普通高等教育“十五”国家级规划教材
教育部高职高专规划教材

高等数学

线性代数

主编　张　全

GAODENGSHUXUE—XIANXINGDAISHU

中国财政经济出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材
教育部高职高专规划教材

高　等　数　学

线 性 代 数

张　全　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.线性代数/张全主编.—北京:中国财政经济出版社,2005
普通高等教育“十五”国家级规划教材.教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5005-8068-1

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.线性代数-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 024057 号

中国财政经济出版社出版

URL:http://www.cfeph.cn

E-mail:cfeph@cfeph.cn

社址:北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码:100036

发行电话:010-88190616 88190655(传真)

北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销

787×960 毫米 16 开 15 印张 242 000 字

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月北京第 1 次印刷

定价:19.00 元

ISBN 7-5005-8068-1/O·0034

(图书出现印装问题,本社负责调换)

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999 年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版 500 种，用 5 年左右时间完成。出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和专业主干课程。计划先用 2~3 年的时间，在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用 2~3 年的时间，

在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的，适合高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

前言

本书作为一本主要供高职高专学生使用的教材，其特点是用较少的篇幅，较浅的语言介绍线性代数的主要内容．为此，本书放弃了一些编写数学教材时一贯遵循的原则，如定义、定理的严格推理证明等等．一些大家都能理解的事情不去严格定义，一些定理仅用可以明显推广到一般情形的特例来加以说明．财经类学生学习线性代数，应该主要了解线性代数的思想，将线性代数作为一种思想方法，而不仅仅是一种计算工具．按照这个宗旨，本书不强调各种各样的计算技巧，而把主要注意力集中在线性代数各个部分概念的内在联系上．为了适应各类读者的需求，本书前三章基础知识部分采用主干精简但内容丰富的编写方法，很多内容是相对独立地“悬挂”在逻辑体系的主干上，使用本教材的教师可以有很大的选择空间．因此，本书不但可以作为高职高专的教材，也可以供本科学生作为学习线性代数基础部分的参考书．虽然三维空间是高维空间的背景材料，了解三维空间有助于学习n维向量空间．但是第一章的内容是独立的，后面章节只是偶尔将它的内容作为例子．使用本教材完全可以越过第一章而从第二章开始．

由于目前一些财经类院校学生在学习微积分

时没有系统地学习空间解析几何，所以我们将空间解析几何中的线性部分作为本教材的开始．这既可以使学生了解线性代数思想的发展，又可以使学生在学习抽象的 n 维线性空间时有一个直观的背景材料．正如姜伯驹先生所说："几何的看法常能使复杂的数学结构变得可以触摸或者一目了然．"给抽象的概念一个形象的比喻往往是理解抽象概念的最好方法．三维向量空间是一个直观的空间，其中的向量及其线性运算、线性关系可以看得见摸得着，很容易理解．

本书注重研究对象——向量、线性方程组、矩阵、行列式之间的内在联系．以 n 维向量空间为主线，而其他概念随着问题的展开逐渐引进．例如对矩阵的概念采用了"先使用再研究"的方式．在系统研究矩阵的运算与性质之前，矩阵已经作为研究向量组与线性方程组的工具在使用．随着计算机技术的发展，行列式的计算技巧日益脱离线性代数课程主干．本书对行列式的计算采取了淡化处理，将行列式的内容放在向量、线性方程组、矩阵之后，并且相对独立于整个逻辑体系之外，主要将其作为研究矩阵、线性方程组等的工具．

本书前三章由张全撰写，后两章由段生贵撰写，全书由张全总纂．

编者

2005 年 3 月

目录

第一章

三维空间的向量　平面与直线

内容提要

本章讨论三维空间的向量及其运算——向量加法、数乘向量以及内积，并且利用向量研究平面与直线以及它们之间的位置关系.

线性代数的主要研究对象 n 维向量是从三维向量的概念发展而来的，因此，了解直观的三维空间有助于更好地理解抽象的 n 维空间. 三维向量及其运算首先作为一个几何系统提出，经过空间直角坐标系建立向量的坐标后，转化为一个代数系统. 这两个系统之间保持着完全的一致性. 对一组三维向量位置关系的讨论为下一步研究 n 维向量组的线性关系提供了直观的背景材料. 而平面与直线对研究线性方程组提供了直观背景.

