语码转换式双语教学系列教材

总主编 蔡明德 副总主编 黎树斌 刘玉彬 总主审 范圣第

# 数值分析

# NUMERICAL ANALYSIS

袁学刚 牛大田 主编

大连理工大学出版社

总主编 蔡明德 副总主编 黎树斌 刘玉彬 总主审 范圣第

# 数值分析

# NUMERICAL ANALYSIS

主编 袁学刚 牛大田
主审 王立冬
编者 （按姓氏笔画排序）
牛大田 王铁英 丛树强
赵 巍 袁学刚 焦 佳
藏 林

大连理工大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

数值分析 / 袁学刚，牛大田主编. 一 大连 ：大连理工大学出版社，2010.7(2011.1 重印)
语码转换式双语教学系列教材
ISBN 978-7-5611-5704-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①袁… ②牛… Ⅲ.①数值计算一双语教学一教材 Ⅳ.①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 151686 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连力佳印务有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:183mm×233mm 印张:13 字数:520 千字
2010 年 7 月第 1 版 2011 年 1 月第 2 次印刷

责任编辑:汪会武 邵 婉 责任校对:千 川
封面设计:波 朗

ISBN 978-7-5611-5704-6 定 价:23.00 元

# 前言 FOREWORD

数值分析课程作为计算数学的主要组成部分，就其课程特点而言，又名“数值计算方法”或“数值方法”. 它是一门介绍科学计算的基础理论与基本方法的综合性课程，也是应用数学和计算机科学相结合的产物. 数值分析课程的核心内容是研究在计算机上应用数值计算方法求解各类数学问题，并利用数学基础理论对各类数值算法的收敛性和数值稳定性进行分析. 随着计算机及科学技术的快速发展，数值分析课程的理论与方法已影响到许多学科，新的计算性交叉学科分支不断涌现，如计算力学、计算物理、计算化学、计算生物学，等等，并在生产、管理以及科学研究中得到了广泛应用. 此外，数值实验作为数值分析课程在教学过程中的一个重要环节，是理论与实践相结合的主要途径. 特别是数学软件的研发，如 Matlab、Mathematica 和 Maple 等，给数值分析课程的建设和发展增加了新的活力.

数值分析课程在我国高等学校中最早是为计算数学专业学生开设的. 目前，该课程是数学与应用数学专业、信息与计算科学专业及很多理工科专业的核心课程，也是力学、航空航天、计算机应用、土木工程、机械工程、经济管理等学科研究生的必修课程.

随着社会的发展，各专业领域急需既有较高英语水平，同时又熟悉专业知识的人才. 对于非英语专业的学生来说，英语的主要功能应该是作为学生进行专业学习、阅读科技文献、从事科学研究以及为未来工作服务的一种工具. 然而，学校的大学英语教学只是英语的基础教学，与专业学习严重脱节. 特别是在学生做本科毕业设计的专业外文文献翻译环节时，经常会犯令人啼笑皆非的错误，如很多数学专业的学生居然会将“continuous function(连续函数)”翻译成“连续的功能”，等等. 为了避免这种现象再次发生，在学校大力支持下，应用数学系对数值分析课程进行了多年的语码转换式双语教学，使学生掌握了课程中重要的专业词汇和数学环境下的翻译技巧，达到了预期的目的.

目前，对数值分析课程进行语码转换式双语教学的困难源于两个方面：一是原版教材内容体系庞杂，与国内教学要求难以匹配；二是如果使用中文版教材，再提供相应的外语材料，结果是双语教学体现不充分，效果也不明显.

本书是授课教师经过多年的教学实践，综合国内外优秀教材之经典内容编写而成的. 本书的特点主要体现在四个方面：一是涵盖了数值分析课程的主要定义、常用的专业词汇、重要的算法和结论；二是书中内容采用了英汉对照的形式，使学生既学到了相关的定义、公式、结论及其应用，同时也学会了相关专业词汇及术语的英文表达；三是为了帮

助学生更好地理解相关内容，在每节增加了典型例题和习题，并对每章进行了必要的总结；四是为了提高学生的实践能力和编程能力，每章的最后不仅给出了一个数值算例，而且提供了一些必要的上机实验题.

鉴于数值分析课程的内容和特点，第1章简略介绍了数学分析、矩阵代数和常微分方程的基础知识，并且介绍了误差的基本概念、数值运算的误差估计及定性分析等内容.第2章至第4章是逼近理论的内容及其应用，主要包括一些经典的插值逼近方法、最佳一致逼近和最佳平方范数逼近、一些基于插值方法的数值求积公式和数值微分公式.第5章至第8章是数值代数的内容及其应用，主要包括线性方程组的直接解法和一些经典的迭代解法、非线性方程的经典迭代解法、矩阵特征值的数值解法.第9章的主要内容是常微分方程的数值解法.

