2010

高中数学联赛备考手册

（预赛试题集锦）

中国数学会普及工作委员会　组编
各省市数学会 联合编写

Mathematics

华东师范大学出版社

2010
高中数学联赛备考手册

（预赛试题集锦）

中国数学会普及工作委员会　组编

安徽省数学会
甘肃省数学会
河北省数学会
黑龙江省数学会
湖南省数学会
江苏省数学会
辽宁省数学会
山西省数学会
四川省数学会
浙江省数学会
福建省数学会
贵州省数学会
河南省数学会
湖北省数学会
吉林省数学会
江西省数学会

联合编写

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛备考手册:2010.预赛试题集锦/中国数学会普及工作委员会组编.—上海:华东师范大学出版社,2009.11
ISBN 978-7-5617-7338-3

Ⅰ.高… Ⅱ.中… Ⅲ.数学课—高中—试题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第206699号

高中数学联赛备考手册(2010)
(预赛试题集锦)

组 编 者 中国数学会普及工作委员会
策划编辑 倪 明(数学工作室)
组稿编辑 孔令志
审读编辑 孔令志 王元兴
装帧设计 黄惠敏

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路3663号 邮编200062
电话总机 021-62450163转各部门 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 浙江省临安市曙光印务有限公司
开 本 890×1240 32开
印 张 7.5
字 数 196千字
版 次 2010年1月第1版
印 次 2010年1月第1次
印 数 18000
书 号 ISBN 978-7-5617-7338-3/G·4231
定 价 16.00元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

编委会成员

前言

《高中数学联赛备考手册(2010)(预赛试题集锦)》就要出版了。我谨代表中国数学会普及工作委员会感谢参与这项工作的各位同仁。希望这份材料对同学们和老师们有所帮助。

2009 年是全国高中数学联赛调整的一年。根据“第十五次全国数学普及工作会议”的精神,我们专门成立了一个研究小组。经过广泛调研,该小组酝酿提出了一个“全国高中数学联赛调整方案(讨论稿)”。2008 年 12 月中旬讨论稿发往 31 个赛区征求意见。2009 年中国数学奥林匹克(第 24 届全国中学生数学冬令营)期间召开了普委会工作会议,就调整方案展开了认真细致的研究,最终形成了下面的正式文件:

关于全国高中数学联赛调整方案的通知

2009 年中国数学奥林匹克(第 24 届全国中学生数学冬令营)期间召开了普委会工作会议。会上大家就方案中一试和二试的时间分配、权重分配、试卷结构的调整问题展开了认真细致的讨论。

大家普遍认为,在现阶段进行这样的调整是必要的,同意从 2009 年全国高中数学联赛(黑龙江省数学会承办)起执行新方案。具体安排如下:

一试考试时间为 8:00—9:20,共 80 分钟,包括 8 道填空题(每题 7 分)和 3 道解答题(分别为 14 分、15 分、15 分),满分 100 分。

二试考试时间为 9:40—12:10,共 150 分钟,包括 4 道解答题,涉及平面几何、代数、数论、组合四个方面。每题 50 分,满分 200 分。

请各地及时将以上调整通知相关单位。

中国数学会普及工作委员会

2009年2月3日

为了配合全国联赛的变化，不少赛区的预赛也进行了适当调整。第一次实施新方案，对于承办单位来说压力不小，主要是没有可借鉴的经验。黑龙江数学会的各位同仁经过一年的辛勤工作，圆满顺利地完成了联赛的各项工作，我们要对他们表示感谢。也欢迎大家继续关注新方案，提出进一步的意见和建议，共同把这项活动搞好，以适应新的环境和需要。

作为中国数学会主办的系列活动的第一个环节，全国高中数学联赛的功能之一就是确定来年冬令营的入营资格。经普及工作委员会与奥林匹克委员会协商，对积极承办各项赛事的单位，根据全国高中数学联赛成绩适当奖励进入全国中学生数学冬令营的名额。这些单位包括：承办当年全国中学生数学冬令营，上年IMO国家集训队培训、IMO国家队培训、中国女子数学奥林匹克、中国西部数学奥林匹克的中学，以及上年全国高中数学联赛承办省份。

以上算是对今年联赛工作的一个小小盘点吧。

吴建平

2009年11月16日

目　录

01

2009 年全国高中数学联赛
天津市预赛

2009 年全国高中数学联赛天津市预赛于 2009 年 9 月 20 日举行，共有 5000 多名中学生参加此次预赛，从中选拔出 900 多名学生参加于 2009 年 10 月 11 日举行的全国高中数学联赛.