第一节
三维向量及其线性运算

在中学物理中讨论过一种既有大小又有方向的量，称为矢量，例如力、速度、位移等等. 在数学中这种量称为**向量**. 物理学中的矢量大多除了大小、方向外，还与起点（或作用点等）有关，而本书中讨论的向量与起点无关，即：大小相等、方向一致的向量被认为是相等的，而无论它的起点在哪里，这种向量称为**自由向量**. 通常用一个有向线段表示向量，有向线段的长

度表示向量的大小，称为**向量的模**（或**长度**），有向线段的方向表示向量的方向．以点 A 为起点、点 B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$，有时也用粗体字母表示三维向量，例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{r}$ 等等．向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示，$|\overrightarrow{AB}| = |AB|$（$|AB|$表示线段 AB 的长度）．模为 1 的向量称为**单位向量**，模为 0 的向量称为**零向量**，通常用 $\boldsymbol{o}$ 表示，零向量的方向被认为是任意的．如果两个向量的方向相同或相反，则称这两个向量**共线**，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$．零向量方向任意，因此认为零向量与任何向量共线．如果一组向量可以放到同一个平面上，则称这组向量**共面**．共线的向量一定共面．

一、向量的线性运算

1. 向量加法

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．（见图 1）例如$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$．称这种方法为**三角形法**．物理学中力的合成、位移的叠加就是向量加法的实际应用．用中学物理学中定义力的合成的平行四边形法也可以计算向量的加法，其结果是一致的．（见图 2）

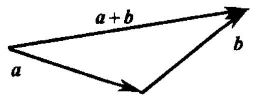


图 1

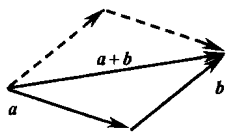


图 2

2. 数乘向量

k 是个实数，$\boldsymbol{a}$ 是个向量，依照下列方法定义的向量称为 k 与 $\boldsymbol{a}$ 的**数量乘积**，记作 $k\boldsymbol{a}$．

$k\boldsymbol{a}$ 的大小依下列规定：$|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$；其中 $|k\boldsymbol{a}|$ 表示 $k\boldsymbol{a}$ 的模，$|k|$ 表示 k 的绝对值，$|\boldsymbol{a}|$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的模．$k\boldsymbol{a}$ 的方向遵循下列规定：若 $k>0$，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，若 $k<0$，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反．若 $k=0$，依照模的规定，$k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$．

向量加法与数乘向量合称**向量的线性运算**．

$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_s$ 是一组向量，k_1，k_2，…，k_s 是一组实数，$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s$ 称为向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_s$ 的一个**线性组合**．如果存在一

组实数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s$，则称 $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_s$ **线性表示**或**线性表出**，其中 k_1，k_2，…，k_s 称为**组合系数**.

不难验证，向量的线性运算满足下列运算法则：

(1) 向量加法满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}; \tag{1}$$

这从图 2 中即可看出.

(2) 向量加法满足结合律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}); \tag{2}$$

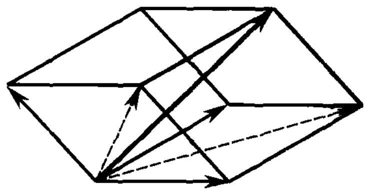


图 3

三个向量的和向量是以这三个向量为三条棱的平行六面体的体对角线（对顶线），而其中两个向量的和是它们所在的侧面的对角线，再与第三条棱相加即得到体对角线，这与相加的先后顺序无关.(见图 3)

零向量 $\boldsymbol{o}$ 在向量加法中有着特殊的地位，即：

(3) 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$; (3)

在三维空间全部向量的范围内，对于每一个向量，都一定存在一个和它大小相等，方向相反的向量，用一个数学表达式来表示，即：

(4) 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，一定存在一个向量 $\boldsymbol{b}$，使 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$; (4)

我们称这个向量 $\boldsymbol{b}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，用 $-\boldsymbol{a}$ 表示.

(5) 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$; (5)

(6) k，l 是任意两个实数，$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$ (6)

(7) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$; (7)

(8) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. (8)

这八条运算法则是线性运算最基本的法则. 看起来这些法则都是很显然的，有些甚至好象没必要，然而，人们通过长期实践观察，发现这八条法则每一条都是独立的，即其中任何一条都不能用其他几条推导出来，而线性运算的全部性质都可以利用这八条法则推导出来，但是如果缺少其中任何一条则有些性质就不能推导出来. 因此，在线性代数中，这八条法则称为**线性运算公理系统**，它是线性代数的理论基础. 除这八条法则外，线性运算还满足下列几条主要性质：

零向量的惟一性——在全部三维向量中，只存在惟一一个零向量.

