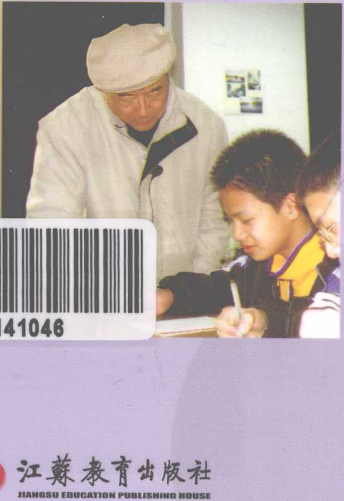
单墫数学科普著作集
上海科普创作出版专项基金资助出版

单墫老师教你学数学

覆盖

单墫◎著

当读书不只是为了考试
你才会真正爱上数学
单墫老师娓娓道来
与你分享他所理解的数学之美



华东师范大学出版社 江蘇教育出版社 JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

单墫数学科普著作集
上海科普创作出版专项基金资助出版

单墫老师教你学数学

覆盖

单墫◎著

华东师范大学出版社　江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

覆盖/单墫著.—上海:华东师范大学出版社,2010
(单墫老师教你学数学)
ISBN 978-7-5617-8048-0

Ⅰ.①覆… Ⅱ.①单… Ⅲ.①代数课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.623

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第171452号

单墫老师教你学数学

覆盖

著　　者　单　墫
策划组稿　倪　明　孔令志
审读编辑　孔令志
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真　021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话　021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　上海崇明裕安印刷厂
开　　本　890×1240　32开
印　　张　4.5
字　　数　105千字
版　　次　2011年3月第一版
印　　次　2011年8月第二次
书　　号　ISBN 978-7-5617-8048-0/G·4704
定　　价　13.00元

出 版 人　朱杰人

总　序

科学昌明,既需要科学家筚路蓝缕、披荆斩棘,也需要普及工作者耕耘播种、热心培育.

普及工作很重要.如果将科学研究比作金字塔的塔尖,那么普及工作就是金字塔的底.底宽,塔才高.

科学研究不容易.从事研究,需要才能、努力与机遇.能够从事研究的人不多,好像阳春白雪,曲高和寡.他们的成果需要普及工作者通俗化、趣味化,才能广为人知,才能使更多的人关心、了解、理解,才能引起公众的兴趣,吸引更多的新人一同参加研究.Fermat 大定理就是一个典型的例子.虽然只有 Wiles 一个人给出了证明,看懂证明的不过十几个人或几十个人,但对大定理感兴趣的人成千上万.他们都是普及读物的读者.

普及工作使千万人受益,我就是其中之一.

在学生时代,我读过不少数学普及读物.如刘薰宇的《数学园地》,孙泽瀛的《数学方法趣引》,许莼舫的《几何定理和证题》,Casey 的《近世几何学初编》,日本数学家林鹤一的《初等几何作图不能问题》、上野清的《大代数讲义》,前苏联数学家写的数学丛书《摆线》、《双曲线函数》等,以及稍后中国数学家华罗庚等写的数学丛书《从杨辉三角谈起》等.还在《科学画报》上看到谈祥柏先生写的妙趣横生的文章《奇妙的联系》等.这些数学读物不仅使我学到许多数学知识、方法和思想,眼界大开,而且使我对数学产生了浓厚的兴趣,甚至立志要当一名数学家.

但当数学家的梦想却难以实现.因为那时政治运动频仍.读书,被认为"走白专道路",会横遭批判.史无前例的文化大革命

更是书与读书人的一场浩劫.

“四人帮”倒台后,我才有幸到中国科学技术大学作研究生.在1983年成为首批18名国产博士之一.但这一年我已年届不惑,从事数学研究的黄金时期业已过去.我觉得与其花费时间凑一些垃圾论文,不如做普及工作对社会更有贡献.

对普及工作,我有浓厚的兴趣,也有一定的基础:

1. 由于做过一些研究工作,能够了解较新的材料,能够较为准确地把握数学及有关史料.

2. 由于当过多年教师,文字也还通顺,能够注意趣味性与深入浅出.

