高等学校计算机教育规划教材

离散数学

（第2版）

贲可荣 袁景凌 高志华 编著
何炎祥 主审

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

高等学校计算机教育规划教材

离散数学（第2版）

贲可荣 袁景凌 高志华 编著 / 何炎祥 主审

清华大学出版社
北京

内容简介

离散数学是数学中专门用来研究离散对象及其关系的一个分支，是计算机科学与技术专业的一门重要基础课。它所研究的对象是离散的数量关系和离散的数学结构模型。全书共10章，主要包含数理逻辑、集合与关系、函数、组合计数、图和树、代数系统、自动机和初等数论等内容。本书中的“历史注记”可以帮助读者理解数学，洞察内在本质。

本书体系严谨，选材精炼，讲解翔实，例题丰富，注重理论与计算机科学技术的实际问题相结合，书中选配了大量难度适当的习题，并给出奇数题的答案，适合教学。本书适合作为计算机和相关专业本科生“离散数学”的教学用书，亦可作为对离散数学感兴趣的人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/贲可荣，袁景凌，高志华编著．—2版．—北京：清华大学出版社，2011.11

（高等学校计算机教育规划教材）

ISBN 978-7-302-26579-5

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①贲… ②袁… ③高… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第175408号

责任编辑：张瑞庆 薛 阳

责任校对：焦丽丽

责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544

投稿与读者服务：010-62795954，jsjjc@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：北京富博印刷有限公司

装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂

经　销：全国新华书店

开　本：185×260　　**印　张**：24.75　　**字　数**：612千字

版　次：2011年11月第2版　　**印　次**：2011年11月第1次印刷

印　数：1～3000

定　价：38.00元

产品编号：037435-01

第2版序

PREFACE

离散数学是计算机科学与技术专业的核心基础课，在计算机科学与技术专业课程体系中起着重要的基础理论支撑作用。学习离散数学不仅能够帮助学生更好地理解与掌握专业课程的教学内容，同时也为学生在将来的计算机科学技术的研究和工程应用中打下坚实的理论基础。随着计算机科学与技术的日益成熟，越来越完善的分析技术被用于实践，为了更好地理解计算机科学技术，学生需要对离散结构有深入的理解。

离散数学用数学语言来描述离散系统的状态、关系和变化过程，是计算机科学与技术的形式化描述语言，也是进行数量分析和逻辑推理的工具。离散数学的学习有利于培养学生的学科素质，进一步强化计算机科学与技术学科方法的训练。离散数学的教学，对培养学生获取知识、应用知识的能力，对创新思维的培养有着重要的作用。

依据文献[3]（《高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案》），离散数学的教学实施方案按照 3 种类型来设计，即科学型（计算机科学专业方向）、工程型（计算机工程与软件工程专业方向）、应用型（信息技术专业方向）。

根据科学型、工程型和应用型 3 种不同类型人才的专业素养与能力的要求，以及其他相关专业课程的教学需要，离散数学课程的教学内容和教学要求也具有相应的定位，参见表 1。科学型人才的培养目标要求学生具有坚实的数学基础，较强的抽象思维，形式化描述、推理和分析能力；工程型人才培养目标要求学生具有坚实的数学基础，能够综合应用相关的理论分析和解决实际问题；应用型人才培养目标要求学生能够熟练运用典型的离散模型进行系统的建模和集成。基于不同的教学内容和教学要求，完成教学计划的学时也不一样。表 1 列出的学时均指课上教学时间，其中最低学时是指完成本课程核心教学内容所需要的最少学时，建议学时是完成本课程中等教学要求所需要的学时，包含部分推荐知识单元和可选知识单元的教学在内。

