李 炜◎著

线性优化及其扩展

国防工业出版社
National Defense Industry Press

线性优化及其扩展

李炜 著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书全面、系统地介绍了线性优化问题的理论与方法，包括了近年来国际、国内关于线性优化研究的一些最新成果。全书共分9章，第1章至第4章主要介绍线性优化的基础理论，包括单纯形算法、对偶理论、灵敏度分析以及线性规划问题解集的讨论。第5章介绍了单纯形算法的若干扩展。第6章至第8章介绍线性优化问题的内点法与混合算法。第9章介绍近年来出现的区间线性优化问题的基本理论与算法。

本书可以作为应用数学、计算数学、运筹学与控制论、管理科学与工程、工业工程、系统工程及相关专业的研究生或高年级本科生的教材或参考书，也可供从事与优化有关领域的科研和工程技术人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

线性优化及其扩展/李炜著．—北京：国防工业出版社，2011.8

ISBN 978-7-118-07406-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性规划—研究 Ⅳ.①O221.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第099449号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本787×1092 1/16 印张15¼ 字数350千字

2011年8月第1版第1次印刷 印数1—3000册 定价32.00元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

线性优化(或称线性规划)研究的是线性函数在一组线性等式或不等式约束下的最优值问题。自从 G. B. Dantzig 于 1947 年提出著名的单纯形算法后,线性优化问题引起了理论工作者和实际工作者的浓厚兴趣。1979 年,Khachian 提出了线性优化问题的第一个多项式时间算法——椭球法,从理论上看该算法优于单纯形算法;1984 年,Karmarkar 创立了内点法,该方法不仅具有多项式时间复杂性,而且在求解大型线性规划问题时的计算性能也超过了单纯形法。这三种方法构成了线性规划历史上的三个里程碑。

时至今日,线性规划已被广泛应用于工业、农业、商业、金融、管理、军事等各个领域并获得了辉煌的成就。如著名华裔运筹学家于刚教授和他带领的团队运用线性优化模型所获得的有关适时恢复航班运营的研究成果,仅在 2001 年就为美国大陆航空公司创造了超过 6000 万美元的实际价值。可以毫不夸张地说,线性规划问题的提出与广泛应用,是 20 世纪运筹学界最有意义的成就之一。

本书的编写目的是为应用数学、计算数学、运筹学与控制论、管理科学与工程、工业工程、系统工程及相关专业的研究生或高年级本科生提供一本教科书或参考书,从事与优化有关领域的科研和工程技术人员也能从中获益。为此,本书系统地介绍了线性规划的单纯形法、内点法以及新近提出的混合算法的理论与实现技巧,其中包含了近年来国内外学者们提出的线性优化的一些新算法,特别是包含了作者最近的一些研究成果。本书还专辟一章介绍了近十余年发展起来的带区间系数线性优化模型的理论、算法以及最新进展。

全书共分 9 章,第 1 章至第 3 章主要介绍线性优化的基础理论,包括单纯形算法、对偶理论和灵敏度分析。在这三章中,我们在介绍经典理论的同时也融入了传统方法的最新改进。第 4 章讨论线性规划问题最优解集的特征,这一问题在目前已出版的一些专著中没有得到完整的论述。第 5 章介绍单纯形算法的若干扩展。为了本书的后续内容及自足性,第 6 章概述非线性规划的相关内容。第 7 章与第 8 章介绍线性优化问题的内点法与混合算法。第 9 章介绍关于近年来出现的区间线性优化问题的基本理论与算法。本书将重点放在算法的基本思想与分析技巧上,在介绍已有算法的同时,指出了一些值得进一步研究的课题与方向。

在本书的编写过程中,笔者参考了大量的学术论文与专著,有些素材就取自其中。一些主要的参考文献都列入书末,并在此一并向有关作者致谢。校博士点支撑学科发展基金对本书进行了资助,笔者的研究生协助打印了部分书稿,这里特致谢意。同时,向关心、支持和帮助我的工作的领导、同事和家庭表示衷心的感谢。