1977年恢复高考后,一度出现读书的热潮.这时常庚哲先生带头写了《抽屉原则及其他》,受到普遍的好评.稍后,上海教育出版社的王文才、赵斌两位编辑邀我写稿,我就写了《几何不等式》、《趣味的图论问题》,在1980年出版.以后又陆陆续续写了《覆盖》、《组合数学中的问题和方法》、《趣味数论》、《棋盘上的数学》、《解析几何中的技巧》、《算两次》、《集合及其子集》、《组合几何》、《对应》、《国际数学竞赛解题方法》(与葛军合作)、《不定方程》(与余红兵合作)、《巧解应用题》、《因式分解》、《平面几何中的小花》、《数学竞赛史话》、《解题思路训练》、《十个有趣的问题》、《概率与期望》、《小学数学趣题巧解》、《快乐的数学》、《数列与数学归纳法》、《解题研究》、《数学竞赛教程》等等.

由于文革后,大家渴望读书.而此前的书大多毁于“文革”劫火.因此新出的书颇受欢迎,其中也包括了我写的小册子.

冯克勤先生说:“不要小看了这些小册子,它们将数学的美带给大众.”(冯克勤《评审意见》)

杨世明、杨学枝先生说:“直到1980年,大家才盼来单墫的《几何不等式》一书……不仅普及了基础知识、基本思想方法,而

且激发了研究兴趣.今天初等不等式研究中的许多骨干,都曾从该书获益.单墫的《几何不等式》一书,无疑是这一阶段的标志性的著作."(杨世明,杨学枝《初等不等式在中国》,载《中学数学研究》2007 年第 1 期).

还有一些数学教师见到我客气地说:"我们都是读您的书长大的."

这些评论当然是过奖的溢美之词,但也说明普及工作是一件有意义的、值得去做的事情.

近年来,急功近利的风气在学校蔓延.要根治这种歪风,还得提倡读书.要使广大青少年"热爱知识,渴求学问"(卡耐基《林肯传》,人民文学出版社,2005 版第 16 页).

首先,得多出一些好书,供大家阅读.

读书是天下第一件好事,读好书是人生第一件乐事,好读书,读好书,进步就迅速.有些学生学数学,只做题,从不看书.这种做法是难以进步的.

感谢华东师范大学出版社出版我的科普著作集.这 7 种小册子修订后,重新出版,希望能有较多的读者,特别是青少年读者.希望它们能给爱好数学的朋友们带来乐趣.

前　言

拿一张纸，剪出两个大小不等的圆，那么大圆一定能覆盖小圆. 也就是说，能把大圆放在小圆上面，将小圆完全遮盖住. 但是，一个小圆显然不能覆盖大圆，就是两个小圆也不能覆盖一个大圆. 我们必须有三个小圆才可能覆盖一个大圆，而且这三个小圆的半径还不能太小. 如果小圆的半径都是大圆半径的一半，那么六个这样的小圆还不能覆盖一个大圆，而要七个小圆才能覆盖一个大圆.

在一块凸平面形的地基上造起来的大厦，我们只要有四个方向的平行光线，就可以在晚间把大厦的各个侧面照亮. 要是大厦的横截面不是平行四边形，那就只要三个方向的光线就够了.

古城堡里有一块任意形状的广场，设立卫兵哨位时希望他能从哨位上看到广场的每一个角落，你知道可以设哨的区域是什么形状？本书将会告诉你，这个区域是一个凸形.

你觉得这些事有趣吗？你过去注意到这些事实吗？这些事似乎都比较直观，但从数学上加以证明就不像想象得那么容易了. 这本小册子将要围绕着这类问题引出许多数学知识，主题将是“覆盖”. 这些知识大体上属于“组合几何学”的范围，它们是中学生能够理解的. 它的许多问题也是中学生能够解决的. 通过对一些著名问题的剖析和精巧的典型方法的介绍，我们希望能够使读者的能力得到提高，并了解一些有用的数学知识.

目 录

1

覆　盖

在前言中已经提到圆的覆盖问题. 圆是最简单而又用得最多的图形. 为了明确起见,在本书中,我们把到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合称为圆周. 把圆周及其内部,也就是到定点 O 的距离 $\leqslant r$ 的点的集合称为圆,并记为 $\odot(O, r)$ 或 $\odot O$, O 称为圆心, r 称为半径. 同样地,本书中说到的三角形、多边形、椭圆,也都是同时包括了这些图形的边界及其内部的,而不单是指围成这些图形的边界.

