提分攻略系列

常考题型训练题典

CHANGKAO TIXING XUNLIAN TIDIAN

高中 数学1

（必修1）

主编 蔡晔

龍門書局 | 龙门品牌·学子至爱
www.longmenbooks.com

提分攻略系列

常考题型训练题典

CHANGKAO TIXING XUNLIAN TIDIAN

高中 数学1

（必修1）

丛 书 主 编　蔡　晔
丛书副主编　马素梅
编　　　者　张　青　王青仁

龍門書局
北　京

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略　常考题型训练题典　高中数学 1(必修 1)/蔡晔主编；张熹，王青仁编．—北京：龙门书局，2011.7
ISBN 978-7-5088-3188-6

Ⅰ.①提…　Ⅱ.①蔡…　②张…　③王…　Ⅲ.①中学数学课－高中－习题集　Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 123388 号

责任编辑：潘恭华　高　鹏/封面设计：浩蓝书籍设计

龍門書局出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
www.longmenbooks.com
中国科学院印刷厂印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2011 年 7 月第　一　版　　开本：B5
2011 年 7 月第二次印刷　　印张：6 1/2
字数：125 000
定　价：10.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

新课标教学和新课改理念越来越重视对学生的思维能力、实践能力和创新能力的培养。《考试大纲》告诉我们高考的命题将全面落实新课改理念，把以能力测试为主导的命题指导思想落实到每一道题中，在继承和发展传统命题优势的情况下，高考将更加注重对学生各种能力的考查，并真正把对能力的考查放在首要位置。

《提分攻略》系列图书正是在这种背景下应运而生，它包含《疑难与规律详解》和《常考题型训练题典》两大子系列，涉及数学、物理、化学、生物和英语五大学科，供中学各年级教师和学生使用。《常考题型训练题典》系列丛书由多位优秀的一线骨干教师和研究员，结合新课标教学理念和考试大纲的要求分学科、分模块、分年级编排成册，总的说来本书有以下特点：

体例切合学习认知规律

本丛书从学生学习认知的心理规律出发，以母题与衍生的形式呈现知识内容，每一个题型都让学生经过学、悟、练的过程，进而将需要掌握的知识快速地内化到自己的知识结构中，帮助学生提高理解和运用知识的效率。

题型牢牢把握考试动向

本丛书在编写过程中，本着"遵循教材但不拘泥于教材"的原则，以考试大纲为指导，将各分册知识内容以题型的形式科学系统地归纳整理，考点、重点、难点一目了然，让同学们在学习的过程中目标明确、有的放矢。

题型全面总结通式通法

本书在全面梳理各节考点、重点、难点的同时，兼顾各题型中涉及的解题方法、规律并以解题锦囊的形式高度总结通式通法，全面科学地归纳各节的知识特点，揭示解题技巧，提升解题能力；并通过易错题、探究题、创新题等综合题型的专项训练，进一步提升同学们运用知识解决综合性问题的能力。

编写思路新颖

本丛书一改传统题典类图书的简单罗列例题的形式，采取了考点归类、举一反三的方式，全面梳理各种常考题型。并提炼出题中能够激发思维的重要内容，强化记忆，引导学生思考、研究、学习、提升。

编　者

2011.5.20

目录

第一章　集合与函数的概念

第二章　基本初等函数(Ⅰ)

第三章　函数的应用

第一章　集合与函数的概念

第1节　集　合

题型一　集合的表示

母题1 根据下列语句写出相应集合

(1)负奇数集表示为________.

(2)15的约数的集合表示为________.

解析:(1)负奇数集可以用一个等式表示,所以使用描述法,奇数可以表示为$2n+1$(n为正整数),则负奇数加上负号即可.

(2)15的约数数目不多,因此可以使用列举法.

答案:(1)$\{x|x=-(2n+1),n\in \mathbf{N}^{*}\}(2)\{1,3,5,15\}$

解题锦囊 (1)本题型的一般解题思路是:根据需要表示的集合特征选择使用列举法或者描述法.

(2)本题型解题关键在于选择表示集合的方法,使用描述法表示的集合通常有明显公共属性,比如符合某个不等式或者等式;而有些集合公共属性规律性不明显,难以概括,不使用描述法表示,只能用列举法.

指点迷津

集合的表示方法有很多,当集合中元素个数较少时,可以考虑采用列举法.