本书在编写的过程中，参用了大量的中外文出版物，这些资料给了我们重要启示和帮助.书后所附的主要参考文献只是其中的一小部分.在此，我们谨向列出的和未列出的相关资料的编、著者表示诚挚的谢意.此外，本书在编写过程中得到了教育部新世纪优秀人才支持计划(CNET-09-096)、大连民族学院教学改革项目(YT-2009-13)和大连民族学院示范性网络课程建设项目(wk201033)的资助，在此表示感谢.

编写本书的直接目的是为讲授数值分析及相关课程的教师和学习数值分析课程的学生提供相关内容的英文描述服务，进而使学生学过本课程后，能够独立阅读相关的英文教材和文献。本书可作为数值分析课程语码转换式双语教学的教材或参考书，也可作为科技英语专业的参考书。

由于经验和水平有限，难免会有错误和不当之处，恳请专家学者批评指正.

编 者

2010年7月

# 目录 CONTENTS

# 第1章 预备知识

# Chapter 1 Preliminaries

## 引 言

## Introduction

在当今的科学与工程计算中，所要解决的实际问题往往是复杂的和综合的.由于问题固有的复杂性，使得相应的问题无法解析求解，从而展现出数值计算方法在解决复杂问题时更为实用的一面.用计算机求解各类实际问题的一般流程可以归结为：① 通过对实际问题进行抽象和简化建立数学模型；② 根据数学模型的特点提出求解模型的数值计算方法；③ 运用算法语言和数学软件编制相应的程序；④ 上机调试，给出计算结果，并利用计算结果对实际问题进行数值模拟.

*In scientific and engineering computation of today*, the practical problems to be solved are always complicated and integrated. Due to the inherent complexity, the corresponding problems can not be solved analytically, and thus the more practical side of numerical methods is shown for solving the complicated problems. The general process for solving varied practical problems by computer can be described as: ① Formulate the mathematical model by abstracting and simplifying the practical problem; ② Propose the numerical methods for solving the model in terms of the features of the mathematical model; ③ Make the corresponding program by algorithmic language and mathematical software; ④ Debug the program on a computer, present the result and numerically simulate the practical problem by using computational result.

从数值分析的研究对象及讲授内容可知，该课程涉及面较广，包括了微积分、矩阵代数、微分方程等方面的数学问题，具有纯数学方面的高度抽象性.因此，本部分的前三节简要回顾了数学分析、高等代数、常微分方程三门课程中相关的定义、性质和定理等内容.另一方面，从上面的流程可以看到，在解决实际问题过程中会不可避免地产生各种误差，并且所使用的方法应有可靠的理论依据，如误差分析、收敛性分析、稳定性分析等，以保证计算结果的可靠性及正确性.因此，本部分的第四节介绍了误差理论方面的相关内容.

From the study objects and the teaching contents of Numerical Analysis we know that this course involves extensive ranges, including the mathematical problems of Calculus, Matrix Algebra and Differential Equations, and so it has high abstraction of pure mathematics. Therefore, the first three sections of this part briefly review the relative definitions, properties and theorems of three courses, namely, Mathematical Analysis, Advanced Algebra and Ordinary Differential Equations. On the other hand, from the above process *we see that some kinds of errors may occur unavoidably* during the course of solving the practical problems and that the reliably theoretical basis of these methods should be proposed to ensure the reliability and correctness of computational result, such as error analysis, convergence analysis, stability analysis, and so on. Hence, the fourth section of this part introduces the relative contents on error analysis.

## 1.1 微积分回顾

## 1.1 Review of Calculus

根据本书所涉及的内容，本节仅对数学分析中的一元微积分的相关知识进行介绍，如数列的极限、函数的极限、函数的连续性、导数及其应用、微分、积分的定义，以及一些必要的性质和定理等内容.

Due to the contents mentioned in this book, this section only introduces the relative knowledge of calculus of one variable in Mathematical Analysis, such as the concepts on limit of a sequence of numbers, limit of a function, continuity of a function, derivative and its applications, differential and integral, some necessary properties and theorems, and so on.

## 关键词 Key Words

| | | | |
|---|---|---|---|
| 性质 | property | 费尔马定理 | Fermat theorem |
| 必要条件 | necessary condition | $n$ 阶导数 | $n$-th derivative |
| 充分条件 | sufficient condition | 微分 | differential |
| 充分必要条件 | necessary and sufficient condition | 线性主部 | linear principal part |
| 当且仅当 | if and only if | 罗尔定理 | Rolle theorem |
| 数列极限 | limit of sequence of numbers | 拉格朗日定理 | Lagrange theorem |
| 收敛序列 | convergent sequence | 柯西定理 | Cauchy theorem |
| 唯一性定理 | uniqueness theorem | 泰勒定理 | Taylor theorem |
| 有界性定理 | boundedness theorem | 泰勒系数 | Taylor coefficient |
| 函数极限 | limit of function | 泰勒多项式 | Taylor polynomial |
| 局部有界性 | local boundedness | 余项 | remainder |
| 海涅定理 | Heine theorem | 定积分 | definite integral |
| 柯西收敛准则 | Cauchy convergence criterion | 曲边梯形 | curvilinear trapezoid |
| 无穷小量 | infinitesimal | 分割 | partition |
| 高阶无穷小量 | infinitesimal of higher order | 黎曼和 | Riemann sum |
| 同阶无穷小量 | infinitesimal of same order | 黎曼积分 | Riemann integral |
| 等价无穷小量 | equivalent infinitesimal | 积分区间 | interval of integration |
| 连续函数 | continuous function | 原函数 | primitive function |
| 局部性质 | local property | 牛顿-莱布尼茨公式 | Newton-Leibniz formula |
| 极值定理 | extreme value theorem | 积分中值定理 | mean value theorem of integrals |
| 介值性定理 | intermediate value theorem | 积分第一中值定理 | first mean value theorem of integrals |
| 零点定理 | zero point theorem | | |
| 变化率 | rate of change | | |
| 导数 | derivative | | |

