初中数学

知识精汇与应用技巧

（第二版）

方菁　等编

北京理工大学出版社

初中数学知识精汇与应用技巧

（第二版）

方　菁　翟　刚　方向明
朱青松　王　浩　丁文英　导编

北京理工大学出版社

(京)新登字 149 号

内 容 简 介

本书全面系统地帮助中学生学习、复习代数、几何知识。[知识要点]对教学大纲中要求学生掌握的知识进行了提炼概括;[示例]围绕基本概念的融汇贯通一步步展开;[应用]提供了灵活运用这些知识的机会。另外本书还附有 1991 年全国十个省市初中毕业及升学考试题和参考答案。

本书对广大中学生、中学生家长、中学数学教师具有重要的参考价值。

初中数学知识精汇
与应用技巧
(第二版)
方菁 等编
*
北京理工大学出版社出版发行
各地新华书店经售
北京外文印刷厂印刷
*
787×1092 毫米 32 开本 11.375 印张 288 千字
1992 年 12 月第二版 1993 年 8 月第四次印刷
ISBN 7—81013—652—6/G・158
印数:91601--97600 册 定价:4.95 元

第二版前言

《初中学科知识精汇与应用指导(技巧)》丛书,以中学各科教学大纲(修订本)为依据,以现行初中各科课本为基础编写而成。全套书有政治、语文、英语、数学、物理、化学等六分册。

各分册均把初中各学科的基础知识进行科学地归纳梳理,使之系统化、条理化。各章节的[知识要点]对需要着重领会的问题进行必要的说明和分析;[示例]通过剖析典型例题,对学习、应考中容易出现的差错,作了必要的提示;[应用]编选了适量的习题(附参考答案),这些习题典型性、针对性极强,可有效地训练学生活用基础知识的能力。为了更好地满足广大读者的需要,书中的"综合测试"部分精选1992年京、沪、津、闽、湘等十个省市的中考试卷(附参考答案),这些试题知识覆盖面广,题型灵活多样,可供初三学生应考模拟测试用。

本丛书数学分册的"代数"部分由方菁编写,"几何"部分由翟刚编写,"综合测试"的试题由方向明、朱青松、王浩、丁文英收集、选编。

限于水平和经验,本丛书一定会有不足之处,欢迎广大读者给予批评指正。

编者 1992年9月

目　　录

第一部分　代数

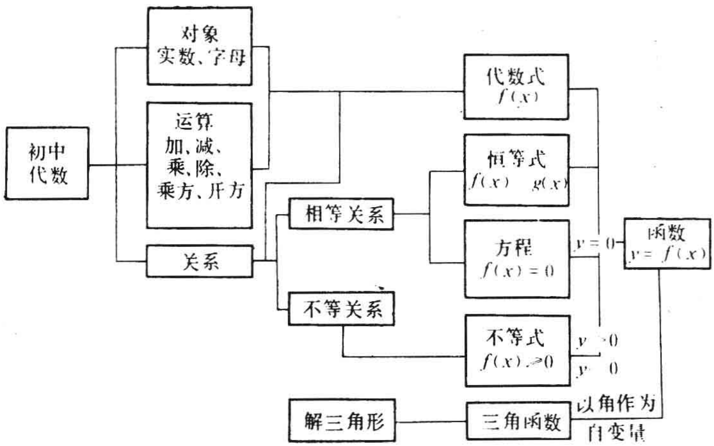
第二部分　平面几何

第三部分　综合测试

第一部分 代 数

初中代数所研究的对象是由全体实数和表示实数的字母组成；主要研究被研究对象之间的运算，如加、减、乘（包括乘方）、除、开方等等；还要研究对象间的关系，一般有相等关系和不等关系. 初中代数的基本结构可用表 1－1 所列结构框图表示。

表 1-1



从结构框图可以看出，初中代数可以分为四部分：一、数与式；二、方程与方程组；三、函数与不等式；四、解三角形. 而学习代数式、方程、一元一次不等式是学习函数的基础. 直角坐标系的建立不仅使数形更紧密地结合，还使变数进入数学，运动进入数学，辩证法进入数学. 可以用函数观点重新认识