表1　面向不同培养目标的离散数学定位

	科　学　型	工　程　型	应　用　型
培养要求	基础理论和核心技术研究；原始创新	基础理论与原理的综合应用(创新性应用)	计算机应用人才
人才定位	学术研究人才	IT企事业人才	应用领域信息化人才
培养人数	少	较多	多
离散数学的基础	熟练掌握形式描述、变换、推理和证明方法；熟练掌握离散系统的描述与分析方法；了解实际离散系统的建模	熟悉形式描述、变换、推理和证明方法；熟练掌握离散系统的描述与分析方法；了解实际离散系统的建模	简要了解形式描述、变换、推理和证明方法；掌握离散系统描述与分析方法；熟悉常用的实际离散系统模型
涉及的其他专业课	算法与数据结构、数据库系统原理、操作系统、编译原理、软件工程、人工智能、数字逻辑、计算机网络	算法与数据结构、数据库系统原理、操作系统、编译原理、软件工程、数字逻辑、计算机网络	数据结构与算法、数据库与信息管理技术、计算机网络与互联网
学时安排	建议学时：72～108	建议学时：72～90	建议学时：51～72

除培养目标外，实施方案还需考虑不同学校计算机专业的整体课程体系设计及离散数学在其中的作用。因为各学校重点建设的专业方向或研究方向是不一样的。例如信息安全，需要较多的数理逻辑和代数知识；网络需要较多的图论和组合数学知识；算法设计与分析需要较多的图论和组合数学知识；数据库和数据挖掘需要较多的集合论、数理逻辑的知识；软件工程与可信计算需要较多的集合论、数理逻辑的知识等。因此，在确定教学内容和最低学时的时候需要有一定的灵活性，以便适应大多数学校的基本教学要求，鼓励各学校创建自己的专业特色和优势发展方向。

本书涵盖集合论、数理逻辑、组合论、图论、抽象代数的基础知识，可满足计算机科学技术工程领域（工程型）高层次人才用离散结构的理论和方法对实际系统进行描述、分析的基本数学需求。

在这个知识框架中，离散数学课程划分为10个知识单元，分成3个层次。第1层的4个核心知识单元是集合关系与函数、基本逻辑、图与树、基本计数，分别包含通常离散数学中的集合论、数理逻辑、图论、组合数学的基础部分。第2层的两个推荐知识单元是特殊的图、代数结构，分别包含图论、代数结构中的重要内容，这些知识单元之间比较独立。第3层的3个可选知识单元是形式系统、高级计数、初等数论，包含了数理逻辑、组合学和初等数论中的部分内容，这些知识单元之间也是比较独立的。在知识结构上，还需要一个关于证明技术的单元，包含离散数学中经常使用的证明方法，如数学归纳法、逻辑演算、构造性证明、反证法、归约证明等。但在教学安排上，可以将证明技术分散到有关的知识单元中讲授。

按科学型人才培养目标，本书包括了集合基数，但省略了一阶逻辑形式系统的一致性、合理性、完备性证明以及计算理论（递归函数、原始递归函数、图灵机、图灵可计算函数）等内容。本书涵盖应用型人才培养目标的全部内容：集合、关系与函数，基本逻辑，图与树，特殊的图，证明技术，基本计数，代数系统简介，初等数论。

与第 1 版相比，本书压缩了博弈树部分的内容，增加了命题逻辑和谓词逻辑的归结原理（消解原理），命题逻辑形式系统的一致性、合理性、完备性定理及证明，在初等数论中增加“欧拉定理与费马小定理”，在递推关系中增加“生成函数”等。

本书第 1～4 章、第 6 章、第 8～9 章及附录由贲可荣、高志华撰写，第 5，7，10 章由袁景凌撰写，贲可荣对全书进行了统一修订。高志华、袁景凌给出本书奇数题的答案。

贲可荣

2011 年 3 月

第1版序

PREFACE

数学源于实践汇于实践

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术领域的基础的地位。数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献。同时，数学作为一种文化，已成为人类进步的标志。因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学。现代社会对数学的这种需要，在新的世纪中无疑将更加与日俱增。20世纪数学思想的深刻变革，已将数学这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路。面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只能望而却步。

一个本质上简单的学科却难以学习。有些困难是表面的，其一是词汇。数学家用一些对普通人来说很生僻的词来表达从实际事物中抽象出来的概念。如“四边形”和“平行四边形”有一些在其他领域遇不到的特定的精确含意，要研究数学就得学着用。另一个看得见的但同样是表面的困难是使用符号。我们要解决问题，可以以某些给定的信息为基础决定一个未知数。设此未知数是某一个长度以尺计的数字。用 x 去代表这个长度，而之后就只用符号 x 而不去说那么长的一句话，肯定是有利的，然而使用符号不会产生任何概念上的困难。