## 主要内容 Main Contents

### 1.1.1 数列极限

**定义 1.1.1** 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一给定的实数列，$a$ 为一个实常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 $N(\varepsilon)$，使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $a$，或称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限为 $a$，记作

### 1.1.1 Limit of Sequence of Numbers

**Definition 1.1.1** Let $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a given sequence of real numbers and let $a$ be a real constant. Then we can say that the sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $a$ or say that $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ has the limit $a$ if, for any given $\varepsilon>0$, there exists a positive integer $N(\varepsilon)$ such that $|x_n-a|<\varepsilon$, whenever $n>N(\varepsilon)$, and we denote the corresponding notations as Eq. (1.1.1)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a (n\to\infty). \tag{1.1.1}$$

**定理 1.1.1(唯一性)** 若数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的，则它的极限必是唯一的.

**定理 1.1.2(有界性)** 若数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的，则数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一定是有界的，即存在正常数 $M$，使得对任意的正整数 $n$，有 $|x_n|\leqslant M$.

**Theorem 1.1.1 (Uniqueness)** If the sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent, then its limit must be unique.

**Theorem 1.1.2 (Boundedness)** If the sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent, then $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ must be bounded, that is to say, there exists a positive constant $M$ such that the inequality $|x_n|\leqslant M$ is valid for any positive integer $n$.

**定理 1.1.3(保序性)** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a<b$，则存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，有 $x_n<y_n$.

**Theorem 1.1.3 (Order-preserving)** If the expressions $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ and $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ are valid, moreover, $a<b$, then there exists a positive integer $N$ such that $x_n<y_n$ as $n>N$.

**定理 1.1.4(迫敛性定理)** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，且存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，有 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

**Theorem 1.1.4 (Squeeze Theorem)** If the expressions $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ are valid and if there exists a positive integer $N$ such that $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$ as $n>N$, then $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

**定理 1.1.5** 单调有界数列必有极限.

**Theorem 1.1.5** If a sequence of numbers is monotonic and bounded, then it must have a limit.

**定理 1.1.6(柯西收敛准则)** 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充分必要条件是:对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，当 $n,m>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

**Theorem 1.1.6 (Cauchy Convergence Criterion)** A sequence of numbers $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent if and only if for any given $\varepsilon>0$, there exists a positive integer $N$ such that $|x_n-x_m|<\varepsilon$ as $n,m>N$.

## 1.1.2 函数的极限

## 1.1.2 Limit of Function

**定义 1.1.2** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某去心邻域 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义，$A$ 是一个实常数. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(<\delta')$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $A$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的极限，并记为

**Definition 1.1.2** Assume that the function $f(x)$ is defined in a certain deleted neighborhood of $x_0$, written as $U^\circ(x_0;\delta')$, and that $A$ is a real constant. If there exists a positive number $\delta(<\delta')$ such that $|f(x)-A|<\varepsilon$ for any $\varepsilon>0$ and for any $x$ satisfying the inequality $0<|x-x_0|<\delta$, then the constant $A$ is called the limit of the function $f(x)$ at the point $x_0$, and the corresponding notations are denoted by Eq. (1.1.2).

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0). \tag{1.1.2}$$

**定理 1.1.7(唯一性)** 若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 有极限，则它的极限必是唯一的.

**Theorem 1.1.7 (Uniqueness)** If the function $f(x)$ has a limit at the point $x_0$, then the limit must be unique.

**定理 1.1.8(局部有界性)** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在 $\delta_0>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$，其中 $M$ 是一个正常数.

**Theorem 1.1.8 (Local Boundedness)** If $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, then there exists $\delta_0>0$ such that the inequality $|f(x)|\leqslant M$ is valid whenever $0<|x-x_0|<\delta_0$, where $M$ is a positive constant.

**定理 1.1.9(局部保序性)** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A<B$，则存在 $\delta_0>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $f(x)<g(x)$.

**Theorem 1.1.9 (Local Order-preserving)** If the expressions $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ and $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ are valid, moreover, $A<B$, then there exists $\delta_0>0$ such that $f(x)<g(x)$ as $0<|x-x_0|<\delta_0$.

