全国中小学教师继续教育网
www.teacher.com.cn
东北师范大学网络教育学院学历教育系列教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

东北师范大学网络教育学院 组编

陶 剑/主编

东北师范大学出版社
Northeast Normal University Press

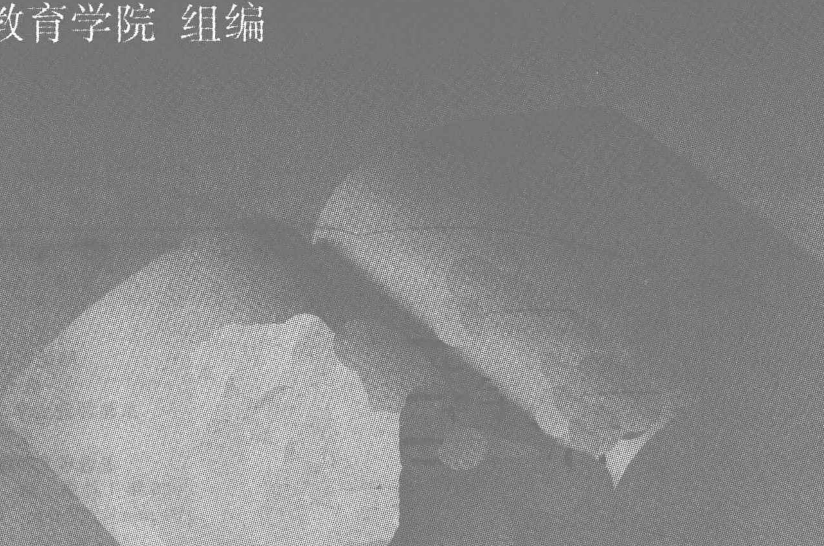
GAILÜLUN

YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

东北师范大学网络教育学院 组编

陶 剑 / 主编



东北师范大学出版社 长 春

Northeast Normal University Press

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/陶剑主编. —长春：东北师范大学出版社，2006.4
ISBN 7-5602-4483-1

Ⅰ.概... Ⅱ.陶... Ⅲ.①概率论②数理统计
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 135902 号

□责任编辑：刘晓军 □封面设计：宋 超
□责任校对：郭 红 □责任印制：张文霞

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
电话：0431—5687213
传真：0431—5691969
网址：http：//www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春市永昌印业有限公司印装
长春市义和路 25—1 号 邮编：130021
2006 年 4 月第 1 版 2006 年 4 月第 1 次印刷
幅面尺寸：170 mm×227 mm 印张：20 字数：380 千
印数：0 001 — 3 000 册

定价：25.00 元

前　言

《概率论与数理统计》是研究随机现象客观规律性的数学学科。一方面，它有自己独特的概念和方法，内容十分丰富；另一方面，它已充分渗透到很多相关领域。近年来，随着科学技术迅猛发展，概率论与数理统计在经济、教育、遗传、医药、物理、化学、环境污染、政治及社会科学、心理学等方面均发挥着至关重要的作用。

按照“以学生为中心”的现代教学思想，结合教育部面向21世纪理科类课程教学和教学内容改革的有关精神，本教材的编写在符合教学大纲要求的前提下，不过分追求深度，而是把着眼点放在如何能够激发学生的自学兴趣上，最终使学生达到自主学习的目的。

在教材内容的选编方面，我们力求明确目的，突出重点，讲清难点，同时兼顾学生的特点，注重启发性，由浅入深，循序渐进。在选材和叙述上尽量做到从实际背景出发，注重应用，学生通过选材不难发现本门课程与生活实际的密切联系。每节后均配有练习题，章后配有习题。此外，为方便学生自学，各章后均有总结，概述了本章的主要内容以及重点、难点。全书的最后提供了总复习题。

在教材内容取舍方面，本教材偏重于介绍统计的基本思想和方法，尤其是尝试性地简介了 Bayes 方法、Monte Carlo 方法，以及统计判决方法。其目的在于拓宽学生视野，了解当代统计发展动向。为了让学生更好地理解和消化所学基本内容，各章均配有典型例题，再对应给出练习题，最后配有“牛刀小试”一栏，目的在于学生自测自检，积小胜为大胜。

本书编写过程中，我们参考了大量的国内外的优秀教材和文献资料，特别是在习题选配方面，吸取了其中的不少精华部分，谨在此一并致谢。

由于我们水平有限，书中的缺点、错误一定不少，恳请读者、专家批评指正。

目　录

第一章　随机事件与概率

名家小传

雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli,1654 ～ 1705)

雅各布·伯努利是瑞士著名数学家. 1690年他首先使用数学意义下的"积分"一词;同年提出悬链线问题,后又改变条件,解决了更复杂的悬链问题并应用于设计吊桥. 1713年,他编写了《猜度术》一书,给出"伯努利数"、"伯努利大数定律". 他还研究了对数螺线,发现该线经过变换仍为对数螺线的奇妙性质.