在本书中要遇到的图形是多种多样的,它们都是点的集合(点集).

现在我们给出覆盖的严格的定义.

定义 1 ……………………………………………

设 M、N 是两个点集,如果点集 M 的每一个点都属于点集 N(采用集合论的符号写,就是 $M \subset N$),那么我们就说点集 N 覆盖(包含)点集 M. 如果点集 M 的点不全属于点集 N,那么我们就说点集 N 不覆盖(不包含)点集 M.

点集 N(不)覆盖点集 M,也常常说成点集 M(不)被点集 N 覆盖.

我们举两个简单的例子.

如果点集 M 由一个点 O 组成,点集 N 为 $\odot(O, r)$. 圆显然

覆盖自己的圆心，所以点集 N 覆盖点集 M.

如果点集 M 为$\odot(O, r_1)$，点集 N 为$\odot(O, r_2)$，$r_2 \geqslant r_1$，即点集 M、N 是同心圆，那么点集 N 覆盖点集 M. 这是因为点集 M 的任一点 A 到圆心 O 的距离 $OA \leqslant r_1$，但是 $r_1 \leqslant r_2$，所以 $OA \leqslant r_2$. 这就是说 A 属于点集 N（图 1.1）.

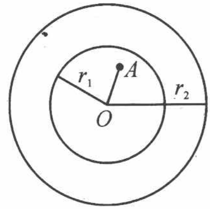


图 1.1

如果 M 覆盖 N，N 又覆盖 M，那么 M、N 就是完全相同的图形了. 这一点从直观上看很显然，它和集合论中“$M \subset N$ 及 $N \subset M \Leftrightarrow M = N$”是一回事.

在本书中，更常用的是下面的定义 2. 请注意它与定义 1 不同的地方.

定义 ❷ ……………………………………

M、N 都是平面点集，如果能经过一个适当的运动，使得点集 N 成为点集 N_1，而 N_1 覆盖点集 M，那么我们就说点集 N 能覆盖点集 M. 如果不存在上述的运动，那么我们就说点集 N 不能覆盖点集 M.

这里所说的运动是指平移（平行移动）、绕一个定点的旋转、轴对称（反射）或者它们的有限多次的组合. 显然一个点集 N 经过运动后得到的点集 N_1 与原来的点集 N 除了位置不同外，是完全一样的（即图形 N 与 N_1 合同）.

点集 N 能（或不能）覆盖点集 M，也常常说成点集 M 能（或不能）被点集 N 覆盖.

“能覆盖”与“覆盖”不是完全相同的概念. 但是为了简便起见，在不致混淆的时候，我们对定义 2 中的点集 N_1 与 N 不加严格区分，并且常常将点集 N_1 也记作 N.

下面的例 1 是在前言中已经提过的问题.

例 1

已知 $M_1=\odot(O_1, r_1)$, $M_2=\odot(O_2, r_2)$ $(r_2>r_1)$，是两个大小不等的圆，证明圆 M_2 能覆盖圆 M_1，而圆 M_1 不能覆盖 M_2.

解 平移圆 M_2，使得圆心 O_2 与 O_1 重合，则圆 $M_2'=\odot(O_1, r_2)$ 与圆 $M_1=\odot(O_1, r_1)$ 是同心圆. 因为 $r_1<r_2$，所以圆 M_2' 覆盖圆 M_1，也就是圆 M_2 能覆盖圆 M_1.

其实，要证明圆 M_2 能覆盖圆 M_1，并不一定非要使圆心 O_2 与 O_1 重合不可. 只要经过平移使点 O_2 与 O_1 之间的距离 $\leqslant r_2-r_1$ 就可以了. 因为这时对于圆 M_1 的任一点 A，有 $O_1A\leqslant r_1$，从而(参见图 1.2)

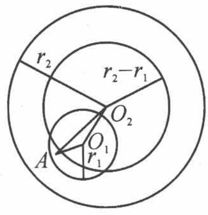


图 1.2

$$O_2A\leqslant O_1A+O_1O_2\leqslant r_1+(r_2-r_1)=r_2,$$

因此 A 一定属于 $\odot(O_2, r_2)$，即圆 M_2 能覆盖圆 M_1.