**定理 1.1.10(海涅定理)** 极限式 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 成立的充分必要条件是:对任意满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，且 $x_n\neq x_0\,(n=1,2,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

**Theorem 1.1.10 (Heine Theorem)** The limit expression $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ is valid if and only if $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ is valid for any sequence of numbers $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfying the conditions $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ and $x_n\neq x_0\,(n=1,2,\ldots)$.

**定理 1.1.11(迫敛性定理)** 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 在点 $x_0$ 的某去心邻域内满足 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

**Theorem 1.1.11 (Squeeze Theorem)** If the functions $f(x)$, $g(x)$ and $h(x)$ satisfy the inequality $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ in a certain deleted neighborhood of $x_0$ and if $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, then $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

**定理 1.1.12(柯西收敛准则)** 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

**Theorem 1.1.12 (Cauchy Convergence Criterion)** The

存在的充分必要条件是：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对分别满足不等式 $0 < |x' - x_0| < \delta$ 和 $0 < |x'' - x_0| < \delta$ 的 $x'$ 和 $x''$，有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

**定义 1.1.3** 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

**定义 1.1.4** 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小量. (i) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 是高阶无穷小量，记为 $f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$；(ii) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同阶无穷小量，记为 $f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$；(iii) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是等价无穷小量，记为 $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$.

### 1.1.3 函数的连续性

**定义 1.1.5** 令 $f(x)$ 是定义在实数集 $X$ 上的函数且 $x_0 \in X$. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续；若函数 $f(x)$ 在定义域 $X$ 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 $X$ 上连续.

**定理 1.1.13(有界性定理)** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上有界，即存在 $M > 0$，对任意的 $x \in [a,b]$，有 $|f(x)| \leqslant M$.

**定理 1.1.14(最值性定理)** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上一定可以取得最大值和最小值，即存在 $\xi, \eta \in [a,b]$，使得对一切 $x \in [a,b]$，有 $f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta)$.

**定理 1.1.15(介值性定理)** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$L$ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的某一值，则存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = L$.

**定理 1.1.16** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$m$ 和 $M$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则 $f(x)$ 一定可以取得介于 $m$ 和 $M$ 之间的一切值.

**定理 1.1.17 (零点定理)** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

limit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ exists if and only if, for any given $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that the inequality $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ is valid for $x'$ and $x''$ satisfying the inequalities $0 < |x' - x_0| < \delta$ and $0 < |x'' - x_0| < \delta$, respectively.

**Definition 1.1.3** If $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, then we say that $f(x)$ is an infinitesimal as $x \to x_0$.

**Definition 1.1.4** Assume that $f(x)$ and $g(x)$ are infinitesimals as $x \to x_0$. (i) If $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, then $f(x)$ is said to be the higher order infinitesimal of $g(x)$, denoted by $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$; (ii) If $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, then $f(x)$ is said to be the same order infinitesimal of $g(x)$, denoted by $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$; (iii) If $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, then $f(x)$ is said to be the equivalent infinitesimal of $g(x)$, denoted by $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$.

### 1.1.3 Continuity of Function

**Definition 1.1.5** Let $f(x)$ be a function defined on the set of real numbers $X$, and $x_0 \in X$. Then $f(x)$ is continuous at the point $x_0$ if $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. The function $f(x)$ is continuous on the set $X$ if it is continuous at each point in $X$.

**Theorem 1.1.13 (Boundedness Theorem)** Assume that $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$, then it is bounded on $[a,b]$, namely, there exists $M > 0$ such that $|f(x)| \leqslant M$ for any $x \in [a,b]$.

**Theorem 1.1.14 (Extreme Value Theorem)** Assume that $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$, then it must have a maximum and a minimum on $[a,b]$, namely, there exists $\xi, \eta \in [a,b]$ such that $f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta)$ for all $x \in [a,b]$.

**Theorem 1.1.15 (Intermediate Value Theorem)** Assume that $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$ and that $L$ is a value between $f(a)$ and $f(b)$. Then there exists a point $\xi$, where $\xi \in (a,b)$, such that $f(\xi) = L$.

**Theorem 1.1.16** Assume that $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$ and that $m$ and $M$ are the minimum and the maximum of $f(x)$ on $[a,b]$, respectively. Then $f(x)$ can take all the values between $m$ and $M$.

**Theorem 1.1.17 (Zero Point Theorem)** Assume that $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$ and that $f(a) \cdot f(b) < 0$, then there exists a value $\xi \in (a,b)$ such that $f(\xi) = 0$.

### 1.1.4 导数及其应用

**定义 1.1.6** 设 $f(x)$ 在包含 $x_0$ 的某邻域内有定义.若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在,则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导,此极限值称为函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的导数,记为 $f'(x_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$;利用 $h$- 增量记号描述导数的等价定义是

### 1.1.4 Derivative and its Applications

**Definition 1.1.6** Assume that $f(x)$ is defined on a certain neighborhood containing $x_0$. Then $f(x)$ is said to be differentiable at $x_0$ if $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ exists, moreover, the limit is called the derivative of $f(x)$ at $x_0$, denoted by $f'(x_0)$ or $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$. An equivalent way to express the derivative using the $h$- increment notation is given by Eq. (1.1.3).

