普通高校"十二五"规划教材

公共基础课系列

概率论与数理统计

刘宏超 主 编

周高军 李志勇 副主编

清华大学出版社

普通高校"十二五"规划教材
公共基础课系列

概率论与数理统计

刘宏超　主　编
周高军　李志勇　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是一本高等学校非数学专业的概率论与数理统计教材，全书共八章，内容包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征及极限定理、数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验和方差分析与回归分析. 各章后面选配了适量的习题，并在书后附有习题答案，附录中给出了常用的概率统计用表. 本书简明扼要地介绍了概率论与数理统计所必需的基本知识和基本理论，举例分析了各类常用的方法，并对一些问题的解决方法进行了归纳总结.

本书可作为普通高等院校经济管理类和文史类本科学生和高职高专学生的教学用书.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售.
版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘宏超主编. --北京：清华大学出版社，2011.12
(普通高校"十二五"规划教材·公共基础课系列)
ISBN 978-7-302-27123-9

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材
Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 222705 号

责任编辑：梁云慈
责任校对：王凤芝
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印　张**：11.75　**字　数**：336 千字
版　次：2011 年 12 月第 1 版　　**印　次**：2011 年 12 月第1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：25.00 元

产品编号：044318-01

前言

“概率论与数理统计”是高等学校所设置的唯一的一门研究随机现象统计规律的基础课.概率论与数理统计作为现代数学的一个分支,在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有极为广泛的应用.特别是近30年来,随着计算机的迅速普及,概率统计在经济、管理、金融、保险、生物、医学等方面的应用更是得到了长足的发展.正是由于这种应用的广泛性,使得这门课程成为大学各专业的必修课程.根据作者及同行们多年的教学体会,我们了解到初学者往往对这门课程的概念和理论的领会感觉困难,鉴于这一点,本书致力于借助较少的数学知识来讲清楚这门课程最基本的概念和方法,并用大量的例题来说明概率统计广泛的应用性.

概率论是对随机现象统计规律理论的研究,而数理统计是对随机现象统计规律进行归纳的研究,也就是说前者是后者的理论根源,后者是前者的实践应用.二者虽然在方法上有明显的不同,但作为一门学科,它们却是相互渗透、相互联系的.本书的编排也大致分为两大部分.第一部分是概率论,包括前四章,内容有随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征及极限定理;第二部分是数理统计,包括后四章,内容有数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验和方差分析与回归分析.为了帮助学生掌握书中的概念及方法,每章末附有习题,希望学生至少练习总题量的2/3以上,从而才能展开解题思路,加深对这门课程的理解.

本书具有以下特点.

(1) 对概率论与数理统计中的基本概念、定理和公式作比较严谨的叙述,尽量讲清楚这些基本概念、定理和公式的实际意义及应用.

(2) 力求加强基础,淡化专业,注重知识讲解的趣味性.我们坚信,只有让学生觉得读起来亲切有趣才能更好地发挥教材的作用,因此,本书在编写过程中尽量使用平和的语言、有趣的例子,希望读者能够喜欢这种风格.

(3) 教材中注重引导建模的思想和方法,希望借此提高学生的创造性思维能力和实际应用能力.

(4) 为了加强学生对基础知识的训练和综合能力的培养,我们配置了数量充分、类型全面、难易适中的典型习题,并在书后附有习题答案,供学生参考使用.

本书可作为普通高等院校经济管理类和文史类本科学生和高职高专学生的教学

用书.

本书由刘宏超主编,周高军、李志勇任副主编.编写分工为:第一章、第六章的第二节由武大勇编写,第二章、第四章的第四节由岳红云编写,第三章、第六章的第一节由李志勇编写,第四章的前三节、第八章由刘宏超编写,第五章和第七章由周高军编写.

在本书的编写过程中,我们始终得到了各编委所在院校同行们的鼓励、支持和帮助,在此深表感谢.另外,编写过程中还参考了很多学者和专家们的研究成果,在此一并表示感谢.

限于编者水平,书中难免会存在缺点和错误,希望读者批评指正.

编　者

2011 年 7 月

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

目 录

第一章

随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.自 20 世纪以来,它广泛应用于工业、农业、国防、教育等各个方面.本章将介绍随机事件及其概率,这是概率论中最基本、最重要的概念之一.

第一节　随机事件及其关系

一、随机现象与随机试验

在一定的条件下,无法准确预知其结果的现象称为随机现象.在自然界和现实生活中,随机现象到处可见,如掷一枚硬币、掷一枚骰子、明天沪市的大盘点数等.

和随机现象相对立的另一类现象称为确定性现象,即在一定的条件下必定出现的现象.如:每天早上太阳从东方升起,作匀速直线运动的物体在不受外力的作用下不会改变其运动状态、在 1 标准大气压下水加热到 100℃会沸腾等.

在相同的条件下可重复的随机现象又称为随机试验.在自然界和现实社会生活中,有些随机现象是可以重复的,如上面提到的掷硬币、掷骰子等;而有些随机现象是不能够重复的,如某场足球比赛的输赢是不能重复的,某些经济现象(如就业率、GDP 的增长速度)也是不能重复的.对于可重复的随机现象,人们可从大量的重复的随机试验中来发现其规律性,这种规律性我们把它称为随机现象的统计规律性.