天津市预赛所涉及的知识范围基本参照现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，但在方法的要求上有所提高. 试题主要考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力. 试卷包括 8 道填空题和 3 道解答题，全卷满分 100 分，考试时间为两小时.

天津市预赛的命题工作由天津市数学会负责，组织工作由科协五学科竞赛管理委员会办公室负责，阅卷及报送参加全国高中数学联赛的名单由各区县教研室具体实施.

试 题

一、填空题(每小题 7 分,共 56 分)

1 设 a、b、c 为实数,且满足 $a+b+c=15$, $a^2+b^2+c^2=100$,则 a 的最大值和最小值的积为________.

2 已知△ABC 是正三角形,M、N 分别为边 BC、BA 的中点,O 为△BMN 的外心,在边 AC 上有一点 D,使得△AOD 的面积等于△ABC 的面积的 $\frac{1}{n}$,其中 n 为大于 1 的正整数,则 $\frac{AD}{DC}$ 的值为________.

3 甲在黑板上写下正整数 1, 2, …, 2009,然后背对黑板,让乙将黑板上的这些数擦去若干个后再添加上擦去数之和被 7 除的余数. 当经过若干次如上操作以后使黑板上只剩下两个数,其中的一个数是一位数. 甲问乙:"剩下的两个数中较大的数是几?"乙答:"100."则剩下的两个数中的那个一位数为________.

4 方程 $\pi^{x-1}x^2+\pi^{x^2}x-\pi^{x^2}=x^2+x-1$ 的解的个数为________,其中 π 为圆周率.

5 已知正整数 $n=abc<10\,000$,其中 a、b、c 均为素数,且 $2a+3b=c$, $4a+c+1=4b$,则 n 的值为________.

6 已知二次函数 $y=x^2-\frac{2n+1}{n(n+2)}x+\frac{n+1}{n(n+2)^2}$ 在 x 轴上截得的线段的长为 d_n,则 $\sum\limits_{n=1}^{100}d_n=$________.

7 已知椭圆 Γ_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和双曲线 Γ_2: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,其中 $a>b>0$,椭圆 Γ_1 的左右焦点分别为 F_1、F_2,双曲线 Γ_2 的左右焦点分别为 F_3、F_4,过 F_4 作一条直线,与椭圆交于两个不同的点 A、B,其中 B 在 A、F_4 之间,直线 F_3A 与 F_2B 交于点 C,若直线 AF_2、BF_3、CF_1 三线交于一点,则 $\frac{a^2}{b^2}=$________.

8 已知正 200 边形 $A_1A_2\cdots A_{200}$，连结对角线 A_iA_{i+9}（$i=1, 2, \cdots, 200$），其中 $A_{i+200}=A_i$（$i=1, 2, \cdots, 9$），则这 200 条对角线在正 200 边形的内部有________个不同的交点.

二、解答题（本大题共 3 小题，共 44 分）

9 （14 分）已知 C、D 是以 AB 为直径的半圆 O 上的两个点，弦 AD、BC 交于点 E，F、G 分别是 AC、BD 延长线上的点，且满足 $AF\cdot BG=AE\cdot BE$，若$\triangle AEF$、$\triangle BEG$ 的垂心分别为 H_1、H_2，证明(1)AH_1、BH_2 的交点 K 在圆 O 上；(2)F、K、G 三点共线.

10 （15 分）已知正数列 $\{a_n\}$（$n\geqslant 0$）满足 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{ma_{n-2}}$，$n=2, 3, \cdots$，其中 m 为实参数，若 $a_{2009}=\dfrac{a_0}{a_1}$，求 m 的值.