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0). \tag{1.1.3}$$

进一步地,若 $f(x)$ 在区间 $I$ 内每一点都可导,则称其在区间 $I$ 内可导.

Furthermore, if the function $f(x)$ is differentiable at each point in the interval $I$, then it is said to be differentiable on $I$.

**定理 1.1.18** 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导,则 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续.

**Theorem 1.1.18** If $f(x)$ is differentiable at $x_0$, then $f(x)$ is continuous at $x_0$.

**定义 1.1.7** 令 $y=f(x)$,$\Delta y=f(x)-f(x_0)$,$\Delta x=x-x_0$.若 $f(x)$ 在 $x_0$ 的增量 $\Delta y$ 与自变量 $x$ 的增量 $\Delta x$ 的关系为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$,其中 $A$ 是与 $\Delta x$ 无关的常数,则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 可微,称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的微分,记为 $\mathrm{d}y=A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}y=A\mathrm{d}x$.

**Definition 1.1.7** Let $y=f(x)$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ and $\Delta x=x-x_0$. If the relation between the increment $\Delta y$ of $f(x)$ at $x_0$ and the increment $\Delta x$ of the invariable $x$ is given by $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$, where $A$ is a constant which is independent of $\Delta x$, then $f(x)$ is said to be differentiable at $x_0$ and $A\Delta x$ is the differential of $f(x)$ at $x_0$, denoted by $\mathrm{d}y=A\Delta x$ or $\mathrm{d}y=A\mathrm{d}x$.

**定理 1.1.19** $f(x)$ 在 $x_0$ 可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x_0$ 存在导数.

**Theorem 1.1.19** $f(x)$ is differentiable at $x_0$ if and only if $f(x)$ exists a derivative at $x_0$.

**定理 1.1.20(费马定理)** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导,且在 $x_0$ 取局部极值,则 $f'(x_0)=0$.

**Theorem 1.1.20 (Fermat Theorem)** Assume that $f(x)$ is differentiable at $x_0$ and takes the local extreme value at $x_0$, then $f'(x_0)=0$.

**定理 1.1.21(罗尔定理)** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 $(a,b)$ 内可导,且 $f(a)=f(b)$,则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使得 $f'(\xi)=0$.

**Theorem 1.1.21 (Rolle Theorem)** Assume that $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$ and is differentiable in the open interval $(a,b)$ and satisfies $f(a)=f(b)$. Then there exists at least a number $\xi$ in $(a,b)$ such that $f'(\xi)=0$.

**定理 1.1.22(拉格朗日定理)** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 $(a,b)$ 内可导,则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使得

**Theorem 1.1.22 (Lagrange Theorem)** Assume that $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$ and is differentiable in the open interval $(a,b)$. Then there exists at least a number $\xi$ in $(a,b)$ such that Eq. (1.1.4) is valid.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{1.1.4}$$

**定理 1.1.23(柯西定理)** 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间$(a,b)$内可导,且对任意的 $x\in(a,b)$,$g'(x)\neq 0$,则在$(a,b)$内至少存在一点 $\xi$,使得

**Theorem 1.1.23 (Cauchy Theorem)** Assume that $f(x)$ and $g(x)$ are continuous on the closed interval $[a,b]$ and are differentiable in the open interval $(a,b)$, moreover, $g'(x)\neq 0$ for any $x\in(a,b)$. Then there exists at least a number $\xi$ in $(a,b)$ such that Eq. (1.1.5) is valid.

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{1.1.5}$$

**定理 1.1.24(泰勒定理)** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $n$ 阶连续导数，且在 $(a,b)$ 内有 $n+1$ 阶导数. 取定常数 $x_0 \in [a,b]$，则对于任意的 $x \in [a,b]$，存在一个介于 $x_0$ 和 $x$ 之间的 $\xi(x)$，有

**Theorem 1.1.24 (Taylor Theorem)** Assume that $f(x)$ has $n$-th order continuous derivative on $[a,b]$, and has $n+1$-th order derivative on $(a,b)$. Let $x_0$ be a constant on $[a,b]$, then for any $x \in [a,b]$, there exists $\xi(x)$ between $x_0$ and $x$ such that Eq. (1.1.6) is valid,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{1.1.6}$$

其中

where $P_n(x)$ and $R_n(x)$ are given by Eqs. (1.1.7) and (1.1.8), respectively.

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \tag{1.1.7}$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))(x-x_0)^{n+1}. \tag{1.1.8}$$

这里 $P_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的 $n$ 阶泰勒多项式，$R_n(x)$ 称为对应于 $P_n(x)$ 的拉格朗日型余项. 若取 $n \to \infty$，则由 $P_n(x)$ 得到的无穷级数称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的泰勒级数；若取 $x_0 = 0$，则泰勒多项式通常称为麦克劳林多项式，对应的泰勒级数称为麦克劳林级数.