这实际上就是说，我们可以将圆 M_1 与圆 M_2 的半径都减去 r_1，使 M_1 收缩为一个点 O_1(我们称它为点圆 O_1)，而 M_2 收缩为 $\odot(O_2, r_2-r_1)$，再由 $\odot(O_2, r_2-r_1)$ 显然覆盖点 O_1，导出原来的圆 M_2 能覆盖圆 M_1. 在覆盖问题中，这种收缩(或膨胀)是经常采用的一种方法，后面我们还会遇到.

现在来证明小的圆 M_1 不能覆盖大的圆 M_2. 虽然这个论断直观上很显然，但是证明却有点迂回.

第一种方法是比较两个圆的面积.

如果点集 N 能覆盖点集 M 时，那么由于 M 是 N 的子集，所以 N 的面积 $\geqslant M$ 的面积. 但

$$圆 M_1 的面积 \pi r_1^2 < 圆 M_2 的面积 \pi r_2^2,$$

所以圆 M_1 不能覆盖圆 M_2.

为了简便起见，本书中有时将点集 M 的面积也记作 M，例如 $\odot O$、$\triangle ABC$ 或 $\square ABCD$ 的面积也记作 $\odot O$、$\triangle ABC$ 或 $\square ABCD$.

第二种方法是比较两个圆的直径.

为了今后的应用，我们先给出一般点集的直径的定义.

定义 ❸ ……………………………………

把点集 M 中任意两点 A、B 的距离 AB 的最大值记为 d，即 $d = \max\{AB\}$. 如果 d 是一个有限数，那么称 d 是点集 M 的直径.

显然，当点集 M 为圆时，点集 M 的直径就是通常所说的圆的直径. 不难证明三角形的直径就是这个三角形的最长的边. 读者可以考虑一下弓形、扇形（或其他熟悉的图形）的直径是什么.

一个点集的直径不一定只有一条.

关于覆盖问题与直径的关系，有一个简单而实用的结论，即如果点集 N 能覆盖点集 M，那么由于 M 是 N 的子集，所以点集 M 的直径 $\leqslant$ 点集 N 的直径. 反过来，如果点集 M 的直径 $>$ 点集 N 的直径，那么 N 不能覆盖点集 M.

于是例 1 可有下面的解法：

因为上面所说的圆 $M_1 = \odot(O_1, r_1)$ 的直径 $2r_1$ 小于圆 $M_2 = \odot(O_2, r_2)$ 的直径 $2r_2$，所以圆 M_1 不能覆盖圆 M_2.

比较某种与集合相关联的量（如面积、直径等），从而导出一个集合不能覆盖另一集合，这也是覆盖问题中常常用到的一种方法.

下面的例 2 到例 4，是用圆覆盖其他点集的问题.

例 2

已知$\triangle ABC$,求出覆盖$\triangle ABC$的最小的圆.

解 显然$\triangle ABC$的外接圆覆盖$\triangle ABC$,粗看似乎这个圆就是覆盖$\triangle ABC$的最小的圆.其实这个结论并不完全正确.

我们分三种情况来讨论.

(1) $\triangle ABC$是钝角三角形.

以最长边$BC = a$为直径作$\odot O$.对属于$\triangle ABC$的任一点A',因为$\angle BA'C \geqslant \angle BAC > 90°$,所以$A'$在$\odot O$内,即$\odot O$覆盖$\triangle ABC$(图1.3(1)).

因为任意一个覆盖$\triangle ABC$的圆,它的直径不小于$\triangle ABC$的直径即$BC = a$,所以$\odot O$就是覆盖$\triangle ABC$的最小的圆.

在这一情况下,$\odot O$比$\triangle ABC$的外接圆小.因为$\angle BAC > 90°$,所以BC(即$\odot O$的直径)不会是外接圆的直径,从而小于外接圆的直径.

(2) $\triangle ABC$是直角三角形.

与(1)类似,以斜边$BC = a$为直径的圆是覆盖$\triangle ABC$的最小的圆.在这种情况下最小的覆盖圆就是$\triangle ABC$的外接圆(图1.3(2)).

(3) $\triangle ABC$是锐角三角形.