母题2 集合C中含有三个实数可用$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$和$\{0,a^{2},a+b\}$,则$a^{2010}+b^{2010}$的值为　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ± 1

解析:本题考查集合的性质及求值的方法,由题意,集合中有0,1两个数值,又因为a可以做分母,所以不为0,则$b=0$,集合表示为$\{a,0,1\}$和$\{0,a^{2},a\}$,$a^{2}=1$且$a^{2}\neq a$,所以$a=-1$,$\therefore a^{2010}+b^{2010}=1$,故选B.

答案:B

解题锦囊 本题型常用的方法技巧:熟练掌握集合中元素的三个明显的特征:确定性、互异性、无序性.在将集合表示出来之后,用互异性来检验表示是否正确.

指点迷津

解本题的关键是要知道同一个集合无论用哪种方式表示,都是一样的.

衍生训练

衍生1 已知下列集合:

(1) $A_{1}=\{x\mid x=2k+1,k\in \mathbf{N},k\leqslant 5\}$;

(2) $A_{2}=\{x\mid x=2k,k\in \mathbf{N},k\leqslant 3\}$;

(3) $A_{3}=\{x\mid x=4k+1$,或$x=4k-1,k\in \mathbf{N},k\leqslant 3\}$;

问:(Ⅰ)用列举法表示上述各集合;

指点迷津

通过对上述集合的识别可以掌握奇数集、偶数集的描述法表示和集合的图示法表示.

学习心得

（Ⅱ）对集合 A_1, A_2, A_3，如果使 $k\in \mathbf{Z}$，那么 A_1, A_2, A_3 所表示的集合分别是什么？

分析：原题是用描述法表示，找出共同特征，然后将具有这些共同特征的数字列举出来。

解答：(Ⅰ)(1) $A_1=\{x \mid x=2k+1, k\in \mathbf{N}, k\leqslant 5\}=\{1,3,5,7,9,11\}$；

(2) $A_2=\{x \mid x=2k, k\in \mathbf{N}, k\leqslant 3\}=\{0,2,4,6\}$；

(3) $A_3=\{x \mid x=4k\pm 1, k\in \mathbf{N}, k\leqslant 3\}=\{-1,1,3,5,7,9,11,13\}$；

（Ⅱ）对集合 A_1, A_2, A_3，如果使 $k\in \mathbf{Z}$，那么 A_1 和 A_3 所表示的集合都是奇数集；

A_2 所表示的集合都是偶数集.

衍生 2 ★★★ $\triangle ABC$ 的边长为 a,b,c，且集合 $m=\{a,b,c\}$，则 $\triangle ABC$ 一定不是 （　）

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 等腰三角形　　D. 直角三角形

解析：在集合中，元素有三个明显的特征：确定性、互异性、无序性. 根据元素的互异性可得 $\triangle ABC$ 不可能为等腰三角形.

答案：C

> **指点迷津**
> 用描述法给出的集合 $\{x \mid x\in P\}$，要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P.

衍生 3 ★★★ 用列举法表示集合 A 和 B，$A=\{x\in \mathbf{N} \mid \frac{6}{6-x}\in \mathbf{N}\}$ 与 $B=\{\frac{6}{6-x}\in \mathbf{N} \mid x\in \mathbf{N}\}$.

解答：当 $x=0,3,4,5$ 这些自然数时，$\frac{6}{6-x}=1,2,3,6$ 是自然数，故 $A=\{0,3,4,5\}$；

反之，$\frac{6}{6-x}=1,2,3,6$ 时，$x=0,3,4,5$.

注意到 $B=\{\frac{6}{6-x}\in \mathbf{N} \mid x\in \mathbf{N}\}$ 中的代表元素是 $\frac{6}{6-x}$，因此 $B=\{1,2,3,6\}$；

所以 A 和 B 用列举法表示为 $A=\{0,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3,6\}$.

题型二　集合间的基本关系

母题 1 ★★ 已知集合 $A=\{a,b,c\}$，且 $B\subseteq A$，则满足条件的集合 B 的个数为 （　）

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

解析：B 是 A 的子集，则可能有 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$，共 8 个.

答案：D

> **指点迷津**
> 若集合 A 中含有 $n(n\geqslant 1)$ 个元素，则集合 A 中有 $2n$ 个子集，$2n-1$ 个真子集，$2n-2$ 个非空真子集.

解题锦囊 本题型用的数学思想主要有分类讨论思想：在解题中，若未能指明集合非空时，要考虑到空集的可能性，如 $A\subseteq B$，则有 $A=\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$ 两种可能，此时应分类讨论. 要理解"空集是

任何集合的子集，是任何非空集合的真子集”这一含义.

母题 2 ★★★ 下图 1-1-1 所示的 Venn 图中反映的是四边形、梯形、平行四边形、菱形、正方形这五种几何图形之间的关系，集合 A,B,C,D,E 分别对应的图形是________________.