人们能想到的第三个困难是抽象性。但是由于基本的抽象概念是直接来自日常经验的，人们很容易记住它们的含义。事实上，数学家不断地诉诸物理对象和物理图像，以便记住这些抽象概念的含义。古希腊数学家用小石子代表各类对象，用小石子学会了自然数的基本事实。顺便说一下，“计算”一词，广义地表示任一个算术或代数过程，它的英文 Calculus 的拉丁语源就是“小石子”。甚至更高级的数学抽象，如微积分学中的导数和积分，说到底离这些初等概念仅一步之隔，甚至微积分的概念也有图像的物理的意义。要学会这些抽象概念，并不比学习初等概念要求更高的智力。

数学的完全的形式是一系列概念、一系列程序，例如求解某种类型方程的方法，以及一系列事实，例如定理。当然，程序和定理都要通过证明来确认。要想教会人这些数学元素，最容易的方法似乎莫过于用这些概念、过程、定理与证明的最终的、确定的形式去教学生。但是数学是一门老学科，它的某些重大的成就可以追溯到公元前3000年，过去五千多年里数学家不仅极大地扩大了这个学科的领域，当他们不断认识了新的客体和现象，当他们不断改进自己的理解，他们也重塑了这些概念、程序与证明来把这些成就组合起来。而这些订正了的版本中有许多就不再清晰易懂了。

此外，数学的分量在增加，因此最好把它组织起来，使关于同一主题的许多定理有合乎逻辑的次序。每一门学科的基础是公理，其后就是一串定理，每一个定理都用公理和前面已证的定理来证明。把结果按这样的合乎逻辑的次序来安排，这就需要数学家找出新的、不甚自然的、不甚明白的证明。结果是许多证明都被除去了它们的直观、透明和易于理解的面貌，而被十分人为的证明代替了。

表述上的有效性似乎导致数学的另一个特点被忽视了，而这个特点对于理解数学却是至关重要的。数学本身是一副骨骼。数学的血肉和生命在于用数学做什么。有意义的数学要为一种目的服务，这种目的用笛卡儿的话来说，就是使人成为大自然的主人和占有者。数学的意义在于数学本身之外，正如好的文学作品的意义在于纸面上堆积的文字之外。要懂得数学就要知道为什么需要这个结果，它和其他结果的关系如何，用它可以做些什么事。

学校由于它的目的和繁多的义务，有时能够，有时又不能够给数学一种更有启发性的讲法。有志于此的学生必须要走得远一些，寻求一种完全的知识。要对数学有较彻底的理解与领会，就必须去掉那些纤巧的细节，深入到其深层的思想之中；就必须知道它的目的和用处，知道创造它的人们的动机，以及这些概念和结构的创生背景。

创造性的活动，对学生来说则是再创造的活动，是数学的心脏。正是在这种活动中，数学家创造了最高成就，克服了最大的困难并使数学这门学科取得了最有意义的进展。创造过程不仅在解决已有问题时必不可少。没有新观点、新研究方法和新目标的创造，数学就会反反复复重新组织老的证明，使它们更加严格，并在这样的过程中日趋枯竭，丧失生命力。对已经得到的知识，重新排列其步骤，安排其定理的次序来构成一个演绎的组织，这时常需要创意，但从总体上说，这更像是把书本重新排一个次序。而这种创造的活动可以比作写书。数学给人的满足——获得猎物时的兴奋，发现的激动，成就的感觉，以及成功时的欢乐——更多更强烈的是在创造性的工作之中，而不是在最后按演绎的模式来重写论证之中。

数学中有许多美的篇章。无疑，数学家从事数学活动也能获得其他创造活动提供的满足感，但是伟大的数学家情愿把数学的美作为一种额外报偿，激励他们奋斗的最深层的动力则是以数学为媒介在人类的探索活动中理解宇宙，也理解人类自身在其中的角色，并且探求如何利用自然现象和自然的力量为人类服务。那些作出巨大贡献的数学家们，像阿基米德、牛顿、拉格朗日、拉普拉斯、高斯、哈密顿、庞加莱，或者是一流的物理学家，或者在科学史中占据显要地位。这绝不是偶然的。几乎所有数学的目的和意义并不在于对于一堆符号作一系列的逻辑阐述，而在于这些符号必定告诉我们一些关于外部世界的知识。