负向量的惟一性——任意向量只有惟一一个负向量.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$； (9)

对于任意实数 k，$k\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$； (10)

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$； (11)

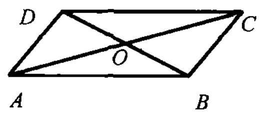
如果 $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$，那么，$k=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ 中至少有一个成立（称为消去律）. (12)

规定 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，因此，向量的减法不被看作是个独立的运算. 不难看出，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是将 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起后，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量.

例 1 用向量证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证明：如图，设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于 O 点，因为 O 点平分 AC、BD，所以向量

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$$



又 $$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$$

所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$（向量相等包括：长度相等，方向一致）.

即：四边形 $ABCD$ 的一组对边平行且相等，$ABCD$ 是平行四边形.

从这个例子可以看出，用向量处理几何问题往往非常简练.

二、向量的共线与共面

定理 1.1（数轴原理）如果向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充分必要条件是：存在惟一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明：由数乘向量的定义，充分性是显然的. 下面证明必要性：

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，取 λ 满足：$|\lambda|=\dfrac{|b|}{|a|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，$\lambda=|\lambda|$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，$\lambda=-|\lambda|$.

用数乘向量的定义可以验证，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 λ 的惟一性：如果存在 λ_1，λ_2，使 $\lambda_1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\lambda_2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则有 $\lambda_1\boldsymbol{a}-\lambda_2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$，即 $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$（由向量线性运算的基本法则 7）. 由消去律，因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$，所以 $\lambda_1-\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$.

这个定理也可以这样叙述：一条直线上的所有向量都可以被这条直线上的一个非零向量线性表出，并且，表示方法是惟一的. 这个定理是建立数轴的理论基础.

推论　向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是：存在不全为零的实数 λ_1，λ_2，使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$$

证明：若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是零向量，结论成立．如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$，由定理 1.1 立得．

过去我们熟悉的数轴是：在一条直线上取定一个坐标原点 O 与单位长度 1，直线上任意一点 P 对应惟一一个实数 x（称为 P 点的坐标），x 的绝对值等于线段$\overline{OP}$的长度（或 P 点到 O 点的距离），当 P 点在 O 点右侧时 x 为正，当 P 点在 O 点左侧时 x 为负．

下面我们利用定理 1.1 建立数轴上的点与实数的对应法则：

$\boldsymbol{i}$ 是个与直线 l 平行的单位向量，O 是 l 上一定点，P 是直线 l 上任意一点，做向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{i}$ 共线并且 $\boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{o}$，所以存在惟一一个实数 λ，使 $\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{i}$，$\lambda$ 即 P 点的坐标．（图 4）

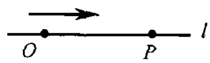


图 4

将定理 1.1 推广到平面，我们有

定理 1.2　平面上所有向量可以被这个平面上两个不共线的向量线性表出，并且表示方法是惟一的．

证明：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是平面 Π 上两个不共线的向量，（因为零向量与任何向量共线，所以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都不会是零向量），$\boldsymbol{c}$ 是平面 Π 上任一向量．设 $\boldsymbol{c}$ 的起点为 O，终点为 P，即 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OP}$．将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的起点放在 O 点．从 P 点做两条直线 l_1，l_2 分别平行于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所在直线．因为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，并且 P 点在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所在的平面上，所以 l_2 一定与 $\boldsymbol{a}$ 所在直线相交，设交点为 A；l_1 一定与 $\boldsymbol{b}$ 所在直线相交，设交点为 B．四边形 $OAPB$ 是平行四边形，OP 是它的对角线，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$．因为 $\overrightarrow{OA}//\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}//\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都不是零向量．由定理 1.1 知，存在惟一一组实数 k_1，k_2，使得 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$．

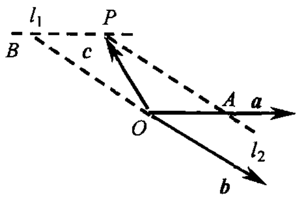


图 5

推论 1　三向量共面的充分必要条件是：其中一个向量可以被其余向量线性表出．

证明：充分性显然．必要性：设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，由定理 1.1，结论成立．如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，由定理 1.2，结论成立．

推论 2 三向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是：存在不全为零的实数 λ_1，λ_2，λ_3，使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}.$$

