向未来类光测地线，则 $q\in \mathrm{J}^+(p)-\mathrm{I}^+(p)$．

答　命题为伪．图 11-8 便是反例：设 $\{t, x\}$ 是 2 维闵氏时空的洛伦兹坐标系，把竖直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 认同，令 $p=(0,0)$，$q=(2,0)$，则存在由 p 到 q 的类光测地线 $\lambda=\lambda_1\cup\lambda_2$，然而 $q\in \mathrm{I}^+(p)$，所以 $q\notin \mathrm{J}^+(p)-\mathrm{I}^+(p)$．

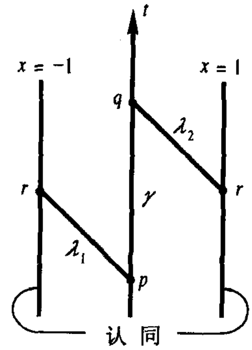

图 11-8　$q\in \mathrm{I}^+(p)$ 不排斥有类光测地线从 p 到 q

定义 7　M 的任一子集 S 的因果未来定义为