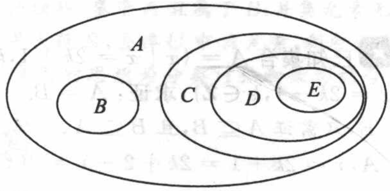

图 1-1-1

解析：四边形包括了后几种图形，菱形是特殊的平行四边形，同时正方形是特殊的菱形. 观察图形，看集合 A、B、C、D、E 的包含关系可得结论.

答案：四边形，梯形，平行四边形，菱形，正方形

解题锦囊 (1)本题型一般解题思路为：若两个集合元素相同，则两个集合相等，若两个集合不相等，先看是不是子集，如果是子集关系，进一步判断是否是真子集.

(2)本题型利用 Venn 图可以直观而清晰地表示集合之间的关系.

母题 3 ★★★ 已知集合 $P=\{x\mid x^2-5x+4\leqslant 0\}$，$Q=\{x\mid x^2-(b+2)x+2b\leqslant 0\}$ 且有 $Q\subseteq P$，求实数 b 的取值范围.

分析：由 $Q\subseteq P$ 知，Q 是 P 的子集.

解答：由题意知 $P=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$.

而当 $b\geqslant 2$ 时，$Q=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant b\}$，

当 $b<2$ 时，$Q=\{x\mid b\leqslant x\leqslant 2\}$，

因为 $Q\subseteq P$，所以当 $b\geqslant 2$ 时，$b\leqslant 4$；

当 $b<2$ 时，$b\geqslant 1$，因此 $1\leqslant b\leqslant 4$，

即 b 的取值范围是 $\{b\mid 1\leqslant b\leqslant 4\}$.

解题锦囊 本题型的解题思路为：先解不等式，然后用数轴表示不等式的解集，再根据集合的基本关系进行分析判断. 另外，在解不等式的时候需注意分类讨论的思想.

衍生训练

衍生 1 ★★ 已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$，集合 $B=\{3,m^2\}$. 若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$________

解析：由 $B\subseteq A$，且 m^2 不可能等于 -1，可知 $m^2=2m-1$，解得：$m=1$.

答案：1

指点迷津

如果要自己画出 Venn 图的话，一定要注意，四边形不仅仅是梯形和平行四边形组成的.

指点迷津

本题用数轴及分类讨论思想去加以判断，在数轴上表示不等式的解集，形象而直观，因此也广泛用于求子集的问题中.

指点迷津

$B\subseteq A$，则指 B 中的每一个元素都在 A 中，并且要注意 AB 中每个元素都是互异的.

衍生 2 ★★ 已知集合 $A=\{0,1,x^2-5x\}$，有 $-4\in A$，则实数 x 的值为________.

解析：$\because -4\in A, A=\{0,1,x^2-5x\}$，$\therefore x^2-5x=-4$，解之得 $x=1$ 或 $x=4$.

答案：1 或 4

> **指点迷津**
> 列举法表示的集合，相等只需要看每个元素都一样即可，而描述法表示的集合，就需要通过定义来判断.

衍生 3 ★★★ 已知集合 $A=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，

$B=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，求证：$A=B$.

分析：要证 $A=B$，只需证 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

证明：任取 $x\in A$，$x=2k+1=2k+2-1=2(k+1)-1$.

$\because k\in\mathbf{Z}$，$\therefore k+1\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x\in B$，$\therefore A\subseteq B$.

任取 $x\in B$，$x=2k-1=2k+1-2=2(k-1)+1$.

$\because k\in\mathbf{Z}$，$\therefore k-1\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x\in A$，$\therefore B\subseteq A$

$\therefore A=B$.

题型三　集合运算

母题 1 ★★★ 已知集合 $M=\{x\mid -3<x\leqslant 5\}$，$N=\{x\mid x<-5$ 或 $x>5\}$，则 $M\cup N$ 为（　　）

A. $\{x\mid x<-5$ 或 $x>-3\}$　　B. $\{x\mid -5<x<5\}$

C. $\{x\mid -3<x<5\}$　　D. $\{x\mid x<-3$ 或 $x>5\}$

解析：题意画出数轴图形如图 1-1-2. 可知，$M\cup N=\{x\mid x<-5$ 或 $x>-3\}$.

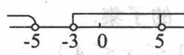

图 1-1-2

答案：A

> **指点迷津**
> 解答本题首先要将不等式在数轴上表示出来，在数轴上找到不等式的并集.