本章导读

本章介绍了一种新的但普遍存在的现象 —— 随机现象. 在大量随机现象中存在着统计规律性,概率论便是研究随机现象的一门数学学科.

"事件"与"概率"是概率论中最基本的两个概念. 为了使读者清楚地理解事件与概率的直观意义,我们将采用由具体到抽象,由简单到复杂,由特殊到一般的方式介绍概率的计算方法,并从中归纳出事件与概率的本质特征,给读者深入学习奠定基础.

独立性是概率论中最重要的概念之一. 它是概率论中特有的概念. 在独立性假定下得到的结果构成了经典概率论的主要内容.

事件的运算与概率的计算是本章的基本内容,也是学习以后各章的必要基础,务必牢固掌握. 正确地进行概率计算的前提和常用的技巧是恰当地将复杂的事件"拆分"成一些较简单的事件的关系式,而后运用加法公式与乘法公式即可算出结果.

鉴于本章的内容对中学数学教学有直接的指导作用,希望大家多做练习,熟练掌握各种解题技巧.

通过本章内容的学习,要求达到如下目标:

(1) 了解随机事件的概念,掌握事件间的关系与运算.

(2) 了解事件频率的稳定性,理解概率的含义,掌握概率的基本性质和加法定

理,会计算简单的古典概率.

(3) 理解条件概率的概念和事件独立性概念,掌握乘法定理,会利用全概率公式和贝叶斯公式.

(4) 掌握伯努利概型和二项概率的计算方法.

1.1 样本空间与随机事件

100 张电影票中,有 1 张甲票,99 张乙票. 从这 100 张电影票中任取一张,众所周知,最可能取得乙票. 取得甲票的可能性不能说没有,却是很小的. 投掷一枚硬币,正面朝上的可能与反面朝上的可能应该说是一样的. 由此,人们常常用投掷硬币的办法来决定一场球赛中哪个队先发球. 诸如此类的事情,在实践中还会遇到许多,我们必须对每个事件讨论其发生的可能性大小,并进行比较.

概率就是事件发生可能性大小的数值量度. 在这一章中,我们将定义事件及事件的概率,并讨论相应的性质. 其重点放在如何计算一个事件的概率上.

1.1.1 随机试验与随机事件

在自然界里,人们在实践活动中所遇到现象一般可分为两类:

一类现象是,在一定条件下,必然会出现某种确定的结果. 例如,在标准大气压下,水加热到 100℃ 时沸腾,是确定会发生的现象;向上抛一枚硬币,由于受到地心引力的作用,硬币上升到某一高度后必定会下落. 我们把这类现象称为确定性现象(或必然现象).

另一类现象则是,在一定的条件下,可能会出现各种不同的结果. 也就是说,在完全相同的条件下,进行一系列观测或实验,却未必出现相同的结果. 例如,抛掷一枚硬币,当硬币落在地面上时,可能是正面朝上,也可能是反面朝上,在硬币落地之前我们不能预知究竟哪一面朝上. 我们把这类现象称为随机现象(或偶然现象).

我们生活的世界,充满着不确定性. 人们虽然能够精确地预卜尚未发生的确定现象的必然事件,却难于预卜尚未发生随机现象的随机事件. 我们人类就生活在这种随机事件的海洋里.

应用概率统计就是研究大量随机现象统计规律性的一门数学学科.

为了研究随机现象的统计规律性,我们把各种科学试验和对某一事物的观测统称为试验. 如果试验具有下述特点:

① 可以在相同的条件下重复进行;

② 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

这种试验被称为随机试验，简称试验. 通常用字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示随机试验.

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称事件.

在每次试验中，当且仅当给定子集中的一个样本点出现时，就称这一事件发生.