由于水平有限,书中难免存在一些缺点甚至错误,欢迎本书的读者不吝赐教。

目　录

第 1 章　线性规划引论

1.1　线性规划问题的实例与数学模型

在人们的生产实践等活动中常提出这样一类问题，即如何有效地分配现有资源，以期获得最佳的效果。

例 1.1　资源利用问题

某厂计划在一个生产周期内生产 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 共 n 种产品，要消耗 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 共 m 种资源，已知每件产品所消耗的资源数、每种资源的数量限制以及每件产品的利润见表 1.1。问如何安排生产计划，才能使总利润最大？

表 1.1

资源 \ 单位消耗 \ 产品	B_1　B_2　$\cdots$　B_n	资源限制
A_1	a_{11}　a_{12}　$\cdots$　a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}　a_{22}　$\cdots$　a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$　$\vdots$　$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}　a_{m2}　$\cdots$　a_{mn}	b_m
单件利润	c_1　c_2　$\cdots$　c_n	

设安排生产产品 B_j 的生产量为 x_j（称为决策变量），$j=1,2,\cdots,n$。则此问题的数学模型为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, i = 1,2,\cdots,m,$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n.$$

例 1.2　配料问题

某饲料场用 n 种配料配制成含有 m 种营养成分的混合饲料，要求每一份混合饲料中第 i 种营养成分的含量不能低于 b_i。已知每单位的第 j 种配料中所含第 i 种营养成分的量为 a_{ij}，每单位的第 j 种配料的价格为 c_j（见表 1.2）。问应如何配料才能满足需求，且使得混合饲料的总成本最低？

表 1.2

营养成分 \ 含量 \ 配料	B_1 B_2 $\cdots$ B_n	最低需求量
A_1	a_{11} a_{12} $\cdots$ a_{1n}	b_1
A_2	a_{21} a_{22} $\cdots$ a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1} a_{m2} $\cdots$ a_{mn}	b_m
原料单价	c_1 c_2 $\cdots$ c_n	

设 x_j 表示每一份混合饲料中第 j 种配料的含量，则该问题的数学模型为

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, i = 1,2,\cdots,m,$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n.$$

这些问题的具体意义不同，但它们的数学模型却有一些共同的特点：都是在求一组非负的决策变量 x_j，使在一组线性约束条件下，让一个线性函数达到其极值。这就是所谓的线性规划问题。简言之，线性规划问题(Linear Programming)就是在一组线性的等式或不等式约束之下，求一个线性函数的最大值或最小值的问题。

线性规划问题的一般形式为

$$\min(\text{或} \max)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i, i = 1,2,\cdots,m, \tag{1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n. \tag{1.3}$$

式(1.1)称为目标函数，式(1.2)和式(1.3)称为约束条件。特别称式(1.3)为非负约束条件。

以上给出的是线性规划问题的一般形式。对于不同的问题而言，目标函数可以是求最大值或最小值，约束条件可以是线性等式约束或不等式约束，变量可以有上、下界限制或无限制。为了研究问题的方便，可以将线性规划问题统一写成标准形式。

线性规划问题的标准形式为

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.4}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m, \tag{1.5}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n. \tag{1.6}$$

其矩阵形式为

$$\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}, \tag{1.7}$$

$$\text{s. t. } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\ , \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant 0. \tag{1.9}$$

其中：$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$；$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$。称 $\boldsymbol{A}$ 为约束矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为右端向量，$\boldsymbol{c}$ 为目标函数系数（也常称为价值系数）。

将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$，则得到线性规划问题的向量形式为

$$\left.\begin{aligned} &\min z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \\ &\text{s. t. } \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}, \\ &\quad \boldsymbol{x} \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

任何一个线性规划问题都可以化为标准形式，可分为如下几种情况来讨论。

(1) 目标函数的转换。如果原问题是 $\max z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，则可等价的转换为

$$\min\ (-z) = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

(2) 约束条件的转换。如果某一约束条件是线性不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \left(\text{或} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i\right),$$

则可引入松弛变量 $x_{n+i} \geqslant 0$，等价地化上式为

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \left(\text{或} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i\right), \\ &x_{n+i} \geqslant 0. \end{aligned}$$