解题锦囊 (1)本题型的一般解题思路：先看清集合中元素的本质属性和所满足的条件，再把所给集合化为最简形式，并合理转化求解，必要时充分利用数轴、韦恩图、图象等工具使问题直观化.

(2)本题型解题关键：交集并集的基本运算，全集和补集的意义和运算.

母题 2 ★★★ $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$(C_UA)\cap B=\{3,7\}$，$(C_UB)\cap A=\{2,8\}$，$(C_UA)\cap(C_UB)=\{1,5,6\}$，则集合 $A=$________，$B=$________.

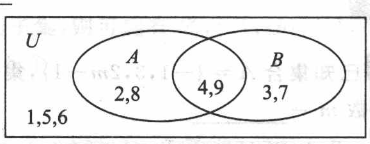

图 1-1-3

> **指点迷津**
> 提示：借助 Venn，如图 1-1-3，把相关运算的结果表示出来，自然地就得出集合 A、B 了.

解析：集合有限，但是关系复杂，补集不易观察，想到画 Venn 图解决，如图 1-1-3.

答案：$\{2,4,8,9\}$　$\{3,4,7,9\}$

解题锦囊 (1)本题型解题的方法技巧：可按下列口诀进行运算：交集元素仔细找，属于 A 且属于 B；并集元素无遗漏，切记重复仅取一；全集 U 是大范围，去掉 U 中 A 元素，剩余元素成补集.

(2)本题型常用的思想为分类讨论和数形结合.

衍生训练

衍生 1 ★★★ 设全集 $U=\{x|x$ 是三角形$\}$，$A=\{x|x$ 是锐角三角形$\}$，$B=\{x|x$ 是钝角三角形$\}$. 求 $A\cap B$，$C_U(A\cup B)$.

分析：三角形分为锐角三角形，直角三角形和钝角三角形，锐角三角形和钝角三角形没有交集.

解答：$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{x|x$ 是锐角三角形或钝角三角形$\}$，$C_U(A\cup B)=\{x|x$ 是直角三角形$\}$.

指点迷津
提示：$A\cap B$ 是由集合 A，B 中公共元素组成的集合，$C_U(A\cup B)$ 是全集中除去集合 $A\cup B$ 中的元素后剩下的元素组成的集合.

衍生 2 ★★★ 设集合 $A=\{x|2x+1<3\}$，$B=\{x|-3<x<2\}$，则 $A\cap B$ 等于　(　　)

A. $\{x|-3<x<1\}$

B. $\{x|1<x<2\}$

C. $\{x|x(-3\}$

D. $\{x|x(1\}$

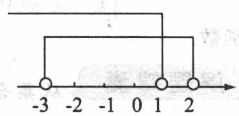

图 1-1-4

解析：集合 $A=\{x|2x+1<3\}=\{x|x<1\}$，集合 A 和集合 B 在数轴上表示如图 1-1-4 所示，$A\cap B$ 是指集合 A 和集合 B 的公共部分，故选 A.

答案：A

衍生 3 ★★★★ 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0\}$，$B=\{(x,y)|x-y+1=0$，且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

分析：两个集合都是坐标系中点的集合，$A\cap B\neq\varnothing$ 则说明两个集合有公共点，联立两个方程，则至少有一个公共根.

解答：由 $\begin{cases}x^2+mx-y+2=0,\\x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2)\end{cases}$

得 $x^2+(m-1)x+1=0$　①

$\because A\cap B\neq\varnothing$，

$\therefore$ 方程①在区间 $[0,2]$ 上至少有一个实数解.

首先，由 $\Delta=(m-1)^2-4\geqslant 0$，得 $m\geqslant 3$ 或 $m\leqslant -1$，当 $m\geqslant 3$ 时，由 $x_1+x_2=-(m-1)<0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 知，方程①只有负根，不符合要求.

当 $m\leqslant -1$ 时，由 $x_1+x_2=-(m-1)>0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 知，方程①只有正根，且必有一根在区间 $(0,1]$ 内，从而方程①至少有一个根在区间 $[0,2]$ 内.

故所求 m 的取值范围是 $m\leqslant -1$.

指点迷津
这道题将方程和集合结合，是一道较难的题. 解题关键在于求出 m 的范围后检验根是否符合 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的条件.

第2节 函数及其表示

题型一 函数的概念

母题1 ★★★ 下列式子是否能确定 y 是 x 的函数？

(1) $x^2+y^2=2$；(2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$；(3) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$.

分析：判断 y 是否为 x 的函数，关键是判定对于一个 x 的值是否有唯一的 y 值与之对应.