离散数学是计算机科学的基础

离散数学是计算机专业最重要的必修课程之一，它是许多计算机专业课程的基础。

离散数学是研究离散对象的数量和空间关系的数学，它包括多个数学分支，如本书所涉及到的集合论、图论、组合数学、古典概率、自动机理论等，是计算机科学的理论基础，也是计算机应用的有力工具。另一方面，计算机科学的发展又促进了离散数学的发展。18世纪以前的数学基本上都属于离散数学的范畴，以后，天文学、物理学等的发展极大地推动了连续数学(如微积分)的发展，直到20世纪中期，尤其是20世纪80年代以后，随着计算机日益渗透到现代社会的各个方面，离散数学又重新受到高度重视。当然，离散数学涉及的内容极其广泛，其应用全然不是仅局限于计算机科学及其应用，而是涉及到我们生活的方方面面。

由于数字计算机软硬件结构决定了它仅适于处理离散型信息的存储与计算，因此离散数学便成为计算机科学与技术的基本数学工具。某些理论上的“先见之明”，将会给以后学科的发展带来巨大的影响。例如，对可计算的研究所建立的图灵机是计算机的理论模型，随后这种理念导致了计算机的诞生。布尔的逻辑代数已成功地用于计算机的硬件分析与设计。谓词逻辑演算为人工智能学科提供了一种重要的知识表示方法和推理方法。这些都体现了离散数学的重要作用。对于离散数学的原理和方法，经常要求其在计算机上的可实现性；而一般的数学理论和方法有时仅给出存在性的结论，并不给出构造性的问题解答，因此难以满足实用性的要求。现代数字计算机的理论模型依然是20世纪30年代提出的图灵机，这是一种“离散”的机器，可用来处理“离散”的对象。当然，正如大多数计算机的早期应月，通过近似计算等手段，计算机也可以处理“连续”的对象，但现代的数字计算机仍然是一种“离散”的机器。事实上，目前计算机已经越来越多地用于处理各种“离散”的对象。

随着计算机技术的发展，离散数学作为计算机科学的一种数学工具，其作用显得越来越重要。对于一种程序设计语言来说，我们需要了解一些相关的问题：为什么会提出这种语言？它能解决什么问题？优势是什么？存在什么问题？它的语法、语义怎么样？利用该语言编写的程序必然是正确的吗？更深入的分析就是，计算机到底能做些什么？不能做些什么？什么是可计算的，什么是不可计算的，以及计算的复杂性又怎样？只有懂得一些深刻的基础性数学知识，才能对这些问题给出较为准确的回答。

离散数学为什么作为计算机专业学生的基础课？美国数学会主席 Lynn A. Steen 回答了该问题：...But today's growth industries are dominated by information, which is abstract and immaterial. Where the material world is modeled by calculus, the language of continuous change, the immaterial world of information requires discontinuous discrete mathematics. Both genetic codes and computer codes are intrinsically discrete. Discrete mathematics basically deals with fancy ways of arranging and counting. It can be used to enumerate genetic patterns and to count the branches in computer algorithms; it can be used to analyze the treelike branching of arteries and nerves, as well as the cascading options in a succession of either-or decisions. It can tell us how many things are there as well as help us find what we want among a bewildering morass of possibilities.

离散数学的主要内容

由于数字电子计算机是一个离散结构，它只能处理离散的或离散化了的数量关系。因此无论计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临着如何对离散结构建立数学模型又如何将已经用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可以用计算机加工处理的问题。离散数学是数学里专门用来研究离散对象的一个数学分支，是计算机专业的一门重要的基础课。它所研究的对象是离散的数量关系和离散的数学结构模型。