11 （15 分）将边长为 3 的正$\triangle ABC$ 的各边三等分，过每个分点分别作另外两边的平行线，称$\triangle ABC$ 的边及这些平行线所交的 10 个点为格点. 若在这 10 个格点中任取 n 个格点，一定存在三个格点能构成一个等腰三角形（包括正三角形），求 n 的最小值.

解　答

1 $\dfrac{25}{3}$　提示：因为

$$100-a^2=b^2+c^2\geqslant\frac{1}{2}(b+c)^2=\frac{1}{2}(15-a)^2,$$

所以有 $3a^2-30a+25\leqslant 0$. 由于 a 的最大值和最小值就是方程 $3a^2-30a+25=0$ 的两个根，且 a 的最大值和最小值是可以取到的，因此，由韦达定理可得 a 的最大值和最小值的积为$\dfrac{25}{3}$.

2 $\dfrac{3}{2n-3}$　提示：因为 O 到 AC 的距离等于 B 到 AC 的距离的$\dfrac{2}{3}$，

所以$\dfrac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AD\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}AC\cdot 1}=\dfrac{1}{n}$,即$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{3}{2n}$,从而有$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{3}{2n-3}$.

3 5 提示:因为 $1+2+\cdots+2009\equiv 0\pmod 7$,所以那个一位数 a 满足$100+a\equiv 0\pmod 7$,因此 $a\equiv 5\pmod 7$,即 $a=5$.

4 2 提示:原方程变形后为 $x^2(\pi^{x-1}-1)+(x-1)(\pi^{x^2}-1)=0$,当 $x\neq 0,1$ 时,$x^2(\pi^{x-1}-1)$ 与$(x-1)(\pi^{x^2}-1)$ 同号,因此 $x=0,1$. 所以解的个数为 2.

5 1118 提示:因为 $b=6a+1$,$c=20a+3$,所以 $a(6a+1)(20a+3)<10\,000$,即 $120a^3<10\,000$,可知 $a<5$. 又因为 $c=20a+3$ 为素数,所以 $a\neq 3$. 于是$a=2$,$b=13$,$c=43$,$n=1118$.

6 $\dfrac{7625}{10\,302}$ 提示:因为

$$d_n=\sqrt{\left(\frac{2n+1}{n(n+2)}\right)^2-\frac{4(n+1)}{n(n+2)^2}}=\frac{1}{n(n+2)},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100}d_n&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)=\frac{7625}{10\,302}.\end{aligned}$$

7 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ 提示:由塞瓦定理知

$$\frac{F_3F_1}{F_1F_2}\cdot\frac{F_2B}{BC}\cdot\frac{CA}{AF_3}=1.$$

由梅涅劳斯定理知

$$\frac{F_3F_4}{F_4F_2}\cdot\frac{F_2B}{BC}\cdot\frac{CA}{AF_3}=1.$$

于是有 $\dfrac{F_3F_1}{F_1F_2}=\dfrac{F_3F_4}{F_4F_2}$. 因为

$$F_3F_1 = \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2-b^2} = F_4F_2,$$
$$F_1F_2 = 2\sqrt{a^2-b^2},\ F_3F_4 = 2\sqrt{a^2+b^2}.$$

所以

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}{2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}},$$

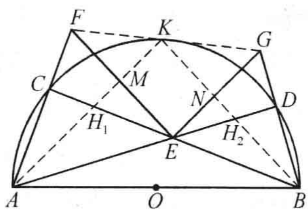
整理后得 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

8 1600　提示:对于每条对角线 A_iA_{i+9}($i = 1, 2, \cdots, 200$), $A_{i+1}, A_{i+2}, \cdots, A_{i+8}$ 各引出两条对角线与 A_iA_{i+9} 相交,由于每个这样的交点被计算了两次,所以这 200 条对角线在正 200 边形的内部不同的交点的数目不超过 $\frac{2\times 8\times 200}{2} = 1600$(个). 下面证明不存在三条这样的对角线交于一点.