解答：(1)由 $x^2+y^2=2$ 得 $y=\pm\sqrt{2-x^2}$，因此由它不能确定 y 是 x 的函数；

(2)由 $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$ 得 $y=(1-\sqrt{x-1})^2+1$，当 $x\geqslant 1$ 时可以确定唯一的 y 的值，故由它可以确定 y 是 x 的函数；

(3)由 $\begin{cases}x-2\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$ 得，$x\in\varnothing$，故它不能确定 y 是 x 的函数.

解题锦囊 从集合 A 到集合 B 的函数必须满足：

(1)集合 A 中的元素在集合 B 中都有与之对应的元素；

(2)集合 B 中的元素可以有剩余；

(3)对应关系可以是"多对一"，也可以是"一对一"，但绝不能是"一对多".

指点迷津

函数是非空数集到非空数集上的一种对应，判断 y 是否是 x 的函数时，首先要满足定义域 x 和值域 y 都是非空集合这个条件. 另外，有时需化简式子方可判断.

学习心得

母题2 ★★★ 下列各组函数中，表示同一函数的有哪几组？

(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x-1$；

(3) $y=1$ 与 $y=x^0$；

(4) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

分析：判断两个函数是否相同，关键看定义域，对应关系是否相同.

解答：(1) $y=\sqrt{x^2}$，$x\in\mathbf{R}$，而 $y=(\sqrt{x})$，$x\geqslant 0$，定义域不同，所以不表示同一函数；

(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1$，而 $y=x-1$，$x\in\mathbf{R}$，定义域不同，所以也不表示同一个函数；

(3) $y=x^0$，$x\neq 0$，而 $y=1$，$x\in\mathbf{R}$，同样，定义域不同；

(4) $y=\sqrt{x^2}=|x|$，所以(4)表示同一函数.

指点迷津

定义域、对应法则、值域是构成函数的三要素，而尤以定义域及对应法则更重要，它们是构成函数的基本条件.

解题锦囊 函数概念含有三个要素，定义域，值域和对应法则，其中核心是对应法则，它是函数关系的本质特征. 只有当两个

函数的定义域和对应法则分别相同时，这两个函数才是同一个函数，因此判断两个函数是否为同一函数的一般方法为：

(1)先判断两个函数的定义域和值域是否相同，特别是一些特殊点；

(2)再看看对应关系是否相同.

衍生训练

衍生1 ★★ 下列对应中是 A 到 B 的函数的个数为　(　　)

(1)$A=\mathbf{R}$, $B=\{y|y>0\}$, $f:x\rightarrow y=|x|$；

(2)$A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{Z}$, $f:x\rightarrow y=x^2$；

(3)$A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{Z}$, $f:x\rightarrow y=\sqrt{x}$；

(4)$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$，对应关系如图 1-2-1：

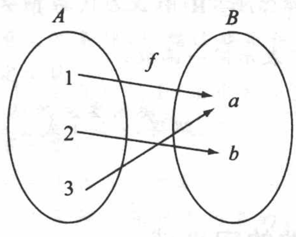

图 1-2-1

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析：(1)A 中的元素 0 在 B 中没有对应元素，故 f 不是 A 到 B 的函数；

(2)对于集合 A 中的任意一个整数 x，按照对应关系，在集合 B 中都有唯一一个确定的整数与其对应，故是集合 A 到集合 B 的函数.

(3)A 中的负整数没有平方根，故在 B 中没有没有对应的元素，故不是 A 到 B 的函数.

(4)集合 B 不是数集，故不是 A 到 B 的函数.

答案：A.

衍生2 ★★★ 下列各组中的两个函数是否为相同的函数？

(1) $y_1=\dfrac{(x+3)(x-5)}{x+3}$, $y_2=x-5$；

(2) $y_1=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$, $y_2=\sqrt{(x+1)(x-1)}$；

(3) $f_1(x)=(\sqrt{2x-5})^2$；$f_2(x)=2x-5$.

解答：(1) $y_1=\dfrac{(x+3)(x-5)}{x+3}$ 的定义域为 $x\neq-3$，而 $y_2=x-5$ 的定义域为 R，故它们不是相同的函数；

(2) $y_1=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $x\geqslant1$，$y_2=\sqrt{(x+1)(x-1)}$ 的定义域为 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$，定义域不同，所以

指点迷津

通过本题可以加深掌握自变量与函数值的一一对应关系.

学习心得

学习心得

它们不是相同的函数；

(3) $f_1(x)=(\sqrt{2x-5})^2$ 定义域为 $x\geqslant\frac{5}{2}$，$f_2(x)=2x-5$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以它们不是相同的函数.