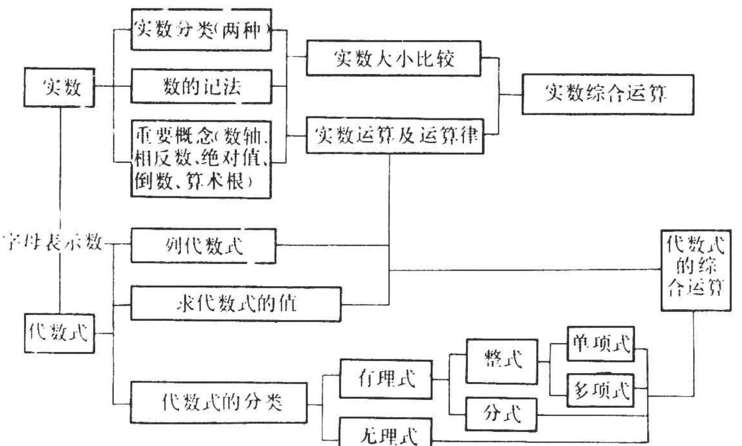
数、式、方程与不等式，把它们统一到函数概念之中.三角函数则是以角作为自变量的函数.

一、数与式

实数与代数式的运算是初中代数的基础.

本章知识结构框图如表 1—2 所列.

表 1-2



本章的重点是实数的有关重要概念、实数运算及运算律、整式的因式分解、整式、分式、根式的运算等.

本章的难点是绝对值、算术根的概念、用字母表示数以及实数、代数式的综合运算.

本章是初一、初二学习的重点内容，在中考中占较大比重，从北京近几年中考来看，考查实数与代数式(包括指数与

对数)内容的题目一般占中考试卷的20%~24%,重点考查相反数、倒数、绝对值、算数根等概念及整式的因式分解,整式、分式、根式的运算等. 另外在考查其它类型的题目(如解方程)时也要用到数、式的基本内容(如因式分解).

(一)实数

[知识要点]

1. 实数的有关概念

(1)实数的分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{正无理数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

实数一般按照上述两种方法分类,但具体问题应具体分析.

(2)数轴:规定了原点,正方向和单位长度的直线叫做数轴.

数轴上所有点与全体实数是一一对应的.

(3)相反数:实数 a 和 $-a$ 互为相反数;零的相反数仍旧是零.若实数 a 和 b 互为相反数,则有 $a+b=0$.

(4)绝对值:一个正实数的绝对值是它本身;一个负实数的绝对值是它的相反数;零的绝对值是零.

一个数的绝对值的几何意义是在数轴上表示与它所对应的点到原点的距离.

(5)倒数:1 除以一个数的商,叫做这个数的倒数;零没有倒数.

(6)实数比较大小:在数轴上表示的两个实数,右边的总比左边的大.

正数都大于零;负数都小于零;正数大于一切负数;两个负数,绝对值大的反而小.

2. 实数的运算

(1)实数的运算:(略)

(2)运算定律:

①加法交换律　$a+b=b+a$

②加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

③乘法交换律　$ab=ba$

④乘法结合律　$(ab)c=a(bc)$

⑤分配律　$a(b+c)=ab+ac$

$$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$$

(3)运算顺序:

①按照第三级运算(乘方、开方),第二级运算(乘、除),第一级运算(加、减)的顺序进行运算.

②有括号时,按照小括号,中括号,大括号的顺序进行运算.

[示例]

1. 比较 a 与 $\frac{1}{a}$ 的大小。

解：当 $a<-1$ 时，　$a<\frac{1}{a}$

　当 $a=-1$ 时，　$a=\frac{1}{a}$

　当 $-1<a<0$ 时，$a>\frac{1}{a}$

　当 $a=0$ 时，$\frac{1}{a}$ 无意义

　当 $0<a<1$ 时，$a<\frac{1}{a}$

　当 $a=1$ 时，$a=\frac{1}{a}$

　当 $a>1$ 时，$a>\frac{1}{a}$

提示：此例需要把实数分为七类情况进行讨论，如何确定分类方法？一般应找具有特殊性质的数：$a=0$ 时，$\frac{1}{a}$ 无意义；$a=\pm 1$ 时，$a=\frac{1}{a}$；则 $-1, 0, +1$ 所对应的点把数轴分成四部分，然后在数轴上由左向右分七类情况进行讨论. 试一试比较 $a-2$ 与 $(a-2)^2$ 的大小，应如何分类讨论.