(3) 变量的转换。如果某个变量的约束条件为 $x_j \geqslant l_j\ (x_j \leqslant l_j)$，则令

$$y_j = x_j - l_j\ (y_j = l_j - x_j),$$

则 y_j 为非负变量；

如果 x_j 无上下界约束（称为自由变量），则可令

$$x_j = u_j - v_j, u_j, v_j \geqslant 0$$

来代替。

例 1.3 将下列线性规划问题化为标准形式

$$\begin{aligned} &\max z = 2x_1 - 3x_2, \\ &\text{s. t. } 4x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ &\qquad x_1 + 3x_2 \leqslant 5, \\ &\qquad x_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

解 对两个不等式约束条件引入松弛变量 x_3 和 x_4，自由变量以 $x_2 = x_5 - x_6$ 来代替，再将目标函数取反号而求最小，便得到标准形的线性规划问题，即

$$\begin{aligned} &\min z' = -2x_1 + 3x_5 - 3x_6, \\ &\text{s. t. } 4x_1 - x_3 + x_5 - x_6 = 1, \\ &\qquad x_1 + x_4 + 3x_5 - 3x_6 = 5, \\ &\qquad x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0. \end{aligned}$$

我们知道，对于只有两个变量的线性规划问题，可以利用图解法来求解。其方法是先

画出约束所界定的区域(可行域),再根据目标函数之等值线的移动来确定最优解。对于只有三个变量的线性规划问题,从理论上讲,也可以用图解法来求解,但由于三维空间作图比较复杂,故图解法很少用来求解三个以上变量的线性规划问题。稍后可以看到,在一定的条件下,图解法的适用范围可以得到拓宽。

1.2 线性规划问题的基础理论

在讨论线性规划问题的求解方法之前,先要了解线性规划问题的一些基础理论。考虑如下标准形式的线性规划问题

$$\begin{aligned} \min z &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \\ \text{s. t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} &\geqslant 0. \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵;$\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量;$\boldsymbol{b}$ 为 m 维列向量;以下总设秩$(\boldsymbol{A})=m<n$。称集合

$$D=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\} \tag{1.11}$$

为线性规划问题的可行域,称 $\boldsymbol{x}\in D$ 为该问题的可行解。对于一个可行域非空的线性规划问题,如果它有一个可行解 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 使得 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*\leqslant\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in D$,则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是该线性规划问题的最优解。

给定实数 $\beta\in R^1$ 及非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in R^n$,称

$$H=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\beta\} \tag{1.12}$$

为一个超平面。线性规划的每个等式约束都是一个超平面。一个超平面把整个空间分割成两个闭半空间

$$H^{\mathrm{L}}=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\beta\},$$

及

$$H^{\mathrm{U}}=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\beta\}.$$

设集合 $C\subset R^n$,若对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C,\lambda\in[0,1]$有

$$\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in C,$$

则称 C 为凸集(Convex Set)。

由凸集的定义容易证明线性规划的可行域 D 是凸集。有限个闭半空间的交是凸集,这样的集合称为多面凸集,所以多面凸集可以写为

$$\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\}$$

的形式。由于一个等式可等价地写为两个不等式,故线性规划的可行域 D 也是多面凸集。

设 C 是一个凸集,若点 $\boldsymbol{x}\in C$ 且 $\boldsymbol{x}$ 不是 C 中另外两个不同点的凸组合,则称它是 C 的一个极点。换言之,设 $\boldsymbol{x}\in C$,若 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in C,\lambda\in(0,1)$,则必有 $\boldsymbol{x}^1=\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}$,则称 $\boldsymbol{x}$ 为 C 的极点。

称约束方程组(1.5)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 $m\times m$ 阶的非奇异的子方阵 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划问题的一个基(Basis)或基矩阵;$\boldsymbol{B}$ 中 m 个线性无关的列向量称为基向量

(Basic Vector)；$\boldsymbol{x}$ 中与之对应的 m 个分量称为基变量(Basic Variable)，其余的变量称为非基变量。非基变量对应 $\boldsymbol{A}$ 中的子矩阵 $\boldsymbol{N}$ 称为非基(Nonbasis)或非基矩阵。