衍生3 ★★★ 以下四组函数中，表示同一函数的是　(　　)

A. $f(x)=|x|, g(t)=\sqrt{t^2}$

B. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$

D. $f(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}, g(x)=\sqrt{x^2-1}$

解析：B中 $y=\sqrt{x^2}, x\in\mathbf{R}$，而 $y=(\sqrt{x})^2, x\geqslant 0$，定义域不同，所以不表示同一函数；

C中 $y=\frac{x^2-1}{x-1}, x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1$，而 $g(x)=x+1, x\in\mathbf{R}$，定义域不同，所以也不表示同一函数；

D中 $f(x)$ 的定义域为 $x+1\geqslant 0$ 且 $x-1\geqslant 0$，所以 $x\geqslant 1$，$g(x)$ 的定义域为 $x^2-1\geqslant 0$，解得，$x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$，定义域不同，所以也不是同一函数.

答案：A

题型二　求函数的定义域

母题1 ★★★ 说出下列函数的定义域，并用区间表示：

(1) $y=\frac{8}{3x+5}$；

(2) $y=x^2-4x+3$；

(3) $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$；

(4) $y=\frac{1}{x+2}-\sqrt{5-x^2}$；

(5) $y=\frac{\sqrt{x+6}}{|x+1|-2}$.

指点迷津

求定义域的依据是使函数解析式有意义，如分式的分母不为0，偶次根式的被开放数为非负数等；同时要有扎实的基础知识，如绝对值的概念，简单不等式的解法等的掌握；另外，还需掌握好区间的表示.

分析：函数定义域就是使解析式有意义的自变量的取值范围，当一个函数是由两个以上数学式子的和、差、积、商的形式构成时，定义域是使各部分都有意义的公共部分的集合.

解答：(1)要使 $y=\frac{8}{3x+5}$ 有意义，则 $3x+5\neq 0$，解得 $x\neq-\frac{5}{3}$，定义域为 $x\neq-\frac{5}{3}$，区间表示为 $(-\infty,-\frac{5}{3})\cup(-\frac{5}{3},+\infty)$；

(2)当 x 取任何实数时，$y=x^2-4x+3$ 都有意义，故定义域为 $\mathbf{R}$，区间表示为 $(-\infty,+\infty)$；

(3)要使 $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$ 有意义，只需 $x^2-4x+3\neq 0$ 即可，解得 $x\neq 3, x\neq 1$，故函数的定义域可用区间表示为 $(-\infty,1)\cup$

$(1,3)\cup(3,+\infty)$；

(4) 要使函数有意义，必须满足 $\begin{cases}x+2\neq 0\\5-x^2\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\neq -2,\\-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5},\end{cases}$

所以它的定义域为 $\{x\mid -\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$ 且 $x\neq -2\}$，用区间表示为 $(-\sqrt{5},-2)\cup(-2,\sqrt{5})$；

(5)要使函数有意义，必须满足 $\begin{cases}x+6\geqslant 0,\\|x+1|\neq 2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant -6,\\x\neq -3,\end{cases}$ 所以定义域为 $\{x\mid x\geqslant -6$ 且 $x\neq -3\}$，用区间表示为 $(-6,-3)\cup(-3,+\infty)$.

解题锦囊 (1)求函数定义域的一般解题思路为：函数的定义域就是使函数的解析式有意义的自变量的取值范围，因此首先考虑解析式本身有意义的条件，根据这些条件求出自变量的取值范围就是该函数的定义域.

(2)求函数定义域的主要依据：

①分式的分母不为零；

②偶次方根的被开方数不小于零，零取零次方没有意义；

③若某个函数是由实际问题抽象出来的，那么函数的定义域要符合实际问题.

另外，求定义域时，不要将函数解析式变形，如 $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ 与 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是不相同的.

母题 2 ★★★ 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $x\in[-1,1)]$，求函数 $y=f(x+\frac{1}{4})f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域.

分析：本题中的函数没有解析式，故称为抽象函数. 解此类题时关键是要注重对应法则，要注意简单分式不等式的解法，

解答：$\because y=f(x+\frac{1}{4})f(x-\frac{1}{4})$ 中的 $(x+\frac{1}{4})$ 和 $(x-\frac{1}{4})$ 相当于 $y=f(x)$ 中的 x，

$$\therefore\begin{cases}-1\leqslant x+\frac{1}{4}\leqslant 1,\\-1\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{5}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4},\\-\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow -\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4},$$

$\therefore$ 函数 $y=f(x+\frac{1}{4})\cdot f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域为：$\left\{x\mid -\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$.