2. 如图 1－1 所示，O 为原点，实数 a、b、c 在数轴上分别用点 A、B、C 表示，化简 $|b|-|a-c|+|a+b|-2|b|$.

解：由图 1-1 可知

$a<0, b<0, c>0$

$\therefore\quad a-c<0,$

$\qquad a+b<0$

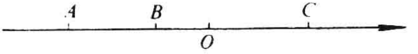


图 1－1

$\therefore\quad |b|-|a-c|+|a+b|-2|b|$

$=-b-[-(a-c)]+[-(a+b)]-2(-b)$

$=-b+a-c-a-b+2b$

$=-c$

提示:此例主要利用数形结合思想,由点在数轴上的位置,判断它对应实数的正负,再根据绝对值的概念逐一化简.

3. 计算:$1\frac{2}{3}-\{5\frac{3}{4}-2^2\div[(\frac{1}{2})^2+3\times(-\frac{3}{4})]\times\frac{1}{8}\}$

错解:原式$=1\frac{2}{3}-\{5\frac{3}{4}+4\div(\frac{1}{4}-\frac{9}{4})\times\frac{1}{8}\}$

$=1\frac{2}{3}-\{5\frac{3}{4}+4\div(-2)\times\frac{1}{8}\}$

$=1\frac{2}{3}-\{5\frac{3}{4}-16\}$

$=1\frac{2}{3}-10\frac{1}{4}$

$=-8\frac{7}{12}$

辨析:此例误把-2^2按照$(-2)^2=4$计算;在计算$4\div(-2)\times\frac{1}{8}$时,没有注意运算顺序,先做$(-2)\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$,再做$4\div(-\frac{1}{4})=-16$;大括号前是"$-$"号,在去括号时忘记变号.这三类错误是平时学生最易犯的错误,应引起注意.

正解:原式$=1\frac{2}{3}-[5\frac{3}{4}-4\div(\frac{1}{4}-\frac{9}{4})\times\frac{1}{8}]$

$=1\frac{2}{3}-[5\frac{3}{4}-4\div(-2)\times\frac{1}{8}]$

$=1\frac{2}{3}-[5\frac{3}{4}+\frac{1}{4}]$

$=1\frac{2}{3}-6$

$=-4\frac{1}{3}$

[应用]

1. 填空：

(1) 0 的相反数是 __0__，$3.14-\pi$ 的绝对值是 __$\pi-3.14$__，$\sqrt{3}-2$ 的倒数是 __$-\sqrt{3}-2$__

(2) 若 $x<-2$，则 $|3-x|-|2x+1|+|x+2|=$ __1__；

(3) 比较大小： $-\sqrt{3}$ __$<$__ -1.7，

$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ __$<$__ $2+\sqrt{3}$.

2. 计算：$(-3)^2(-2)^3\div4\div2+\sqrt{(-2)^6}\div(-4)\times2$

3. 化简：$|3a+1|+|2a-1|$.

＜参考答案＞

1. (1) 0，$\pi-3.14$，$-(\sqrt{3}+2)$；(2) 2；(3) $<$，$<$.

2. -13.

3. 当 $a\leqslant-\frac{1}{3}$ 时，原式 $=-5a$； 当 $-\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，原式 $=a+2$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，原式 $=5a$.

（二）整式

[知识要点]

1. 代数式的有关概念

(1) 代数式：用运算（加、减、乘、除、乘方、开方）符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式. 用数代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值.

(2) 有理式：只含有加、减、乘、除、乘方运算（包含数字开方运算）的代数式，叫做有理式.

(3) 无理式：含有关于字母开方运算的代数式，叫做无理式.

(4) 整式：除式中不含有字母的有理式叫做整式.