Here $P_n(x)$ is called the Taylor polynomial of degree $n$ of $f(x)$ at $x_0$, and $R_n(x)$ is called the remainder of Lagrange type associated with $P_n(x)$. The infinite series obtained by taking the limit of $P_n(x)$ as $n \to \infty$ is called the Taylor series of $f(x)$ at $x_0$. In the case of $x_0 = 0$, the Taylor polynomial is often called a Maclaurin polynomial, and the Taylor series is called a Maclaurin series.

**定义 1.1.8** 若 $x^*$ 是非线性方程 $f(x)=0$ 的根，则 $f(x^*) = 0$. 若存在正整数 $m$，使得 $f(x) = (x-x^*)^m g(x)$，且 $g(x^*) \neq 0$，则称 $x^*$ 是方程 $f(x)=0$ 的 $m$ 重根；当 $m=1$ 时，称 $x^*$ 是单根；若 $f(x)$ 是 $m$ 次可微的函数，则 $x^*$ 是 $f(x)=0$ 的 $m$ 重根的充分必要条件是

**Definition 1.1.8** If $x^*$ is a root of the nonlinear equation $f(x) = 0$, then $f(x^*) = 0$. If there exists a positive integer $m$ such that $f(x) = (x-x^*)^m g(x)$ and $g(x^*) \neq 0$, then $x^*$ is called a root of order $m$ of the equation $f(x) = 0$; if $m = 1$, then $x^*$ is a simple root; if $f(x)$ is a $m$ times differentiable function, then $x^*$ is a root of order $m$ of $f(x) = 0$ if and only if the conditions in Eq. (1.1.9) are valid.

$$f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, f^{(m)}(x^*) \neq 0. \tag{1.1.9}$$

### 1.1.5 定积分

**定义 1.1.9** 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，在 $(a,b)$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 作成了一种分划 $P$: $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$，并任取点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 记子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，并令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且极限值既与分划 $P$ 无关，又与点 $\xi_i$ 的取法无关，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 和式 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为黎曼和，其极限值 $I$ 称为 $f(x)$

### 1.1.5 Definite Integral

**Definition 1.1.9** Assume that $f(x)$ is a bounded function defined on $[a,b]$. The partition $P$: $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$ is obtained by inserting $n-1$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ arbitrarily in $(a,b)$ and $\xi_i$ is an arbitrary point on $[x_{i-1}, x_i]$. The length of the subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ is denoted by $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. If the limit $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ exists, where $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$, and if the limit value is independent of both the partition $P$ and the point $\xi_i$, then $f(x)$ is called Riemann integrable on $[a,b]$. The sum $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ is called the Riemann sum and the limit $I$ is called the definite integral of $f(x)$ on $[a,b]$, written as $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, where $a$ and $b$

在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，这里 $a$ 和 $b$ 分别被称为定积分的下限和上限.

are called the lower limit and the upper limit, respectively.

**定理 1.1.25（积分中值定理）** 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上存在一点 $\xi$，使得

**Theorem 1.1.25 (Mean Value Theorem of Integrals)** Suppose that $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$, then there exists a point $\xi$ on $[a,b]$ such that Eq. (1.1.10) is valid.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{1.1.10}$$

**定理 1.1.26（积分第一中值定理）** 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则在 $[a,b]$ 上存在一点 $\xi$，使得

**Theorem 1.1.26 (First Mean Value Theorem of Integrals)** Suppose that $f(x)$ and $g(x)$ are continuous on the closed interval $[a,b]$ and that $g(x)$ does not change sign on $[a,b]$. Then there exists a point $\xi$ on $[a,b]$ such that Eq. (1.1.11) is valid.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{1.1.11}$$

**定理 1.1.27（牛顿-莱布尼茨公式）** 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

**Theorem 1.1.27 (Newton-Leibniz Formula)** If $f(x)$ is continuous on the closed interval $[a,b]$ and if $F(x)$ is a primitive function of $f(x)$, then Eq. (1.1.12) is valid.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a). \tag{1.1.12}$$

## 1.2 矩阵代数回顾

## 1.2 Review of Matrix Algebra

本节回顾本书的第二部分内容所用到的矩阵代数的基本知识，例如矩阵（向量）的基本运算，矩阵的行列式、逆、迹、特征值、特征向量，各种特殊矩阵，矩阵的范数理论，等等.

In this section, we review the basic elements of Matrix Algebra which is used in the second part of this book, such as the fundamental operations of matrices (vectors), the determinant, inverse, trace, eigenvalue and eigenvector of matrices, several special matrices, the theory of matrix norms, and so on.