解题锦囊 已知 $f(x)$ 的定义域为 $a\leqslant x\leqslant b$，要求 $f(g(x))$ 的定义域，由 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解出 x 的范围即可. 一般地，函数 $f(g(x))$ 定义域为 $a\leqslant x\leqslant b$ 指的是 $a\leqslant x\leqslant b$，求 $f(x)$ 的定义

学习心得

指点迷津

解题时要注意书写过程，注意紧扣函数定义域的含义. 求函数的定义域就是根据使函数式有意义的条件，列出自变量应满足的不等式或不等式组，解不等式或不等式组就得到所求的函数的定义域.

> **指点迷津**
> 当二次项系数不确定时,需要对其是否为0分类讨论.

> **指点迷津**
> 本题的定义域只是两个点,所以该集合用列举法表示.

> **指点迷津**
> 注意不要漏掉分母不为零这个条件.

域,就是求当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $g(x)$ 的值域.

母题3 ★★★★ 若函数 $y=\sqrt{(a^2-1)x^2+(a-1)x+\dfrac{2}{a+1}}$ 的定义域为 **R**,求实数 a 的取值范围.

分析:因为函数的定义域为 **R**,所以对于任意实数 x,$(a^2-1)x^2+(a-1)x+\dfrac{2}{a+1}\geqslant 0$ 恒成立.

解答:$y=\sqrt{(a^2-1)x^2+(a-1)x+\dfrac{2}{a+1}}$ 的定义域为 **R**,则不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+\dfrac{2}{a+1}\geqslant 0$ 的解集为 **R**.

(1)当 $a=1$ 时,成立.

(2)若 $a\neq 1$ 时,则有 $\begin{cases}a^2-1>0,\\ \Delta\leqslant 0,\end{cases}$ 且 $a+1\neq 0$,解得 $1<a\leqslant 9$.

综上可得 $1\leqslant a\leqslant 9$.

解题锦囊 本题需要运用转化与化归的思想,即把函数定义域问题转化为不等式恒成立问题.

衍生训练

衍生1 ★★ 函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-4}$ 的定义域是 ( )

A. $[-2,2]$　　B. $\{-2,2\}$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-2,2)$

解析:在本题中,求函数的定义域需满足:偶次方根的被开方数不小于零,即有 $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\ 4-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $x^2-4=0$,所以解得 $x=\pm 2$,即函数 $f(x)$ 的定义域是两个点.

答案:B

衍生2 ★★★ 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$ 的定义域,并用区间表示.

分析:$y=\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$ 的定义域需满足:

①分母不为零;

②偶次方根的被开方数不小于零,

即 $\begin{cases}-x^2-3x+4\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$

解答:要使函数有意义,必须满足 $\begin{cases}-x^2-3x+4\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$ 即

$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 1,\\ x\neq 0.\end{cases}$

所以 $x\in[-4,0)\cup(0,1]$.

衍生 3 ★★★ 设 $f(x)$ 的定义域是$[3,\sqrt{2}]$，求函数 $f(\sqrt{x}-2)$ 的定义域.

分析：本题是求抽象函数定义域问题，只需将 $(\sqrt{x}-2)$ 看成是 $f(x)$ 中的 x 即可.

解答：要使函数有意义，必须：$-3\leqslant\sqrt{x}-2\leqslant\sqrt{2}$，

得 $-1\leqslant\sqrt{x}\leqslant 2+\sqrt{2}$，

$\because \sqrt{x}\geqslant 0$，$\therefore 0\leqslant\sqrt{x}\leqslant 2+\sqrt{2}$，$0\leqslant x\leqslant 6+4\sqrt{2}$，

$\therefore$ 函数 $f(\sqrt{x}-2)$ 的定域义为：$\{x|0\leqslant x\leqslant 6+4\sqrt{2}\}$

衍生 4 ★★★★ 已知函数 $y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

分析：因为函数的定义域为 $\mathbf{R}$，所以对任意实数 x，$mx^2-6mx+m+8\geqslant 0$ 恒成立.

解答：(1) $m=0$ 时，$y=\sqrt{8}$，其定义域是 $\mathbf{R}$；

(2) 当 $m\neq 0$ 时，由定义域为 $\mathbf{R}$ 可知，$mx^2-6mx+m+8\geqslant 0$ 对一切实数 x 均成立，于是有 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta=(-6m)^2-4m(m+8)\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $0<m\leqslant 1$.

综上得 $0\leqslant m\leqslant 1$.

> **指点迷津**
> 注意当二次项系数不确定时，需要对其是否为 0 分类讨论.

