"十二五"国家重点图书出版规划项目

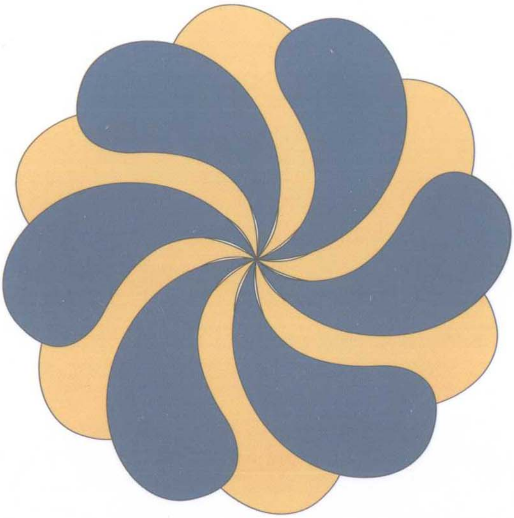
走向数学丛书

SCIENCE & HUMANITIES

复数、复函数及其应用

COMPLEX NUMBERS, COMPLEX FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

著 张顺燕



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

复数、复函数及其应用

COMPLEX NUMBERS, COMPLEX FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

著　张顺燕

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

续编说明

自从 1991 年“走向数学”丛书出版以来,已经出版了三辑,颇受我国读者的欢迎,成为我国数学传播与普及著作的一个品牌。我想,取得这样可喜的成绩主要原因是:中国数学家的支持,大家在百忙中抽出宝贵时间来撰写此丛书;天元基金的支持;与湖南教育出版社出色的出版工作。

但由于我国毕竟还不是数学强国,很多重要的数学领域尚属空缺,所以暂停些年不出版亦属正常。另外,有一段时间来考验一下已经出版的书,也是必要的。看来考验后是及格了。

中国数学界屡屡发出继续出版这套丛书的呼声。大连理工大学出版社热心于继续出版;世界科学出版社(新加坡)愿意出某些书的英文版;湖南教育出版社也乐成其事,

尽量帮忙。总之,大家愿意为中国数学的普及工作尽心尽力。在这样的大好形势下,“走向数学”丛书组成了以冯克勤教授为主编的编委会,领导继续出版工作,这实在是一件大好事。

首先要挑选修订重印一批已出版的书;继续组稿新书;由于我国的数学水平距国际先进水平尚有距离,我们的作者应面向全世界,甚至翻译他们的优秀著作。

我相信在新的编委会的领导下,丛书必有一番新气象。

我预祝丛书取得更大成功。

王　元

2010 年 5 月于北京

编写说明

从力学、物理学、天文学，直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学. 一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三四年有数学课. 可见数学之重要与其应用之广泛.

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏. 我以为要克服这个鸿沟还是有可能的. 近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握. 我想，如果知道讨论对象的具体背景，则有可能掌握其实质. 显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到. 若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了

解.这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书,其中每本小册子尽量用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面,使工程技术人员、非数学专业的大学生,甚至具有中学数学水平的人,亦能懂得书中全部或部分含义与内容.这对提高我国人民的数学修养与水平,可能会起些作用.显然,要将一门数学深入浅出地讲出来,决非易事.首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解.从整体上说,我国的数学水平还不高,能否较好地完成这一任务还难说.但我了解很多数学家的积极性很高,他们愿意为“走向数学”撰稿.这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社的支持,得以出版这套“走向数学”丛书,谨致以感谢.

王 元

1990 年于北京

序　言

应“走向数学”丛书编委会及湖南教育出版社之约，作者写了这套丛书中的一本，介绍复数、复函数以及几个有关的重要应用. 书的内容读者可以从目录中一目了然地看到，无需赘言，这些内容在数学中是十分基本和十分重要的.

作者将本书贡献给具有高中以上水平的广大热爱数学的青年读者，自然地，对于中学教师也是一本值得阅读的补充读物. 从过去若干年来的出书情况看，讲实数及其应用的书比较多，而讲复数及其应用的书却比较少，这就使人更加感到出这样一本书的必要.

作者希望本书写得有益、有趣，且通俗易懂，这就涉及到选材是否得当，行文是否生动活波且流畅，说理是否透彻

和清晰，作者力争做到这三点，至于效果如何就请读者评价了.

在写这本书的过程中，作者始终得到李忠教授的热情鼓励与支持，没有他的这种支持与鼓励，或许这本书也不会出现. 作者感谢张顺燕同志的热情帮助，他仔细地阅读了全文，并改正了不少错误. 最后，作者也衷心感谢湖南教育出版社，他们的通力合作与支持使本书得以出版.

作者于北京大学燕东园

1990 年 8 月 14 日

目　录

一

基本知识

本章引入复数和复变函数的基本概念.

复数最早出现在卡尔达诺(G. Cardano,1501—1576)的名著《大术》(1545)中.他把复数看成是无价值的、不合用的,并称 $i=\sqrt{-1}$ 这样的数为虚数.第一个认识到虚数价值的人是邦贝利(R. Bombelli,1526—1572),他用虚数解不可约三次代数方程,并给出一些最简单的复数运算法则.但是,即使17世纪的大数学家对虚数的代数性质和几何性质都是不清楚的,甚至认为是不可思议的.牛顿(Isaac Newton,1642—1727)把虚数排斥在数的概念之外,而莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716)则说:"复数是精神世界的一个奇妙的避难所,好像是存在又不存在的两栖

物.”直到19世纪,复数才具有现代的含义.