向量的共线与共面统称为线性相关．一般地，如果存在不全为零的实数 λ_1，λ_2，…，λ_s，使 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{a}_s=\boldsymbol{o}$，则称向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_s$ 线性相关，否则称为线性无关．不难得到一组向量线性相关的充分必要条件是：其中一个向量可以被其余向量线性表出．

请读者试着证明以下定理．（参考图 3）

定理 1.3 空间任意向量可以被三个不共面的向量线性表出，并且表示方法是惟一的．

推论 三维空间任意四个或更多向量线性相关．

第二节
向量的坐标

一、空间直角坐标系

在空间选定一点 O 作为坐标原点，以 O 点为起点做三条相互垂直的数轴，分别为 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴（简称 x 轴，y 轴，z 轴），就构成一个**空间直角坐标系**，记这个坐标系为 $[O;\ x,\ y,\ z]$．让这三条轴的排列顺序依照**右手法则**，即令右手拇指竖起指向 Oz 轴的正向，其余四指伸开指向 Ox 轴正向，然后旋转弯曲 $\frac{\pi}{2}$ 指向 Oy 轴正向．（也可以令右手的拇指、食指、中指相互垂直，它们依次指向 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的正向）这个坐标系称为**右手系**．坐标系中的每两条轴确定一个平面，分别称为 **XOY 坐标面、YOZ 坐标面、XOZ 坐标面**．P 是空间一点，过 P 点分别做与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴垂直的平面，每个平面与坐标轴有一个交点，与 Ox 轴的交点对应实数 a、与 Oy 轴的交点对应实数 b、与 Oz 轴的交点对应实数 c，则三元有序数组 $(a,\ b,\ c)$ 称为 P 点的**坐标**（见图 6）．空间每一个点都对应一组坐标，不同点的坐标不相同．反之，任给一个三元有序数组 $(a,\ b,\ c)$，在 Ox 轴上选定实数 a 所对应的点，在 Oy 轴上选定实数 b 所对应的点，在

Oz 轴上选定实数 c 所对应的点，分别过这三个点做与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴垂直的平面，这三个平面两两垂直，因此，有惟一一个交点，三元有序数组 (a, b, c) 就是这个交点的坐标．不同的三元有序数组对应的交点也不相同．所以，在空间建立一个直角坐标系后，空间的点与它的坐标即三元有序数组 (a, b, c) 之间存在一一对应关系．我们通常记坐标为 (a, b, c) 的点 P 为 $P(a, b, c)$．

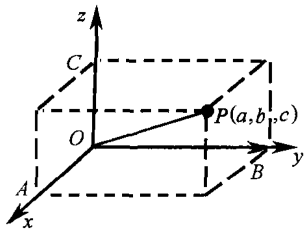


图 6

二、向量的坐标

$\boldsymbol{r}$ 是个向量，在空间建立直角坐标系 $[O; x, y, z]$，将 $\boldsymbol{r}$ 的起点放到坐标原点 O，设 $\boldsymbol{r}$ 的终点为 P，即 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$，若 P 点坐标为 (a, b, c)，则定义三元有序数组 (a, b, c) 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记作 $\boldsymbol{r} = (a, b, c)$．（注意：向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标与点 P 的坐标表示方法不同，分别为：点 $P(a, b, c)$ 与向量 $\overrightarrow{OP} = (a, b, c)$．）

以上是用通常的方法定义向量的坐标．为了进一步研究向量，下面用单位向量的观点定义向量的坐标．

以空间一点 O 为起点，做三个相互垂直（两两垂直）的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，这三个向量的顺序符合右手法则，即构成一个空间直角坐标系，记作 $[O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$．（图 7）$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 称为这个坐标系的**基向量组**，简称**基**．由于它们相互垂直并且都是单位向量，所以称为**标准正交基**．将向量 $\boldsymbol{r}$ 分解为三个向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 之和，

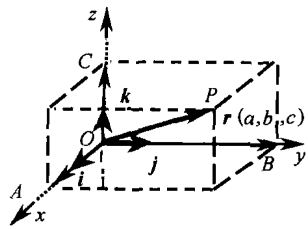


图 7

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

其中 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 分别与 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 共线，由定理 1.3，这个分解式是惟一的．而由定理 1.1，存在惟一一个三元有序数组 (a, b, c)，使

$$\overrightarrow{OA} = a\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OB} = b\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OC} = c\boldsymbol{k}$$