由一个样本点组成的单点集称为基本事件. 由若干基本事件复合而成的事件称为复合事件.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，也是 S 的子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

例 1.1.1　试验 E：在一个口袋中装有黄、红两个球，从中随机取一球，记下它的颜色. 在这个试验中，样本空间 S 由下列两个基本事件构成：

$$\omega_1 \triangleq \{\text{是黄球}\}, \omega_2 \triangleq \{\text{是红球}\}, S = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

例 1.1.2　试验 E：在一个口袋中装有白、黑两个球，从中随机取一球，记下它的颜色，然后放回，再取一球，又记下它的颜色. 在这个试验中要考虑取球的顺序. 则样本空间 S 由下列四个基本事件构成：

$$\omega_1 \triangleq \{\text{白、白}\}; \omega_2 \triangleq \{\text{白、黑}\}; \omega_3 \triangleq \{\text{黑、白}\}; \omega_4 \triangleq \{\text{黑、黑}\};$$

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

注　由于取球的顺序应予考虑，所以事件{黑、白}与事件{白、黑}是两个不同的事件.

例 1.1.3　试验 E：观察某电话交换台在某一段时间内接到的呼唤次数. 这时，样本空间由下面可列个基本事件组成：

$$\omega_i \triangleq \{\text{接到 } i \text{ 次呼唤}\}, i = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$S = \{\omega_0, \omega_1, \cdots\}.$$

在这个试验中，"位于该段时间内电话交换台接到的呼唤次数不超过 8 次"是一个复合事件.

在以上三个例子中，样本空间中元素的个数是有限个或可列个. 实际上还有一些随机试验，它所对应的样本空间其中的元素个数不是可列的. 例如：

例 1.1.4　观测某试验小区小麦的总产，这时样本空间由下面的基本事件组成：

$$\omega_\alpha \triangleq \{\text{总产为 } \alpha \text{ 公斤}, 0 \leqslant \alpha < \infty\}, S = \{\omega_\alpha : 0 \leqslant \alpha < \infty\}.$$

在这个试验中，"某试验小区小麦的总产超过 800 公斤"是复合事件.

在今后的讨论中,我们经常认为样本空间是预先给定的.如何用一个恰当的样本空间去描述某个随机试验,很值得研究.但是,在概率论的理论研究中,通常把样本空间当做给定的.这种必要的抽象有助于把握问题的实质,并能将结果广泛地应用.例 1.1.1 给出的样本空间只包含两个基本事件,它可以描述许多随机试验.例如,它可以作为掷硬币出现正、反面的模型,可以作为射击试验中“命中”与“脱靶”的模型,可以作为流行病学研究中“患病”与“不患病”的模型,还可以作为气象学中的“下雨”与“不下雨”的模型等等.正确的抽象将是研究概率论的一种主要方法.

1.1.2 事件的关系与运算

在一个样本空间中显然可以定义不止一个事件.这些事件之间有何关系?一些较复杂的事件如何能用一些较简单的事件的关系式表示?所有这些问题的解决将对计算事件的概率起重要的作用.

下面,我们讨论事件之间的关系及运算,主要讲两个事件 A 与 B 之间的关系.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必导致事件 B 发生,则事件 B 包含事件 A,或称 A 是 B 的子事件,记为 $A \subset B$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A = B$.

2. 事件的和(或并)

事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件,当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

3. 事件的积(或交)

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件,当且仅当 A,B 中同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生,$A \cap B$ 也记做 AB.

4. 事件的差

事件 $A-B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的差事件,当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A - B$ 发生.

5. 互不相容事件

若 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与 B 是互不相容或互斥的,即事件 A 与事件 B 不能同时发生.基本事件是两两互不相容.

6. 对立事件

若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$ 则称事件 A 与事件 B 互为逆事件或称 A 与 B 为对立事件,即每次试验中,事件 A 与 B 必有一个发生且仅有一个发生.A 的对立事件记为 $\overline{A}$,显然 $\overline{A} = S - A$.

7. 事件的运算律

交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

德·摩根(De Morgan)律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

在熟练掌握事件间的关系与运算，以及事件的运算律的基础上，对具体问题进行具体分析，可用已知事件表达复合事件. 下面举例予以说明：

例 1.1.5　(1)“A 发生，而 B 与 C 都不发生”可表示为$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A(\overline{B \cup C})$；

(2)“A,B,C 中恰有一个发生”可表示为$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$；

(3)“A,B,C 中恰有两个发生”可表示为$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$ 或 $AB \cup BC \cup CA - ABC$；

(4)“A,B,C 中不多于一个发生”可表示为$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或$\overline{AB \cup BC \cup CA}$.