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成分块形式

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}).$$

相应地，将基变量和非基变量组成的向量分别记为 $\boldsymbol{x}_B$ 和 $\boldsymbol{x}_N$，则约束方程组可写为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = b. \tag{1.13}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是可逆的，两边左乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，移项后得

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}b - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N. \tag{1.14}$$

令 $\boldsymbol{x}_N=0$，则 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。我们称约束方程组的这种特殊形式的解

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

为线性规划问题的一个基本解(Basic Solution)。如果 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是该线性规划问题的一个基本可行解(Basic Feasible Solution)。

因为基 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $m\times m$ 阶的非奇异子方阵，即它的列是从 $\boldsymbol{A}$ 的 n 列中选出的 m 个线性无关的列，其选法最多有 C_n^m 个，故基的个数最多是 C_n^m 个，所以一个线性规划问题的基本解最多有 C_n^m 个。

一般也用 B,N 来记基变量与非基变量的下标集；而 $q\in N$ 表示 $\boldsymbol{x}_q$ 为非基变量，$p\in B$ 表示 $\boldsymbol{x}_p$ 为基变量。

在线性规划问题中，基本可行解是一个重要概念。判断一个基本解是不是基本可行解，只要看是否有 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$。下面的定理将给出判别一个可行解是否是基本可行解的条件。

定理 1.1 可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是基本可行解的充要条件是它的非零分量所对应的列向量线性无关。

证明 若 $\bar{\boldsymbol{x}}=0$，注意到 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是可行解，可取 $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个线性无关列向量为基，显然 $\bar{\boldsymbol{x}}=0$ 就是对应这个基的基本可行解。下设 $\bar{\boldsymbol{x}}\neq 0$，不失一般性，不妨设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的前 k 个分量为正，即有

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_k,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\bar{x}_j > 0, j = 1,2,\cdots,k.$$

若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是基本可行解，则它的非零分量必是基变量，它们所对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 是基向量，故必线性无关。

反之，若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 线性无关，则必有 $k\leqslant m$。由于 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是可行解，所以成立 $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}$，亦即

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}.$$

若 $k=m$，则 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k)$ 就是一个基，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 所对应的基本可行解；若 $k<m$，则可以从其余的 $n-k$ 个列向量中再挑出 $m-k$ 个，设为 $\boldsymbol{a}_{k+1},\boldsymbol{a}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{a}_m$，使 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_{k+1},\boldsymbol{a}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 构成基 $\boldsymbol{B}$。注意到 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 中对应于列 $\boldsymbol{a}_{m+1},\boldsymbol{a}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的分量全为 0，故 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 就是相应于 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解，证毕。

注 从定理 1.1 的证明中可以看出，把非负性的条件去掉并不影响证明过程。故可以得到结论：满足约束方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是基本解的充要条件是它的非零分量所对应的列向量线性无关。

定理 1.2 若一个线性规划问题有可行解，则它必有基本可行解。

证明 设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是一个可行解。若 $\bar{\boldsymbol{x}}=0$，则显然它是一个基本可行解，定理成立。若 $\bar{\boldsymbol{x}}\neq 0$，不妨设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的前 k 个分量为正分量，即

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_k,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\bar{x}_j > 0, j = 1,2,\cdots,k;k \leqslant m.$$

如果 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 线性无关，则由定理 1.1 知 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是一个基本可行解，定理成立。否则，设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 线性相关，即存在不全为零的数 $d_1,d_2,\cdots,d_k$，使得 $\sum\limits_{j=1}^{k}d_j\boldsymbol{a}_j=0$，即有

$$\boldsymbol{Ad} = 0,$$

其中：$\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_k,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$。

令

$$\boldsymbol{x}^1 = \bar{\boldsymbol{x}} + \varepsilon\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}^2 = \bar{\boldsymbol{x}} - \varepsilon\boldsymbol{d},$$