题型三　求函数的值域

母题 1 ★★ 求下列函数的值域：(1) $y=x^2+1$；(2) $y=2x+1$，$x\in\{1,2,3,4,5\}$.

分析：函数的值域是由函数的定义域和解析式确定的，在求值域时，一定要贯彻定义域优先的原则，然后再根据解析式特点来求.

解答：(1)根据熟知的 x^2 的值域有，$x^2\geqslant 0$，$\therefore x^2+1\geqslant 1$，$\therefore y=x^2+1$ 的值域为$[1,+\infty)$.

(2) $\because y=2x+1$，且 $x\in\{1,2,3,4,5\}$，$\therefore y\in\{3,5,7,9,11\}$，

$\therefore$ 函数 $y=2x+1$ 的值域为 $\{3,5,7,9,11\}$.

> **指点迷津**
> 在求函数的值域时，一定要优先考虑函数的定义域.

解题锦囊 运用直接法求解，是通过对解析式的简单变形和观察，利用熟知的基本函数的值域，来求出待求函数的值域；另外，优先考虑函数的定义域.

母题 2 ★★★ 求下列函数的值域：

(1) $y=x^2-6x-5$；

(2) $y=x^2-2x+5$，其中 $x\in[-1,2]$.

分析：(1)将原式配方成"$-(x+3)^2+4$"的形式，再根据 $(x+3)^2\geqslant 0$ 求出 y 的取值范围. (2)配方后由于 x 有范围，此时要根据函

> **指点迷津**
> 对于第(2)题切勿盲目地认为 $f_{\min}(x)=f(-1)$，$f_{\max}(x)=f(2)$.

学习心得

数图象确定 y 的取值范围.

解答:(1) $y=-x^2-6x-5=-(x+3)^2+4$,

$\because (x+3)^2\geqslant 0, -(x+3)^2+4\leqslant 4$,

$\therefore$ 原函数值域为 $y\in(-\infty,4]$.

(2)将函数配方得:$y=(x-1)^2+4$,

$\because x\in(-1,2)$,根据二次函数的图象,

有 $f_{\min}(x)=f(1)=4, f_{\max}(x)=f(-1)=8$,

$\therefore$ 函数的值域是 $y\in(4,8)$.

解题锦囊 对于二次函数型的解析式求值域,应采用配方法与函数图象结合进行求解,即可先对函数解析式进行配方,结合二次函数图象来求,要充分注意到自变量取值范围的情况.

母题 3 ★★★ 求函数 $y=\dfrac{1+x+x^2}{1+x^2}$ 的值域.

指点迷津

用判别式法求函数的值域时要注意交代 $\Delta\geqslant 0$ 中的等号能否取到,否则容易出错.

分析:这是有理式函数,去分母后化成关于 x 的二次方程,用判别式法求值域;

解答:$\because 1+x^2\neq 0$,

$\therefore$ 原函数化为关于 x 的一元二次方程 $(y-1)x^2-x+(y-1)=0$.

①当 $y=1$ 时,$1+x^2=1+x+x^2\Rightarrow x=0$(符合题意).

②当 $y\neq 1$ 时,$\Delta=(-1)^2-4(y-1)(y-1)\geqslant 0$,

解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant \dfrac{3}{2}$ 且 $y\neq 1$,

$\therefore \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant \dfrac{3}{2}$.

解题锦囊 对于求一些分式函数的值域问题,常用判别式法,即将函数视为关于自变量的二次方程,利用判别式 $\Delta\geqslant 0$ 求函数值的范围,使用此方法要特别注意自变量的取值范围.

母题 4 ★★★ 求函数 $y=x+2\sqrt{1-x}$ 的值域.

指点迷津

解此题的关键是将解析式变为有理式,转变过程中要注意 t 的取值范围.

分析:此题中的函数解析式含有无理式,因此可用换元法求值域,即设 $\sqrt{1-x}=t$,从而用 t 表示 x,将整个函数换成关于 t 的二次函数.

解答:设 $\sqrt{1-x}=t(t\geqslant 0)$,则 $x=1-t^2$,

原函数可化为:$y=-t^2+2t+1(t\geqslant 0)$,

$\because$ 对称轴 $t=1\in(0,+\infty)$,且开口向下,

$\therefore$ 当 $t=1$ 时,$y_{\max}=2$.

$\therefore$ 原函数值域为 $(-\infty,2)$.

解题锦囊 解此类题目时一般用换元法,通过对函数解析式中的某一部分进行适当的换元,将复杂的函数化归为几个简单的函数,从而利用基本函数的取值范围来求函数的值域. 换元法主要适用于根式内外皆为一次式的函数.