由于每条对角线等长,因此这 200 条对角线都与一个定圆相切. 因为由交点只能作两条切线,所以不可能有三条这样的对角线交于一点.

9 (1) 因为 $\angle CAD = \angle CBD$, $\frac{AF}{AE} = \frac{BE}{BG}$, 所以 $\triangle AEF \backsim \triangle BGE$. 又因为 $BC \perp AF$, $AD \perp BG$, 所以

$$\angle CEF + \angle BEG = \angle CEF + \angle CFE = 90^\circ,$$



(第 9 题)

于是有 $\angle FEG = 90^\circ$. 设 AK、BK 分别与 EF、EG 交于点 M、N,则四边形 $MENK$ 为矩形,因此 $\angle AKB = 90^\circ$, 即 K 在圆 O 上.

(2) 因为 AM、BN 分别是相似$\triangle AEF$ 与$\triangle BGE$ 对应边上的高线,所以有 $\frac{GN}{NE} = \frac{EM}{MF}$.

又因为 $NE = MK$, $EM = NK$, 所以 $\frac{GN}{MK} = \frac{NK}{MF}$. 由于

$\angle FMK=\angle KNG=90^\circ$，因此有$\triangle MFK\backsim\triangle NKG$，于是可得

$$\angle FKM+\angle GKN=\angle FKM+\angle KFM=90^\circ,$$

即

$$\angle FKM+\angle GKN+\angle MKN=180^\circ,$$

从而有 F、K、G 三点共线.

10 因为 $a_2=\dfrac{a_1}{ma_0}$，$a_3=\dfrac{\dfrac{a_1}{ma_0}}{ma_1}=\dfrac{1}{m^2a_0}$，$a_4=\dfrac{\dfrac{1}{m^2a_0}}{m\dfrac{a_1}{ma_0}}=\dfrac{1}{m^2a_1}$，

$a_5=\dfrac{\dfrac{1}{m^2a_1}}{m\dfrac{1}{m^2a_0}}=\dfrac{a_0}{ma_1}$，$a_6=\dfrac{\dfrac{a_0}{ma_1}}{m\dfrac{1}{m^2a_1}}=a_0$，$a_7=\dfrac{a_0}{m\dfrac{a_0}{ma_1}}=a_1$，所以数列$\{a_n\}$是周期为 6 的周期数列，因此

$$\frac{a_0}{a_1}=a_{2009}=a_5=\frac{a_0}{ma_1},$$

于是有 $m=1$.

11 设 AB 边上从 A 到 B 的两个等分点分别为 D、E；BC 边上从 B 到 C 的两个等分点分别为 F、G；CA 边上从 C 到 A 的两个等分点分别为 H、I，中间的一个格点为 K.

若 n 的最小值为 4，取格点 A、D、E、B，则不存在三个格点能构成一个等腰三角形，因此 $n\geqslant 5$.

下面证明任取 5 个格点，一定存在三个格点能构成一个等腰三角形.

不妨假设被选取的点为红点. 我们证明一定存在一个由红点构成的等腰三角形.

若这 5 个红点中包含格点 K，将其他 9 个格点分成三个点集 $L=\{D, E, F\}$，$M=\{G, H, I\}$，$N=\{A, B, C\}$，由抽屉原则，一定存在一个点集中包含至少两个红点，无论是哪个点集中的哪两个格点是红点，均与红点 K 构成一个等腰三角形.

若这5个红点中不包含格点K,当格点A是红点时,则$U=\{D, I\}, V=\{E, H\}, W=\{F, G\}, T=\{B, C\}$中如果有一个点集中包含两个红点,则结论成立,否则每个点集中均恰有一个红点.不妨假设D为红点,则I不是红点.若B为红点,则G、C不是红点,于是F是红点,且无论E、H哪个是红点,均与D、F构成一个等腰三角形;若B不是红点,则C为红点,于是E不是红点,H是红点,无论F、G哪个是红点,均可与D、H或H、C构成一个等腰三角形.同理若格点B或C为红点时,结论仍然成立.