即

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} \tag{1}$$

三元有序数组（a，b，c）称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记作

$$\boldsymbol{r}=(a,\ b,\ c) \tag{2}$$

(2) 式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标表达式**，而（1）式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**分量表达式**，其中 $a\boldsymbol{i}$、$b\boldsymbol{j}$、$c\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的第一、第二、第三**分量**. 对照图 6、图 7，显然对于同一个向量，两种定义是一致的. 而采用第二种定义，下面我们将看到，等式

$$\boldsymbol{r}=(a,\ b,\ c)=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k} \tag{3}$$

有着非常重要的作用.（注意：点的坐标与坐标系的原点有关，而自由向量的坐标与坐标系的原点无关. 事实上，用上述方法建立坐标系与定义向量的坐标并不需要坐标原点，今后我们经常记坐标系 $[O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$ 为 $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$）.

例 1 $\boldsymbol{i}=(1,\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{j}=(0,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{k}=(0,\ 0,\ 1)$；$\boldsymbol{o}=(0,\ 0,\ 0)$.

三、用坐标进行向量运算

向量加法：设 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为（a_1，a_2，a_3），$\boldsymbol{b}$ 的坐标为（b_1，b_2，b_3），则

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k};\quad \boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由（1）式，（a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3）就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标.

数乘向量：$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k}$；

$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$就是 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标.

因此，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$； (4)

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1,a_2,a_3)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3) \tag{5}$$

向量的模（长度）：$\boldsymbol{r}=(a,\ b,\ c)$，将向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点放在坐标原点 O，设终点为 P，则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$，由图 7，$\boldsymbol{r}$ 的模 $|\boldsymbol{r}|$ 就是 P 点到原点的距离. 因为线段 OP 是以 OA，OB，OC 为三条棱的长方体的体对角线，所以

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \tag{6}$$

例 2 A 点坐标为（a_1，a_2，a_3），B 点坐标为（b_1，b_2，b_3），求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

解：因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，即$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，

而
$$\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3),\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$$

所以，$\overrightarrow{AB}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)=(b_1-a_1,b_2-a_2,\ b_3-a_3)$.

因为向量$\overrightarrow{AB}$的模等于A，B两点之间的距离，由此得到空间两点$A(a_1,a_2,a_3)$、$B(b_1,b_2,b_3)$之间的距离公式：

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} \tag{7}$$

四、向量的方向角与方向余弦

首先定义两向量之间的**夹角**：将向量的起点放在一起，将$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$看成两条边，就形成两个角，规定其中不超过π的那个角为向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$之间的夹角.记作$<\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}>$. 显然$0\leqslant<\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}>\leqslant\pi$. 将向量$\boldsymbol{r}$的起点放在空间直角坐标系的原点，用角$\alpha$，$\beta$，$\gamma$分别表示$\boldsymbol{r}$与$x$轴，$y$轴，$z$轴的夹角.即$\alpha=<\boldsymbol{r},\boldsymbol{i}>$；$\beta=<\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{j}>$；$\gamma=<\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{k}>$，数组（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$）称为向量$\boldsymbol{r}$的**方向角**.零向量不确定方向，因此零向量不确定方向角. 任何非零向量都有惟一一组方向角. 用向量的方向角可以表示向量的方向，但是，任意三个角不一定构成一组方向角，构成一组方向角的三个角之间应该满足的数量关系也不是很明显的，所以用方向角表示向量的方向很不方便. 向量的方向通常用方向余弦表示. 如果向量$\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{o}$，称（$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$）为$\boldsymbol{r}$的**方向余弦**，其中$\alpha$，$\beta$，$\gamma$是向量$\boldsymbol{r}$的方向角. 由于当$0\leqslant x\leqslant\pi$时，余弦函数$\cos x$单调，所以方向角与方向余弦一一对应. 如果$\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$，显然有

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|};\ \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}; \tag{8}$$

或
$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\ y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\ z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma. \tag{8$'$}$$

不难看出，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{9}$$

这也是一组数构成一个向量的方向余弦的充分必要条件. 如果将一个向量的方向余弦也看作是一个向量，显然它是与这个向量方向一致的一个单位向量. 如果$\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{o}$，用$\boldsymbol{r}^0$表示与$\boldsymbol{r}$方向一致的单位向量：

$$\boldsymbol{r}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}. \tag{10}$$

一个向量可以用其模与方向余弦表示为：