20世纪70年代，国外开始将离散数学作为一门大学课程。当时，有一些计算机科学家根据自己对计算机科学的理解，与一些数学家一起圈定了一些他们认为对计算机科学是必需的数学专题，结合计算机科学中的一些实例编著了一些主要命名为“离散数学结构和方法”或“离散数学基础”之类的书籍，并开设相应的课程供大学里学习计算机专业和其他一些相关工程专业的学生选修。由于反响很好，渐渐在计算机专业中，“离散数学”即作为必修课来开设。我国是在大约20世纪80年代初期，从翻译国外离散数学专著开始，逐渐编写了一些适合我国教学情况的离散数学的教材，并在计算机系中开设了相应的课程。

如上所述，由于各专家对于计算机的主攻方向和他们对计算机教学的理解不尽相同，因此，在“离散数学”名下的内容也不完全一样。本书根据ACM和IEEE/CS最新推出的Computing Curricula 2004以及教育部高等教育司组织评审通过的《中国计算机科学与技术学科教程2002》中制定的关于“离散数学”的知识结构和体系撰写。全书共10章，主要包含数理逻辑、集合与关系、函数、图和树、组合计数、数论与递归关系、代数系统、自动机、文法和语言等内容，基本上涵盖了计算机专业所必需的数学内容。离散数学这门课程，主要介绍各分支的基本概念、基本理论和基本方法，这些知识将应用于数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库原理、算法分析与设计、人工智能、软件工程、计算机网络等专业课程之中。

学习离散数学的方法

离散数学是计算机科学系所有专业的基础数学课程，一方面具有实用性（应用数学的特征），另一方面又具有作为数学基础课的理论的严谨性。所以，学习任何一个专题时，首先要精确严格地掌握好概念和术语，正确理解它们的内涵和外延。因为公理、定理或定律的基石都是概念，只有正确地理解概念，才能把握定理的实质，熟练地将公理、定理应用于解决问题。完全地、精确地掌握一个概念的方法是首先深刻理解概念的内涵，然后举一些属于和不属于该概念外延的正反两方面的实例。如果对一些似是而非的例子也能辨别的话，应该说就已经真正地理解这个概念了。对一些重要的概念，能记住一两个实例也是很有好处的。

读者应养成一种自觉的学习习惯，首先要掌握好基本概念和术语，然后在此基础

上，理解每个基本定理的本质，最后通过学习和借鉴书中提供的例题，独立地完成每一次作业，并且在每次作业完成之后，自觉地归纳出其中用到的基本解题方法。注意，千万不要在完全理解相关概念和基本定理之前就匆忙去做相应的习题。

学习数学的唯一途径是实践。就好像仅看别人怎么做，你是不可能学会弹吉他或投篮的，你也不可能仅靠阅读本书或听课就学好离散数学。你必须积极主动地思考。在阅读数学书时，你应该在手头随时备好笔和纸，以便进行详细的推导和计算。在听数学课前，你最好先阅读有关的内容，这样，你就可以专注于你对内容的理解是否与教授的理解相一致，还可以就一些难点提问。本书中有很多习题，有些是纯粹的计算题，有些测试对概念的理解，有些要求给出论证，建议读者多做。

学习和理解术语也很重要。在数学中，传统的做法是对一些简单、常见的词汇赋予特殊的含义，如集合、函数、关系、图、树、网络。这些词都有严格的定义，必须认真学习，否则你就不能理解你在书中读到的内容和教授所讲述的课程。术语能帮助你有效地与别人共享信息，而且在现实生活中，仅仅简单地计算出某些东西往往不够，还必须能够向别人解释，使别人确信你的解是正确的。

我们期待你成功地学好离散数学，并从中学到许多技术和观点，你将会发现它们在许多地方都是有用的。

对数学和逻辑的感悟得益于我的老师们，他们是陈火旺先生、莫绍揆先生、王世强先生、康宏逵先生、齐治昌先生、胡静婉老师、丁德成老师，也获益于我的同学们，包括沈恩绍、宋方敏、王公宝、王怀民、王戟、王献昌，如果本书有什么新意的地方，应首先归功于他们。

本书第 1～4 章、第 6 章、第 8～9 章及附录由贲可荣、高志华撰写，第 5，7，10 章由袁景凌撰写，全书由贲可荣统稿。在本书撰写过程中，钟珞教授、郭福亮教授给予了多方面的支持。武汉大学计算机学院院长何炎祥教授对全书进行了审校，特此致谢。

贲可荣

2007 年 1 月

目录

CONTENTS