§1.1 复数的代数运算

1.1.1 复 数

数
$$z=x+\mathrm{i}y$$
称为**复数**,其中 x 和 y 是实数,而 i 是**虚单位**,$\mathrm{i}^2=-1$. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,并记为:
$$x=\mathrm{Re}\,z, y=\mathrm{Im}\,z.$$

两个复数相等是指它的实部和虚部分别相等,即等式
$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$$
相当于两个等式:
$$x_1=x_2, y_1=y_2.$$

由于在直角坐标系中,当且仅当两个点具有相等的横坐标和相等的纵坐标时才会重合,所以平面上的全部点可以与所有复数间建立一一对应的关系. 换言之,我们将借助于横坐标为 x,纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$,这样的平面称为**复平面** $\boldsymbol{C}$. 表示数 z 的点通常称为点 Z. 复数可以用向量来表示,使复数的实部与虚部对应于向量的横坐标与纵坐标(图 1.1).

我们将虚部等于零的复数 $x+\mathrm{i}0$ 和它的实部看做是一样的:$x+\mathrm{i}0=x$,并认为实数是复数的特殊情况. 用 Ox 轴

上的点表示实数，称此轴为**实轴**. 类似地，实部等于零的复数写为 $0+\mathrm{i}y=\mathrm{i}y$，称为**纯虚数**，用 Oy 轴上的点来表示它们，并称这个轴为**虚轴**.

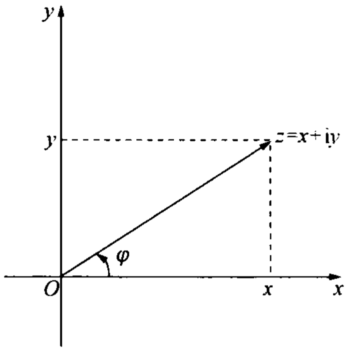


图 1.1

复数 z 的位置也可用极坐标来确定，也就是借助对应于复数的向量的长度 r，和这个向量与实轴正向的夹角 φ 来确定. 数 r 和 φ 分别称为复数 z 的**模**和**辐角**，记为

$$r=|z|,\varphi=\operatorname{Arg} z.$$

这里引进的模的概念是实数的绝对值概念的推广. 实数的模就是它的绝对值，纯虚数的模就是它的虚部的绝对值.

由模和辐角的定义推出，若 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$x=r\cos\varphi=|z|\cos(\operatorname{Arg} z),$$
$$y=r\sin\varphi=|z|\sin(\operatorname{Arg} z) \qquad (1.1)$$

和

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\tan(\operatorname{Arg} z)=\tan\varphi=\frac{y}{x}.$$

值得注意的是，辐角 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的，它们之间可以相

差 2π 的整数倍，通常取由不等式

$$0 \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$$

所确定的值作为辐角的**主值**，z 的辐角的主值记为 $\arg z$，于是我们有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \qquad (k\text{ 为整数}). \tag{1.2}$$

例如，当 z 是正实数时，$\arg z = 0$；当 z 是负实数时，$\arg z = \pi$；当 z 是具有正虚部的纯虚数时，$\arg z = \frac{\pi}{2}$. 但是注意，0 的辐角是没有意义的.

利用公式(1.1)，可以把任何异于零的复数表达为复数 z 的三角形式：

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{1.3}$$

例如，

$$1 = 1(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0),$$

$$\mathrm{i} = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$-2 = 2(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi).$$

借助于欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$（见本书第六章§1），可以把复数 z 的三角形式(1.3)化为**指数形式**：

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \tag{1.4}$$

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的**共轭复数**定义为 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$. 彼此共轭

的复数关于实轴是对称的.

彼此共轭的复数的模是相同的,而辐角相差一个符号:

$$|\bar{z}|=|z|, \qquad \arg\bar{z}=-\arg z.$$

任何实数与它自己共轭.

1.1.2 复数的四则运算

将算术的加法和乘法规则运用于复数,我们有

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.5}$$

第二个恒等式中,我们使用了关系式 $\mathrm{i}^2=-1$.

复数的减法定义为加法的逆运算,由此得到

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2).$$

特别地,由式(1.5)推出,两个彼此共轭的复数的乘积是实数,等于该复数的模的平方:

$$(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=x^2+y^2$$

或

$$z\bar{z}=|z|^2.$$

两个彼此共轭的复数的和也是实数:

$$(x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y)=2x$$

即

$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z.$$

(1)复数加法和减法的几何意义

若用向量表示复数，则复数的实部和虚部就是向量的坐标.因为向量的相加或相减就是它们的坐标对应地相加或相减，于是复数的相加或相减归结为相应向量的相加或相减，图 1.2 展现了复数加法和减法的几何意义.

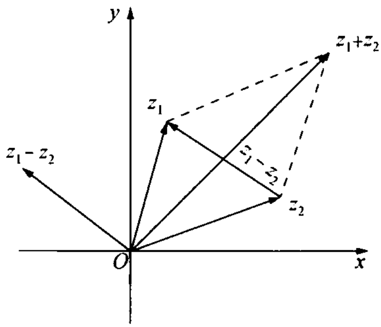


图 1.2

由于复数的模等于对应向量的长度，所以两个复数的和的模不大于两个复数的模的和：

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|,$$

接连使用几次这个不等式，便得到

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

当且仅当表示数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的向量在一条直线上，且指向同一方向，即当

$$\arg z_1 = \arg z_2 = \cdots = \arg z_n$$

时，等式成立.

(2)圆的方程