则当 ε 充分小时必有 $\boldsymbol{x}^1\geqslant 0,\boldsymbol{x}^2\geqslant 0$。又由于 $\boldsymbol{Ad}=0$，故

$$\boldsymbol{Ax}^1 = \boldsymbol{Ax}^2 = \boldsymbol{b},$$

所以 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2$ 是两个可行解。如果取 $\varepsilon=\min\left\{\dfrac{\bar{x}_j}{|d_j|}\,\middle|\, d_j\neq 0\right\}$，则 $\boldsymbol{x}^1$ 或 $\boldsymbol{x}^2$ 第 $j(1\leqslant j\leqslant k)$ 个分量中至少有一个等于零，于是它的非零分量个数比 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 减少 1 个。如果这些非零分量所对应的列向量线性无关，则 $\boldsymbol{x}^1$ 或 $\boldsymbol{x}^2$ 为基本可行解，定理成立。否则，重复以上步骤，可以构造成一个非零分量个数不断减少的可行解序列。这样经过有限次重复之后，必可得到基本可行解。

下面的定理给出了基本可行解的几何特征。

定理 1.3 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是基本可行解的充要条件是 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为可行域 D 的极点。

证明 充分性。用反证法。设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 D 的极点，但不是基本可行解。不妨设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的前 k 个分量取正值($k\leqslant m$)。由于 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是基本可行解，故这 k 个分量对应的列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 必线性相关。即存在不全为零的数 $d_1,d_2,\cdots,d_k$，使得

$$\sum_{j=1}^{n}d_j\boldsymbol{a}_j = 0.$$

令 $\boldsymbol{x}^1=\bar{\boldsymbol{x}}+\varepsilon\boldsymbol{d},\boldsymbol{x}^2=\bar{\boldsymbol{x}}-\varepsilon\boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{Ax}^1=\boldsymbol{Ax}^2=\boldsymbol{b}$。当 ε 充分小时，$\boldsymbol{x}^1\geqslant 0,\boldsymbol{x}^2\geqslant 0$。所以 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2$ 是两个不同的可行解。而 $\bar{\boldsymbol{x}}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^1+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^2$，这与 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 D 的极点相矛盾。故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 线性无关，从而 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是基本可行解。

必要性。仍用反证法。设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是基本可行解，且不妨设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的前 k 个分量为正，后 $n-k$ 个分量为零。若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是可行域 D 的极点，则存在 D 中不同的两点

$$\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1,x_2^1,\cdots,x_n^1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^2 = (x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2)^{\mathrm{T}}$$

使得

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2,\lambda \in (0,1).$$

由于 $\bar{x}, x^1, x^2 \geqslant 0$ 且 $\lambda \in (0,1)$，则上式表明当 $\bar{x}$ 的某个分量为零时，x^1, x^2 的相应分量也必为零，故当 $j > k$ 时，有 $\bar{x}_j = x_j^1 = x_j^2 = 0$，于是有

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j x_j^1 = \boldsymbol{b}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j x_j^2 = \boldsymbol{b}.$$

将上述两式相减，得

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j (x_j^1 - x_2^j) = 0.$$

由于 $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$，所以上式中 $\boldsymbol{a}_j$ 的系数不全为零，故向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 线性相关，这与 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是基本可行解的假设矛盾，所以 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是可行域 D 的极点，证毕。

综合定理 1.2 与定理 1.3 的结论，我们得到一个重要的几何解释：若一个线性规划问题的可行域 $D \neq \varnothing$，则其必有极点。要注意的是，基本可行解这个概念是只对标准形式的线性规划问题定义的，但极点这个提法可以用于任何形式的线性规划问题，所以在一些场合我们往往提及的是极点。

在图解法中人们发现，一个线性规划问题若存在最优解，则最优解一定可以在某个极点达到，下面的定理将一般地给出这个结论。

定理 1.4　若线性规划问题有最优解，则一定存在一个基本可行解为它的最优解。

证明　设 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性规划问题的一个最优解，如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是基本可行解，则定理成立。若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是基本可行解，则用定理 1.2 的证明方法可以找到向量 $\boldsymbol{d}$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{d} = 0$。构造两个可行解

$$\boldsymbol{x}^1 = \bar{\boldsymbol{x}} + \varepsilon \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}^2 = \bar{\boldsymbol{x}} - \varepsilon \boldsymbol{d}, \tag{1.16}$$