上面的表示法是根据事件的关系与运算，以及事件的运算律得到的，比如(1)，单个看，是 A 发生的，B 不发生，C 也不发生，所以就是$A\overline{B}\,\overline{C}$；

把“B,C 都不发生”一起看，它的逆事件是“B,C 中至少一个发生”，即 $B \cup C$，于是“B,C 都不发生”就是$\overline{B \cup C}$，所以结果可以写成$A(\overline{B \cup C})$.

例 1.1.6　三只考签由三名考生轮流放回抽取一次，每次取一只，试用已知事件表示“至少有一只考签没有被抽到”这一事件.

设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示“第 i 只考签被抽到”，则“至少有一只考签没被抽到”可表示为 $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$ 或$\overline{A_1A_2A_3}$.

思考题

对立事件与互斥事件有何联系与区别？

提　示

它们的联系与区别是：

(1) 两事件对立，必定互斥，但互斥未必对立.

(2) 互斥的概念适用于多个事件，但对立的概念只适用于两个事件.

(3) 两个事件互斥只表明这两个事件不能同时发生，即至多只能发生其中一个，但可以都不发生. 而两事件对立则表示它们有且仅有一个发生，即肯定了至少有一个发生.

1.2 概率的定义及性质

第二次世界大战中，美国曾经宣称：一名优秀数学家的作用超过 10 个师的兵力. 你可知这句话的由来吗?

1943 年以前，英美运输船队在大西洋上常受到德国潜艇的袭击. 当时，英美两国限于实力，无力增派更多的护航舰，一时间，德军的“潜艇战”搞得盟军焦头烂额.

为此，有位美国海军将领专门去请教了几位数学家. 数学家们运用概率论分析后发现，舰队与敌潜艇相遇是一个随机事件，从数学的角度看这一问题，它具有一定的规律. 一定数量的船(如 100 艘)编队规模越小，编次就越多(如每次 20 艘，就要有 5 个编次)；编次越多，与敌人相遇的概率就越大. 比如 5 名同学放学都回自己家里，老师要找一名同学的话，随便去哪家都行，但若这 5 名同学都在其中一家的话，一次找到的可能性只有 20%.

美国海军接受了数学家的建议，命令船队在指定海域集合，再集体通过危险海域，然后各自驶向预定港口. 结果奇迹出现了：盟军舰队遭袭被击沉的概率由原来的 25% 降低为 1%，大大减少了损失，保证了物资的及时供应.

在本节中，我们首先给出概率的严格数学定义，然后讨论概率的基本性质.

1.2.1 概率的定义

定义 1.2.1 设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

① 非负性 对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

② 规范性 $P(S) = 1$；

③ 可列可加性 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即 $i \neq j$ 时，$A_iA_j = \varnothing$，$i,j = 1,2,\cdots$，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$.

1.2.2 概率的性质

① $P(\varnothing) = 0$；

② 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

③ 对于任一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

④ 对于任意两事件 A, B，有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

证明思路 利用有限可加性的前提是两个求和的事件互不相容，为此，应把任

意两个事件 A 与 B 的和表示成两个互不相容的事件的和，然后再利用有限可加性即得. 这种方法是十分典型的，本书中以下称这种技巧为"拆分法".

证明　因为 $A\cup B=A\cup B\overline{A}$，其中 $A\cap(B\overline{A})=\varnothing$，所以

$$P(A\cup B)=P(A\cup B\overline{A})=P(A)+P(B\overline{A}),$$

但是
$$B=BA\cup B\overline{A},\text{且}(BA)\cap(B\overline{A})=\varnothing,\text{有}$$

$$P(B)=P(AB)+P(B\overline{A})\Rightarrow P(B\overline{A})=P(B)-P(AB),$$

故结论得证.

⑤ 对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_K)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1.2.1　袋中装有 $N-1$ 个黑球和一个白球，每次随机摸出一球，并换回一只黑球，这样继续下去，问第 k 次摸到黑球的概率为多少？

解　设 A 为第 k 次摸到黑球这一事件，则 $\overline{A}$ 为第 k 次摸到白球，则由题意，$\overline{A}$ 为前 $k-1$ 次都摸黑球，而第 k 次摸白球. 从而

$$P(\overline{A})=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N},$$

进而可得：

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}.$$

本题若直接计算 $P(A)$，则复杂多了.

1.3　古 典 概 型

定义 1.3.1　设随机试验 E 具有如下两个特征：

① 样本空间的元素只有有限个，即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$；

② 每一个基本事件的概率相等，即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$.

则试验 E 所对应的概率模型被称为古典概型（或称为等可能概型）.

对于古典概型，事件的概率公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所含基本事件数}}{\text{基本事件的总数}},$$

A 中所含基本事件数也称 A 的有利场合数.