2. 整式的运算

(1)幂的运算法则:(m,n 都是正整数)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m > n)$

(2)乘法公式:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

(3)整式的加减:(略)

(4)整式的乘除:(略)

3. 因式分解

(1)因式分解定义:把一个多项式化成几个整式的积的形式,叫做多项式的因式分解.

分解因式要注意在什么数的范围内进行,一般若题目没有写要求,专指在有理数范围内分解.

因式分解要分解到每个因式都不能再分为止,若有重因式,写成幂的形式.

多项式所分成的因式必须是整式.

(2)因式分解的方法:

①提取公因式法:$ma + mb + mc = m(a+b+c)$

②应用乘法公式法:(略)

③二次三项式的因式分解:一般用十字相乘法、配方法、利用求根公式分解因式.

④分组分解法:分组以后提出各组的公因式或应用乘法公式进行分解.

［示例］

1. 已知 $A=x^3-2x^2+x-4, B=2x^3-5x-4$

求 $A-2B$

解：$A-2B=(x^3-2x^2+x-4)-2(2x^3-5x-4)$

$=x^3-2x^2+x-4-4x^3+10x+8$

$=-3x^3-2x^2+11x+4$

提示：括号前是负数，在去括号时不要忘记变号.

2. 计算 $(x+y-z)(x-y-z)-(x-y-z)^2$

解 1：原式 $=(x-z)^2-y^2-[(x-z)^2-2y(x-z)+y^2]$

$=(x-z)^2-y^2-(x-z)^2+2y(x-z)-y^2$

$=-2y^2+2y\quad(x-z)$

$=2xy-2yz-2y^2$

解 2：原式 $=(x-y-z)[(x+y-z)-(x-y-z)]$

$=(x-y-z)2y$

$=2xy-2yz-2y^2$

提示：解 1 是把 $x-z$ 视为一个整体，利用乘法公式进行计算，这实质是利用"换元"思想；解 2 是利用提取公因式达到化简的目的.

3. 分解因式 $a(x-y)+(ay-ax)y$

解：原式 $=a(x-y)-a(x-y)y$

$=a(x-y)(1-y)$

提示：在提取公因式前，需调整正负符号；当多项式中的某一项被当做公因式提出时，提出后这项的位置上是 1.

4. 分解因式 $1-x^2-2xy-y^2$

解：原式 $=1-(x^2+2xy+y^2)$

$=1-(x+y)^2$

$=(1+x+y)(1-x-y)$

提示:对于多于三项的多项式,一般应考虑使用分组分解法进行,要抓住题目的特点进行分组,关键使所分各组之间有公因式可以提出或能应用乘法公式进行分解。在添、去括号时注意符号的变化.

5.已知多项式 x^3-kx+6 有一个因式是 $x+3$,当 k 为何值时,能分解成三个一次因式的积?并将它分解出来.

解:设 $x^3-kx+6=(x+3)(x+a)(x+b)$

$\therefore\quad x^3-kx+6\equiv x^3+(a+b+3)x^2+(3a+3b+ab)x+3ab$

$$\therefore\quad \begin{cases} a+b+3=0 \\ -k=3a+3b+ab \\ 6=3ab \end{cases}$$

$$\text{解得:}\begin{cases} k=7 \\ a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} k=7 \\ a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $k=7$ 时,多项式 x^3-kx+6 能分解成三个一次因式的积,分解成 $(x+3)(x-2)(x-1)$.

提示:此例先假定一个含有待定的系数的恒等式,根据“多项式相等,必须对应项的系数相等”,再列出方程组,并解这个方程组,可以求得待定的系数值,这就是待定系数法.

6.计算 $(a+2b)^2-4b(a+b)$

错解:原式 $=a^2+4b^2-4ab+4b^2$

$=a^2-4ab+8b^2$

辨析:此例第一个错在使用完全平方公式时,缺少中间项;第二个错在 $-4b(a+b)=-4ab+4b^2$ 即去括号时,第二项没有变号,这两类是学生常常出现的错误,应加以注意.

正解:原式 $=a^2+4ab+4b^2-4ab-4b^2$

$=a^2$