这里 $\boldsymbol{x}^1$ 或 $\boldsymbol{x}^2$ 的非零分量比 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 至少减少一个，且有

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{x}} + \varepsilon \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{x}} - \varepsilon \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}. \tag{1.17}$$

由于 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是最优解，故有

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{x}} \leqslant \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{x}} \leqslant \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^2. \tag{1.18}$$

由式(1.17)和式(1.18)知

$$0 \leqslant \varepsilon \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} \leqslant 0,$$

即有 $\varepsilon \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = 0$，所以可得

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{x}},$$

即 $\boldsymbol{x}^1$ 和 $\boldsymbol{x}^2$ 仍为最优解。

如果 $\boldsymbol{x}^1$ 或 $\boldsymbol{x}^2$ 是基本可行解，则定理成立。否则，重复以上步骤可得到一个非零分量不断减少的最优解序列，这样必可在有限步内得到一个基本可行解为最优解，证毕。

为了进一步了解可行域 D 的特征，我们引入方向和极方向的概念。

设 C 是 R^n 中的一个非空凸集，$\boldsymbol{d} \in R^n, \boldsymbol{d} \neq 0$，若对一 $\boldsymbol{x} \in C$ 及 $\lambda > 0$，均有 $\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d} \in C$，则称 $\boldsymbol{d}$ 是 C 的一个方向(Direction)。方向这个概念有着明显的几何意义，即从点 $\boldsymbol{x} \in C$ 出发沿着该方向一直行进不会超出 C 的范围。可见，有界集不存在方向。换言之，方向的存在是某些无界集才具有的特征。

显然，若 $\boldsymbol{d}$ 是 C 的方向，$\lambda > 0$，则 $\boldsymbol{d}^1 = \lambda \boldsymbol{d}$ 也是 C 的方向。这时称 $\boldsymbol{d}^1$ 与 $\boldsymbol{d}$ 是相同的方

向。如果一个方向不能表成两个方向的正线性组合，就称 $\boldsymbol{d}$ 是 C 的极方向(Extreme Direction)。

如图 1.1 所示，$\boldsymbol{d}^1,\boldsymbol{d}^2,\boldsymbol{d}^3$ 都是凸集 C 的方向，其中 $\boldsymbol{d}^1,\boldsymbol{d}^3$ 是极方向，而 $\boldsymbol{d}^2$ 不是。

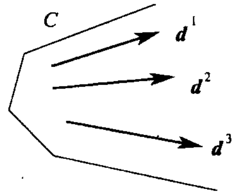

图 1.1

对于标准形式的线性规划的可行域 D，可以给其方向一个定量的描述。

定理 1.5 记 $D=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$，设 $D\neq\varnothing$，则 $\boldsymbol{d}$ 是 D 的方向的充要条件是 $\boldsymbol{d}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}=0,\boldsymbol{d}\geqslant 0,\boldsymbol{d}\neq 0.$$

证明 充分性。若 $\boldsymbol{d}$ 满足以上条件，则任给 $\boldsymbol{x}\in D,\lambda>0$，有 $\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\geqslant 0$，且

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},$$

故 $\boldsymbol{d}$ 为 D 的一个方向。

必要性。若 $\boldsymbol{d}$ 是 D 的一个方向，故 $\boldsymbol{d}\neq 0$ 且由 $\boldsymbol{x}\in D$，对 $\lambda>0$ 可得 $\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\in D$。此即由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 得到 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}$，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}=0$。又因对任意大的 λ 均有 $\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\geqslant 0$，由此知必有 $\boldsymbol{d}\geqslant 0$，证毕。

若可行域 D 是有界的(即存在 $k>0$ 使得 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant k,x\in D$)，由前面讨论知此时 D 必存在有限个极点。

定理 1.6 设 $D=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$ 且 $D\neq\varnothing$。记 D 的所有极点为 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k$，则 $\boldsymbol{x}\in D$ 的充要条件是