例 1.3.1　一次投掷两颗骰子，求出现的点数之和为奇数的概率.

解法 1　设 A 表示"出现点数之和为奇数"，用 (i,j) 记"第一颗骰子出现 i 点，第二颗骰子出现 j 点"，$i,j=1,2,\cdots,6$. 显然，出现的 36 个基本事件组成等概样本

空间，其中 A 包含的基本事件个数为 $k = 3\times 3 + 3\times 3 = 18$，故 $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

解法 2 若把一次试验的所有可能结果取为：(奇，奇)，(奇，偶)，(偶，奇)，(偶，偶)，则它们也组成等概样本空间. 基本事件总数 $n = 4$，A 包含的基本事件个数 $k = 2$，故 $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

解法 3 若把一次试验的所有可能结果取为：{点数和为奇数}，{点数和为偶数}，也组成等概样本空间，基本事件总数 $n = 2$，A 所含基本事件数为 1，故 $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

注 找出的基本事件组构成的样本空间必须是等概的. 解法 2 中倘若解为：(两个奇)，(一奇一偶)，(两个偶) 当做基本事件组成样本空间，则得出 $P(A) = \dfrac{1}{3}$，错的原因就是它不是等概的. 例如 $P(\text{两个奇}) = \dfrac{1}{4}$，而 $P(\text{一奇一偶}) = \dfrac{1}{2}$. 本例又告诉我们，同一问题可取不同的样本空间解答.

例 1.3.2 某专业研究生复试时，有 3 张考签，3 名考生应试. 一个人抽一张看后立刻放回，再由另一个人抽，如此 3 人各抽一次，求抽签结束后，至少有一张考签没被抽到的概率.

解法 1 A_i 表示"第 i 张考签没被抽到"，$i = 1,2,3$. A 表示"至少有一张考签没被抽到"，于是有 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. 而

$$P(A_i) = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}, i = 1,2,3.$$

$$P(A_iA_j) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}, i \neq j, i,j = 1,2,3.$$

$$P(A_1A_2A_3) = 0.$$

所以，
$$P(A) = \frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{8}{27} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{9}.$$

解法 2 由于 $\overline{A}$ 表示"三张都被抽到"，且

$$P(\overline{A}) = \frac{P_3^1 P_2^1 P_1^1}{3^3}, \frac{6}{27} = \frac{2}{9},$$

所以，

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{7}{9}.$$

注 此类问题可以利用加法公式来计算，这给我们提供了一种方法：将一个复杂的事件分解成若干个简单事件的和，于是就可以利用加法公式计算复杂事件的概率. 该例的解法 2 还表明，当计算 $P(A)$ 很麻烦，而计算 $P(\overline{A})$ 比较方便时，常常

先计算 $P(\overline{A})$，再计算 $P(A)$.

例 1.3.3　（生日问题）如果你新到一个班级，那么你完全可以大言不惭地对你班上 49 名新伙伴作一次惊人的宣布："新班级里一定有人生日是相同的！"我想大家一定会惊讶不已！可能连你本人也会感到难以置信吧！因为首先，你对他们的生日一无所知，其次，一年有 365 天，而你班上只有 50 人，难道生日会重合吗？但是，我必须告诉你，这是极可能获得成功的.

这个游戏成功的道理是什么呢？原来，全班 50 名同学生日都不同的概率为：

$$\frac{365\times 364\times 363\times\cdots\times 316}{365^{50}},$$

经计算，可得上式结果为：$P(\text{全不相同})=0.0295$.

由于 50 人中有人生日相同和全不相同这两件事，二者必居其一，所以

$$P(\text{有相同})+P(\text{全不相同})=1.$$

$$P(\text{有相同})=1-P(\text{全不相同})=1-0.0295=0.9705.$$

即你的成功把握超过 97%，而失败的可能性不足 3%，这是一个很小的概率，可以断定这个很小的概率是不会在一次游戏中发生的.

现在，请你思考一下：如果一个你所在的年级有 80 人或更多，情形又会如何呢？

在概率计算中，若某个事件的概率计算起来比较麻烦，这时代之为考虑这个事件的对立事件，而后利用 $P(\overline{B})=1-P(B)$ 往往会容易地、迅速地得出结果.

1.4　条件概率与概率乘法公式

条件概率的定义

首先，我们给出条件概率的定义.

定义 1.4.1　设 A,B 是两个事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率.