### 关键词 Key Words

| | | | |
|---|---|---|---|
| 向量 | vector | 非奇异 | nonsingular |
| 分量 | component | 奇异 | singular |
| 线性相关 | linear dependence | 逆矩阵 | inverse matrix |
| 线性无关 | linear independence | 行列式 | determinant |
| 矩阵 | matrix | 迹 | trace |
| 元素 | element | 对角矩阵 | diagonal matrix |
| 运算 | operation | 三对角矩阵 | tridiagonal matrix |
| 加法 | sum | 上三角矩阵 | upper triangular matrix |
| 数乘 | scalar product | 上海森伯格矩阵 | upper Hessenberg matrix |
| 矩阵乘法 | matrix multiplication | 对称矩阵 | symmetric matrix |
| 转置 | transpose | 埃尔米特矩阵 | Hermite matrix |
| 共轭转置 | conjugate transpose | 正交矩阵 | orthogonal matrix |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 酉矩阵 | unitary matrix | 数量积 | scalar product |
| 对称正定矩阵 | symmetric positive definite matrix | 范数 | norm |
| 初等置换矩阵 | elementary permutation matrix | 柯西-席瓦尔兹不等式 | Cauchy-Schwarz inequality |
| 特征多项式 | characteristic polynomial | 三角不等式 | triangular inequality |
| 特征值 | eigenvalue | 正定性 | positive definiteness |
| 特征向量 | eigenvector | 齐次性 | homogeneity |
| 特征对 | eigenpair | 相容性 | consistency |
| 相似矩阵 | similar matrices | 向量范数 | vector norm |
| 代数重数 | algebraic multiplicity | $p$-范数 | $p$-norm |
| 几何重数 | geometric multiplicity | 连续性 | continuity |
| 亏损矩阵 | defective matrix | 等价性 | equivalence |
| 若尔当标准型 | Jordan canonical form | $F$-范数 | $F$-norm |
| 若尔当块 | Jordan block | 算子范数 | operator norm |
| 舒尔标准型 | Schur canonical form | 导出范数 | induced norm |
| 瑞利商 | Rayleigh quotient | 从属范数 | subordinate norm |
| 盖尔圆盘 | Gershgorin disk | 行范数 | row norm |
| 盖尔定理 | Gershgorin theorem | 列范数 | column norm |
| 内积 | inner product | 谱范数 | spectral norm |

## 主要内容 Main Contents

### 1.2.1 向量和矩阵

**定义 1.2.1** 称具有下面形式的 $n$ 个数的排列

### 1.2.1 Vector and Matrix

**Definition 1.2.1** An array of $n$ scalars of the form (1.2.1) is called a vector $\boldsymbol{x}$ of dimension $n$.

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \tag{1.2.1}$$

为一个 $n$ 维向量 $\boldsymbol{x}$. 数 $x_i$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的分量. 分量为实数的向量称为实向量，分量为复数的称为复向量. $n$ 维实向量集记作 $\mathbf{R}^n$，$n$ 维复向量集记作 $\mathbf{C}^n$.

The scalar $x_i$ is called the component of $\boldsymbol{x}$. The vectors with real and complex components are called real and complex vectors, respectively. The set of real vectors is written as $\mathbf{R}^n$ and the set of complex vectors is written as $\mathbf{C}^n$.

**定义 1.2.2** 令 $S$ 是数域 $P$ 上的线性空间，$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in S$，如果存在不全为零的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in P$，使得

**Definition 1.2.2** Let $S$ be a linear space over a number field $P$, and $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in S$. If there exist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P$ which are not all zeros, such that Eq. (1.2.2) holds,

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}, \tag{1.2.2}$$

则称 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 线性相关. 否则若等式(1.2.2)只对 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ 成立，则称 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 线性无关.

then $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ are called linearly dependent. Otherwise, if Eq. (1.2.2) holds only if $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, then $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ are linearly independent.

**定义 1.2.3** 称具有下面形式的 $m \times n$ 个数的排列

**Definition 1.2.3** An array of $m \times n$ scalars of the form (1.2.3) is called an $m \times n$ matrix.

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

为一个 $m\times n$ 矩阵. 数 $a_{ij}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的元素;数 $a_{ii}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素. 如果 $m=n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵. 所有元素为实数的矩阵称为实矩阵,所有元素为复数的矩阵称为复矩阵. $m\times n$ 实矩阵集记作 $\mathbf{R}^{m\times n}$, $m\times n$ 复矩阵集记作 $\mathbf{C}^{m\times n}$.

The scalar $a_{ij}$ is called an element of $\boldsymbol{A}$ and the scalar $a_{ii}$ is called a diagonal element of $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A}$ is called a square matrix of order $n$ if $m=n$. The matrices with real and complex elements are called real and complex matrices, respectively. The set of all $m\times n$ real matrices is written as $\mathbf{R}^{m\times n}$. The set of all $m\times n$ complex matrices is written as $\mathbf{C}^{m\times n}$.

**定义 1.2.4** 元素全为零的矩阵称为零矩阵,记作 $\mathbf{0}$.

**Definition 1.2.4** A matrix whose elements are all zeros is called a zero matrix, written as $\mathbf{0}$.

**定义 1.2.5** 对角元为 1 其余元素全为零的矩阵称为单位矩阵,记作 $\boldsymbol{I}$.

**Definition 1.2.5** A matrix whose diagonals are all 1 and the other elements are zeros is called an identity matrix, written as $\boldsymbol{I}$.