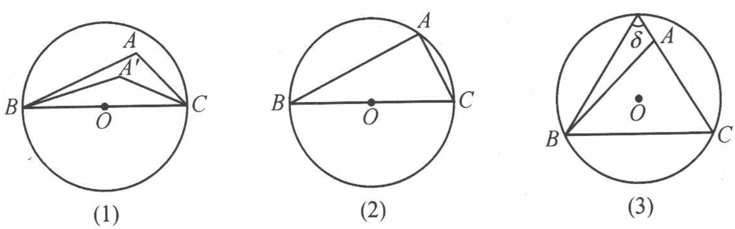


图 1.3

这时$\triangle ABC$的外接圆也是覆盖$\triangle ABC$的最小的圆. 这只要证明其他任何覆盖$\triangle ABC$的圆,都大于等于$\triangle ABC$的外接圆就行了. 因为如果$\odot O$覆盖$\triangle ABC$,将$\triangle ABC$在$\odot O$中适当地运动,总可以使得三角形有两个顶点,比如说B、C在圆周上. 详细些说,我们先在$\odot O$中平移$\triangle ABC$,使得一个顶点B被移到圆周上,然后再在$\odot O$中将$\triangle ABC$绕点B旋转,使得另一个顶点C也落到圆周上. 由于始终是在$\odot O$中运动,所以这时第三个顶点A在$\odot O$内或圆周上(图 1.3(3)). $\overset{\frown}{BC}$(劣弧)所对圆周角$\delta \leqslant \angle BAC < 90°$,因此$\odot O$的直径$= \dfrac{BC}{\sin\delta} \geqslant \dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = \triangle ABC$的外接圆的直径.

定义 4 ……………………………………………………

如果点集M能被一个圆覆盖,那么我们就说M是有界点集.

圆、三角形、多边形、椭圆都是有界点集,抛物线不是有界点集.

一般地,一条(不自身相交的)闭曲线及其内部是一个有界点集,我们把它叫做有界闭集.

定义 5 ……………………………………………………

设点集M是有界点集. 覆盖M的圆中最小的一个叫做M的最小覆盖圆. 最小覆盖圆的半径叫做点集M的覆盖半径.

设$\triangle ABC$的最大边$BC = a$,那么$\angle BAC \geqslant 60°$,所以综合例 2 的(1)、(2)、(3)可知$\triangle ABC$的覆盖半径ρ满足

$$\frac{a}{2} \leqslant \rho \leqslant \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

左边的等号当且仅当$\triangle ABC$为钝角或直角三角形时成立，右边的等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时成立. 上述右边不等式的详细推导留给读者. 这个不等式给出了三角形的覆盖半径的上下界.

n边形的最小覆盖圆与覆盖半径将在第三节中讨论. 对于正n边形，问题是很简单的，我们现在就可以解决它.

例 3

设正n边形$A_1A_2\cdots A_n$的边长为a，求它的覆盖半径.

解 我们证明正n边形$A_1A_2\cdots A_n$的外接圆$\odot O$就是它的最小覆盖圆. 证明$\odot O$是最小覆盖圆的通常步骤是：(1)$\odot O$是覆盖圆；(2)任何覆盖圆的半径$\geqslant\odot O$的半径. 我们就用这样的方法来证本题.

显然$\odot O$覆盖这个正n边形.

在n为偶数$2m$时，A_1A_{m+1}是$\odot O$的直径($\overparen{A_1A_{m+1}}$是半个圆周)，因此每个覆盖正n边形$A_1A_2\cdots A_n$的圆的直径$\geqslant A_1A_{m+1}=\odot O$的直径，即$\odot O$是最小覆盖圆.

在n为奇数$2m-1$时，易知$\triangle A_1A_mA_{m+1}$是等腰三角形，顶角为锐角：$\angle A_mA_1A_{m+1}=\dfrac{\pi}{2m-1}$，所以$\triangle A_1A_mA_{m+1}$是锐角三角形，根据例 2，它的最小覆盖圆是$\odot O$，因而正$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$的最小覆盖圆为$\odot O$.

总之，正n边形$A_1A_2\cdots A_n$的外接圆$\odot O$就是最小覆盖圆. 因此覆盖半径就是$\odot O$的半径r，易知

$$r=\frac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}.$$

例 4

设点集 M 由两个互不包含的$\odot(O_1, r_1)$及$\odot(O_2, r_2)$组成(用集合论的符号可以写成 $M = \odot(O_1, r_1) \cup \odot(O_2, r_2)$),求 M 的覆盖半径.