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^j, \tag{1.19}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1, \tag{1.20}$$

$$\lambda_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,k. \tag{1.21}$$

换言之，D 中的任意一点可以表示为 D 的所有极点的凸组合。

定理 1.6 称为 D 有界时的表示定理，它是后面将要介绍的一般表示定理的特例。这个表示定理的几何意义是很明显的，如图 1.2 所示。

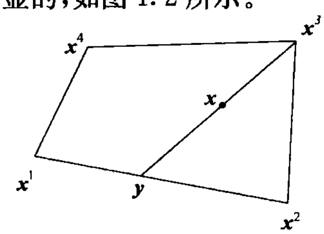

图 1.2

D 有 4 个极点 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^3,\boldsymbol{x}^4$。任取 $\boldsymbol{x}\in D$,则 $\boldsymbol{x}$ 可表示为 $\boldsymbol{x}^3$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的凸组合,即

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^3, \lambda \in (0,1), \tag{1.22}$$

而 $\boldsymbol{y}$ 又可表示为极点 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2$ 的凸组合,即

$$\boldsymbol{y} = \mu \boldsymbol{x}^1 + (1-\mu)\boldsymbol{x}^2, \mu \in (0,1), \tag{1.23}$$

式(1.23)代入式(1.22)有

$$\boldsymbol{x} = \lambda\mu \boldsymbol{x}^1 + \lambda(1-\mu)\boldsymbol{x}^2 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^3. \tag{1.24}$$

由于 $\lambda\in(0,1)$,$\mu\in(0,1)$,故 $\lambda\mu,\lambda(1-\mu),1-\lambda\in(0,1)$ 且 $\lambda\mu+\lambda(1-\mu)+(1-\lambda)=1$,所以 x 已表示为极点 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^3$ 的凸组合。

对一般的可行域 D,有如下表示定理。

定理 1.7 设 $D=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$ 且 $D\neq\varnothing$。记 D 的所有极点为 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k$,所有极方向为 $\boldsymbol{d}^1,\boldsymbol{d}^2,\cdots,\boldsymbol{d}^l$,则 $\boldsymbol{x}\in D$ 的充要条件是存在一组 λ_j 与 μ_j,满足

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{l}\mu_i d^i, \\ &\sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1, \\ &\lambda_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,k, \\ &\mu_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,l. \end{aligned}$$

定理 1.7 的证明可参阅文献[1,2]。这个定理表明,线性规划的可行域 D 可以用其极点的凸组合加上极方向的非负组合来表示。当 D 有界时,不存在极方向,则定理 1.7 中有关 d^i 及 μ_i 的项不存在,此时便得到定理 1.6。定理 1.7 的几何解释如图 1.3 所示。

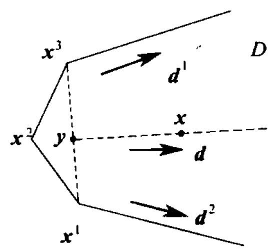

图 1.3

在图 1.3 中,$\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^3$ 是凸集 D 的三个极点,$\boldsymbol{d}^1,\boldsymbol{d}^2$ 是 D 的两个极方向。对 D 中任意一点 $\boldsymbol{x}$,可取到 D 中的一点 $\boldsymbol{y}$,先将 $\boldsymbol{x}$ 表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \mu\boldsymbol{d} = \boldsymbol{y} + \mu_1\boldsymbol{d}^1 + \mu_2\boldsymbol{d}^2, \mu_1 \geqslant 0, \mu_2 \geqslant 0,$$

其中:$\boldsymbol{d}$ 是向量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ 的方向。进而 $\boldsymbol{y}$ 可表示为 $\boldsymbol{y}=\lambda_1\boldsymbol{x}^1+\lambda_2\boldsymbol{x}^3,\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0,\lambda_1+\lambda_2=1$。将 $\boldsymbol{y}$ 的表达式代入上式即得到定理 1.7 中的形式。其实,可以有多种不同的方法将 $\boldsymbol{x}$ 表示为定理 1.7 中的形式,读者不妨对照图 1.3 自己作出。