**定义 1.2.6 (矩阵和向量的运算)**

**Definition 1.2.6 (Operations of Matrices and Vectors)**

(1) 矩阵和向量的加法

(1) Additions of matrix and vector

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ ;\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, z_i=x_i+y_i.$$

(2) 矩阵和向量的数乘

(2) Scalar products of matrix and vector

$$\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{A}, c_{ij}=\alpha a_{ij}\ ;\ \boldsymbol{z}=\alpha\boldsymbol{x},\ z_i=\alpha x_i.$$

(3) 矩阵乘法

(3) Multiplication of matrices

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB},\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, $\boldsymbol{x}=(x_i)$, $\boldsymbol{y}=(y_i)$, $\boldsymbol{z}=(z_i)$.

where $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, $\boldsymbol{x}=(x_i)$, $\boldsymbol{y}=(y_i)$, $\boldsymbol{z}=(z_i)$.

**定义 1.2.7** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵. $\boldsymbol{A}$ 的转置,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 是交换 $\boldsymbol{A}$ 的行列所得到的矩阵,即它是 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})$. $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置,记作 $\boldsymbol{A}^H$, 定义为 $\boldsymbol{A}^H=(\bar{a}_{ji})$.

**Definition 1.2.7** Let $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ be an $m\times n$ matrix. The transpose of $\boldsymbol{A}$, denoted by $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, is obtained by exchanging the rows and the columns of $\boldsymbol{A}$, i.e., it is the $n\times m$ matrix $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})$. The conjugate transpose of $\boldsymbol{A}$, denoted by $\boldsymbol{A}^H$, is defined as $\boldsymbol{A}^H=(\bar{a}_{ji})$.

**定义 1.2.8** 称 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆(或非奇异),如果存在一个 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$. $\boldsymbol{B}$ 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的逆,记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

**Definition 1.2.8** A square matrix $\boldsymbol{A}$ of order $n$ is called invertible (or nonsingular), if there exists a square matrix $\boldsymbol{B}$ of order $n$ such that $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$. $\boldsymbol{B}$ is called the inverse of $\boldsymbol{A}$, written as $\boldsymbol{A}^{-1}$.

**定义 1.2.9** $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,记作 $\det(\boldsymbol{A})$, 定义为

**Definition 1.2.9** The determinant of a square matrix $\boldsymbol{A}$ of order $n$, denoted by $\det(\boldsymbol{A})$, is defined by the formula (1.2.4),

$$\det(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\ j=1,2,\cdots,n, \tag{1.2.4}$$

其中 $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式.

where $A_{ij}$ is the algebraic complementary determinant of $a_{ij}$.

**定义 1.2.10** $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹,记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$, 定义为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

**Definition 1.2.10** The trace of a square matrix $\boldsymbol{A}$ of order $n$, denoted by $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$, is defined as $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

**性质 1.2.1**

**Property 1.2.1**

$$(1)\ (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times q};$$

(2) $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$;

(3) $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$;

(4) $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \det(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$;

(5) $\det(c\boldsymbol{A}) = c^n\det(\boldsymbol{A})$, $c \in \mathbf{R}, \boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

### 1.2.2 特殊矩阵

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

(1) 对角矩阵

### 1.2.2 Special Matrices

Let $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

(1) Diagonal matrix

$$a_{ij} = 0,\ i \neq j;$$

(2) 三对角矩阵 | (2) Tridiagonal matrix

$$a_{ij} = 0,\ |i-j| > 1;$$

(3) 上三角矩阵 | (3) Upper triangular matrix

$$a_{ij} = 0,\ i > j;$$

(4) 上海森伯格阵 | (4) Upper Hessenberg matrix

$$a_{ij} = 0,\ i > j+1;$$

(5) 对称矩阵 | (5) Symmetric matrix

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A};$$

(6) 埃尔米特矩阵 | (6) Hermite matrix

$$\boldsymbol{A}^{H} = \boldsymbol{A};$$

(7) 对称正定矩阵 | (7) Symmetric positive definite matrix

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0};$$

(8) 正交矩阵 | (8) Orthogonal matrix

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}};$$

(9) 酉矩阵 | (9) Unitary matrix

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{H}.$$

**定理 1.2.1** 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$，则下述命题等价：

(1) 对任何 $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$，线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(2) 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有唯一解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$；

(3) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$；

(4) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在；

(5) $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n$，即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$.

**Theorem 1.2.1** Let $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$. The following propositions are equivalent:

(1) The linear system $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ has a unique solution for any $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$;

(2) The homogenous system $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ has a unique solution $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;

(3) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$;

(4) $\boldsymbol{A}^{-1}$ exists;

(5) The rank of $\boldsymbol{A}$ is $n$, namely, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$.