解 设直线 O_1O_2 交$\odot O_1$ 于 B_1、C_1,交$\odot O_2$ 于 B_2、C_2,并且 O_1、C_1、B_2、O_2 都在线段 B_1C_2 上(图 1.4). 以 B_1C_2 为直径作$\odot O$,我们证明这个圆就是最小覆盖圆,覆盖半径 $r = \frac{1}{2}B_1C_2$.

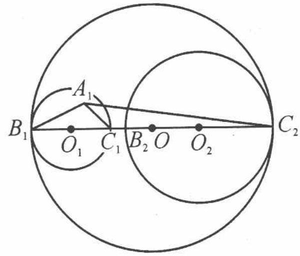


图 1.4

对于$\odot O_1$ 中任一点 A_1,连结 A_1B_1、A_1C_1、A_1C_2. 因为 B_1C_1 是$\odot O_1$ 的直径,所以 $\angle B_1A_1C_1 \geqslant 90°$,从而

$$\angle B_1A_1C_2 \geqslant \angle B_1A_1C_1 \geqslant 90°,$$

A_1 在$\odot O$ 中. 于是$\odot O$ 覆盖$\odot O_1$,同样$\odot O$ 覆盖$\odot O_2$,因此$\odot O$ 覆盖 M.

任何一个覆盖 M 的圆至少都要覆盖点 B_1、C_2,因而它的直径$\geqslant B_1C_2$,所以$\odot O$ 是最小覆盖圆.

容易看出在$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 外离、外切或相交时,r 大于、等于或小于 $r_1 + r_2$.

我们也可以考虑用三角形或多边形来覆盖圆.

例 5

证明在能覆盖$\odot(O, r)$的正 n 边形中,以$\odot(O, r)$的外切正 n 边形的边长为最小.

解 设正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 覆盖$\odot(O, r)$,则 O 到这 n 边形的每一条边的距离$\geqslant r$. 将这 n 边形的每边向内平移直至与

$\odot(O, r)$相切(即与 O 点的距离为 r),这样截得一个 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$(图 1.5). 我们先证明 $A_1'A_2'\cdots A_n'$也是一个正 n 边形.

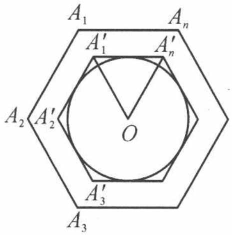


图 1.5

因为两个 n 边形的对应边平行,所以对应角相等. 由于正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的角全相等,所以 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$的角也全相等. 又因为 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$是$\odot(O, r)$的外切多边形,所以 $\angle OA_1'A_n' = \angle OA_1'A_2' = \angle OA_2'A_1' = \angle OA_n'A_1' = \frac{1}{2}\angle A_n'A_1'A_2'$, 从而 $\triangle OA_1'A_2' \cong \triangle OA_1'A_n'$, $A_n'A_1' = A_1'A_2'$. 同理可知 $A_1'A_2' = A_2'A_3' = \cdots = A_{n-1}'A_n'$. 因此 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 是$\odot(O, r)$的外切正 n 边形.

正 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$被正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 覆盖,因而它的面积不大于正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积. 从而它的边长也不大于正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长. 证毕.

我们可以证明比例 5 更强的结论,即在全体覆盖$\odot(O, r)$的 n 边形(不一定是正 n 边形)中,以这圆的外切正 n 边形的面积为最小.

例 6 * ……………………………………………………

设 n 边形 M 覆盖$\odot(O, r)$,M_n 为$\odot(O, r)$的外切正 n 边形,则面积 $M \geqslant M_n$.

解 我们把证明分两段,这里先假定 M 是一个凸多边形. 采用例 5 中的方法将 M 的各边向内平移,得到一个$\odot(O, r)$的外切多边形 M', M'是凸的,且面积 $M' \leqslant M$.

设$\odot(O, r')$是正 n 边形 M_n 的外接圆,M'的边截$\odot(O,$

---

* 打 * 号的例题难度较大,初次阅读时可以略去