若K、A、B、C均不是红点,则D、E、F、G、H、I中有5个红点,结论显然成立.

02

2009 年全国高中数学联赛
河北省预赛

受河北省数学会委托,河北省数学会普及工作委员会会同河北师范大学数学与信息科学学院共同组织承办了 2009 年河北省高中数学竞赛.

河北省高中数学竞赛所涉及的知识范围不超出现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求,在方法的要求上略有提高. 主要考查学生对基础知识和基本技能的掌握情况,以及综合、灵活运用知识的能力. 试卷包括 6 道选择题、6 道填空题和 5 道解答题,全卷满分 150 分. 竞赛活动在 2009 年 5 月 17 日(星期日)上午举行.

参加比赛的学生来自河北省 11 个地市,约 33 000 人. 通过比赛,根据成绩按赛区选拔 1800 名同学参加 2009 年全国高中数学联赛.

试 题

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1 将数列 $\{2n-1\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 依原顺序按第 n 组有 2^n 项的要求分组,则 2009 在第(　　)组.

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 10

2 如果函数 $f(x)=a^x(a^x-3a^2-1)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数,那么实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$

(C) $(0,\sqrt{3}]$　　(D) $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

3 设函数 $f(x)=\ln x$, $g(x)=ax+\dfrac{b}{x}$,它们的图象在 x 轴上的公共点处有公切线,则当 $x>1$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是(　　).

(A) $f(x)>g(x)$　　(B) $f(x)<g(x)$

(C) $f(x)=g(x)$　　(D) 不确定

4 设 A、B 是球的一条直径的两个端点,π 是过点 A 且垂直于 AB 的一个平面. C、D 是球面上不同于 A、B 的两个点,延长 BC、BD,分别交平面 π 于 E、F 两点. 若 A、E、F 三点构成等腰三角形,则 AB 与 CD 的位置关系是(　　).

(A) AB 与 CD 垂直　　(B) AB 与 CD 平行

(C) AB 与 CD 垂直且异面　　(D) 不能确定

5 已知 $x, y, z\in(0,1)$且 $x+y+z=2$,则 $xy+yz+zx$ 的取值范围是(　　).

(A) $\left(0,\dfrac{4}{3}\right]$　　(B) $\left(1,\dfrac{4}{3}\right]$

(C) $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{4}{3},2\right)$

6 方程 $\frac{x^2}{\sin(19^n)^\circ}+\frac{y^2}{\cos(19^n)^\circ}=1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 所表示的曲线为（　　）.

（A）焦点在 x 轴上的双曲线

（B）双曲线，其焦点所在的轴与 n 有关

（C）焦点在 y 轴上的椭圆

（D）椭圆，其焦点所在的轴与 n 有关

二、填空题（每小题 9 分，共 54 分）

7 过定点 $F(2,0)$ 作直线 l 交 y 轴于 Q 点，过 Q 点作 $QT\perp FQ$ 交 x 轴于 T 点，延长 TQ 至 P 点，使 $|TQ|=|QP|$，则 P 点的轨迹方程为________.

8 已知正四面体 $S-ABC$ 的棱长为 a，其内部有四个半径相同两两相切的小球，且每个小球都与相邻的三个面相切，则小球的半径为________.

9 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比 $q\in(1,2)$，当 $1\leqslant n\leqslant 6$ 时，a_n 为正整数，那么 a_6 的最小值为________.

10 甲、乙、丙、丁四个人做传球练习，球首先由甲传出，每个人得到球后都等可能地传给其余三个人之一，设 p_n 表示经过 n 次传递后球回到甲手中的概率，则 $p_6=$________.

11 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(1+x)=f(1-x)$，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，则 $f(8.5)$ 与 $f(-4.8)$ 的大小关系是________.

12 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$a_k=\left[\frac{2009}{k}\right]$，$k=1,2,\cdots,100$，则这 100 个整数中不同的整数的个数为________.

三、解答题（共 60 分）

13 （10 分）如果存在 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=2009$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，其中 $x_i=\pm7$，$i=1,2,\cdots,$