设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为线性规划的一个基本可行解,如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的所有基变量都取正值,则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是非退化的(Nondegenerate);反之,如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 中有的基变量也为零,则称其为退化的(Degenerate)。考虑可行域

$$D = \{\boldsymbol{x} \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_4 = 1, x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0\}, \tag{1.25}$$

或等价地考虑二维图形(图 1.4),知可行域 D 可以表示为

$$D = \{\boldsymbol{x} \in R^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 1, x_1 \leqslant 1, x_1, x_2 \geqslant 0\}. \tag{1.26}$$

由图 1.4 可看出 D 有三个极点

$$\boldsymbol{v}_1 = (0,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,1), \boldsymbol{v}_3 = (1,0).$$

与式(1.25)相对应知它们的四维坐标为

$$\boldsymbol{v}_1 = (0,0,1,1), \boldsymbol{v}_2 = (0,1,0,1), \boldsymbol{v}_3 = (1,0,0,0).$$

容易验证,极点 $\boldsymbol{v}_1$ 是对应于基$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$的基本可行解。极点 $\boldsymbol{v}_2$ 是对应于基$(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4)$的基本可行解。而退化的极点 $\boldsymbol{v}_3$ 对应于三个基本可行解:基$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$、$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)$及$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_4)$。这种一对多的情况是由于 $\boldsymbol{v}_3$ 的退化所引起的。故在退化的情形下,基本可行解与 D 的极点间不是一一对应的关系。

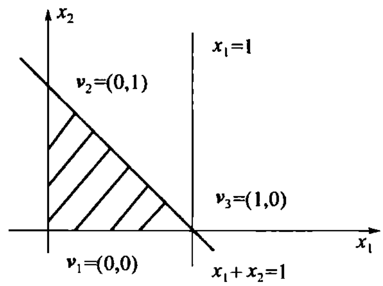

图 1.4

从几何上看,顶点 $\boldsymbol{v}_3$ 的退化是该点处有多余约束造成的。在二维平面上,极点 $\boldsymbol{v}_3$ 可由两条直线相交得到。而图 1.3 中有三条直线(约束边界)过 $\boldsymbol{v}_3$。我们任取两条边界线就可以确定 $\boldsymbol{v}_3$,一共有 $C_3^2=3$ 种取法。例如我们可取 $x_1=1$ 与 $x_1+x_2=1$,这相当于在 D 的四维表达式(1.25)中取 $x_4=1,x_3=0$,即 x_3,x_4 为非基变量,x_1,x_2 为基变量,所以极点 $\boldsymbol{v}_3$ 对应于基$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$。类似可知极点 $\boldsymbol{v}_3$ 还对应于基$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)$和$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_4)$。

如果一个线性规划问题的所有基本可行解都是非退化的,就称该问题是非退化的,否则就称它是退化的。一个非退化的线性规划问题的基本可行解与其可行域的极点之间存在一一对应的关系。

1.3 扩展与示例

本节对线性规划的若干论题作进一步的讨论。

1.3.1 图解法

线性规划的图解法简单直观,有助于了解线性规划问题求解的基本原理。

例 1.4 利用图解法求解

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2, \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ & x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ & x_2 \leqslant 7, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

如图 1.5 所示,阴影区域即为线性规划问题的可行域 D。对于每一个固定的值 z,使目标函数值等于 z 的点构成的直线称为目标函数的等值线。图 1.5 中 $z=4x_1+3x_2=12$ 就是一条等值线。当 z 变动时,我们得到一簇平行的等值线。让等值线沿目标函数值增加的方向移动,直到等值线与可行域有交点的最终位置,此时的交点(一个或多个)即为线性规划的最优解。不难看出,本例的最优解为 $\boldsymbol{x}^*=(2,6)^{\mathrm{T}}$,最优目标值 $z^*=26$。

从线性规划图解法的求解思想可以得出前文曾证明过的断言:

(1) 可行域 D 非空时,它必定是若干个半平面的交集。D 既可能是有界区域,也可