释疑解难

条件概率是不是概率？它与无条件概率有何区别？

条件概率是一种概率，可以验证. 它满足概率定义中的三个条件，具体地说，$P(B\mid A)$ 是在原条件组 S 的基础上又加上"A 发生"这个条件时，B 发生的概率，它与无条件概率（普通概率）$P(B)$ 的区别就在于，后者发生的条件还是原来的条件

组 S. 这里所谓"无条件"是指"无新条件",原来的条件组 S 并非可无.

由定义,我们可得 $P(A \mid B)P(B) = P(A \cap B)$,此式称为乘法定理.一般地,

乘法定理

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件,$n \geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$,则有

$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1} \mid A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2 \mid A_1)P(A_1)$.

释疑解难

条件概率 $P(B \mid A)$ 与积事件的概率 $P(AB)$ 有何区别?

$P(AB)$ 表示在样本空间 S 中,计算 AB 发生的概率.而 $P(B \mid A)$ 表示在缩减的样本空间 S_A 中,计算 B 发生的概率,用古典概率公式,则 $P(B \mid A) = AB$ 中基本事件数 $/S_A$ 中基本事件数;$P(AB) = AB$ 中基本事件数 $/S$ 中基本事件数.一般说,$P(B \mid A)$ 比 $P(AB)$ 大.初学者在计算条件概率问题时,有时比较容易将积事件概率与条件概率混淆,这时须弄清:条件概率一定是在某事件已发生的条件下该事件发生的概率.

例 1.4.1 据以往资料表明,某 3 口之家,患某种传染病的概率有以下规律.$P\{$孩子得病$\} = 0.6$,$P\{$母亲得病 $\mid$ 孩子得病$\} = 0.5$,$P\{$父亲得病 $\mid$ 母亲及孩子得病$\} = 0.4$,求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解 设 A_1, A_2, A_3 分别表示孩子、母亲及父亲得病,由三个事件的乘法公式,可得 $P(A_1A_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_3 \mid A_1A_2) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) = 0.6 \times 0.5 \times 0.6 = 0.18$.

利用条件概率的"变着",我们可得"全概率公式",其具体形式如下:假设事件 A 仅当 n 个互不相容的事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中任一事件发生时它才可能发生,那么

$$P(A) = P(A \cap S) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\right) = P(AB_1) + \cdots + P(AB_n),$$

对上式右端的每个求和项再分别利用条件概率公式可得:

全概率公式

$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2) + P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n)$,

其中,$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_k) > 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$.进一步,可得

贝叶斯(Bayes)公式

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k)} (i = 1, 2, \cdots, n).$$

其中 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(A) > 0, P(B_k) > 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$.

例 1.4.2　两所医院的死亡率(全概率公式)

陈医生翻查两所医院(简称 A 和 B)的年报，发现如下统计数字(见表 1.4.1)：

表 1.4.1

	医院 A	医院 B
动手术后康复人数	916	1880
动手术后死亡人数	84	120
动手术的总人数	1000	2000

于是，他计算了一下每所医院动手术后的死亡率.医院 A 有 1000 人动手术，其中有 84 人死亡，死亡概率为 $P_A(\text{死亡}) = 84/1000 = 0.084$，医院 B 有 2000 人动手术，其中有 120 人死亡，死亡概率为 $P_B(\text{死亡}) = 120/2000 = 0.06$.由于医院 B 的死亡率较低，陈医生认为医院 B 动手术的技术比医院 A 要高明，于是把自己的病人都介绍到医院 B 去了.

另一位黄医生却比较细心，他把上面的数据再作深入分析，发现在医院 A 要动手术的 1000 名病人中，有 800 名要动大手术，200 名动小手术，而死亡人数分别是 80 和 4(见表 1.4.2(a)).他发现在医院 B 要动手术的 2000 名病人中，有 500 名要动大手术，1500 名动小手术，而死亡人数分别是 60 和 60(见表 1.4.2(b)).

表 1.4.2(a)　　　　**医　院　A**

	大手术	小手术	总数
动手术后康复人数	720	196	916
动手术后死亡人数	80	4	84
动手术的总人数	800	200	1000

表 1.4.2(b)　　　　**医　院　B**

	大手术	小手术	总数
动手术后康复人数	440	1440	1880
动手术后死亡人数	60	60	120
动手术的总人数	500	1500	2000

于是黄医生计算一下每种手术的死亡率，答案如下：

医院 A——

$P_A(\text{死亡} \mid \text{大手术}) = 80/800 = 0.1$，$P_A(\text{死亡} \mid \text{小手术}) = 4/200 = 0.02$.