历史上,研究随机现象的统计规律性最著名的试验有掷硬币试验、英文字母的频率试验等.表 1-1 和表 1-2 分别是历史上这两种试验的记录.

表 1-1　历史上掷硬币试验的若干结果

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	频率
De Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Feller	10 000	4 979	0.497 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
K Pearson	24 000	12 012	0.500 5

由表 1-1 可以看出，随着试验次数的增加，正面出现的频率越来越明显地呈现出稳定性，即正面出现的频率大致是在 0.5 这个数字的附近摆动.

表 1-2　英文字母的使用频率

字　母	使用频率	字　母	使用频率	字　母	使用频率
A	0.078 8	J	0.001 0	S	0.063 4
B	0.015 6	K	0.006 0	T	0.097 8
C	0.026 8	L	0.039 4	U	0.028 0
D	0.038 9	M	0.024 4	V	0.010 2
E	0.126 8	N	0.070 6	W	0.021 4
F	0.025 6	O	0.077 6	X	0.001 6
G	0.018 7	P	0.018 6	Y	0.020 2
H	0.057 3	Q	0.000 9	Z	0.000 6
I	0.070 7	R	0.059 4		

由表 1-2 可以看出，英文中某些字母(如 E，T，A)等出现的频率要高于另外一些字母(如 Z，Q，J). 但是，大量的统计数字表明，各个字母使用的频率却相当稳定，这一统计规律性对于计算机键盘的设计、信息的编码等方面都是十分有用的.

二、样本空间与随机事件

对于一个随机试验，虽然在试验的结果中所有可能的结果是知道的，并且一次试验有且仅有一个结果出现，但在试验前却无法预知哪一个结果将出现. 在此，我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个样本点，通常用字母 ω 表示，试验的所有样本点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots$ 构成的集合称为样本空间，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$.

例 1.1　设试验为掷一枚硬币，则有两个样本点：$\omega_1=$“正面向上”，$\omega_2=$“反面向上”，则样本空间可记为：$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 1.2　观察某一商场一天内出现的顾客数，其样本点有可数无穷多个 $i(i=0,1,2,\cdots)$，则样本空间可简记为：$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 1.3　设试验为测量车床加工零件的直径，则有样本点 $\omega_x=$“测得零件的直径为 $x$mm”$(a\leqslant x\leqslant b)$，于是样本空间为不可数无穷多个样本点构成的集合：

$$\Omega=\{\omega_x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

随机试验的某些样本点组成的集合称为随机事件，简称事件，通常用大写字母 A、B、C 等表示. 例如，在掷一枚骰子试验中，$A=$“出现偶数点”即是一个随机事件，且 $A=\{2,4,6\}$.

由上随机事件的定义我们可以看出：

(1) 任一随机事件 A 是相应样本空间的一个子集；

(2) 在一次试验中，当事件 A 中的某个样本点出现了，就说事件 A 发生了；

(3) 由样本空间 Ω 中一个元素组成的子集称为基本事件，而样本空间 Ω 称为必然事件，空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

掷一枚骰子，其样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，事件 $A=$“出现奇数点”，即 $A=\{1,3,5\}$；事件 $B=$“出现 4 点”，即 $B=\{4\}$，为一基本事件；事件 $C=$“点数小于 7”，即 $C=\Omega$，为必然事件；事件 $D=$“点数大于 6”，即 $D=\varnothing$，为不可能事件.

三、随机事件间的关系与运算

由于任一随机事件都是样本空间的一个子集，所以事件的关系及运算与集合的关系及运算是完全类似的. 在下面的讨论中，我们叙述事件的关系和运算所采用的符号也与集合的关系及运算基本上是一致的.

(1) 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B. 其含义是事件 A 的发生必将导致事件 B 的发生，显然 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2) 若 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等. 其含义是事件 A(或 B)的发生必将导致事件 B(或 A)的发生，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

(3) 事件 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的并(和)，其含义是当且仅当事件 A,B 中至少有一发生时事件 $A\cup B$ 才发生.

“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件发生”这一事件叫做事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(4) 事件 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与 B 的交(积)，其含义是当且仅当事件 A,B 同时发生时事件 $A\cap B$ 发生，事件 $A\cap B$ 可简记为 AB.

“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生”这一事件叫做事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$(简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(5) 事件 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的差，其含义是当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时事件 $A-B$ 发生.

(6) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称二事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的)，其含义是二事件 A 与 B 不可能同时发生.

(7) $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 是对立的(或互逆的)，称事件 A 为事件 B 的对立事件(逆事件). 其含义是，对于每一次试验而言，事件 A 与事件 B 有且仅有一个必然发生，事件 A 的逆事件记为 $\overline{A}$，显然 $\overline{A}=\Omega-A$.

(8) 互不相容的完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限个事件，若满足：

① $A_iA_j=\varnothing, 1\leqslant i<j\leqslant n$;

② $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成了一个互不相容的完备事件组,也称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分.显然,事件 A 和 $\overline{A}$ 构成一互不相容的完备事件组.

事件的关系及运算也可见下面的文氏图(图 1-1~图 1-3):

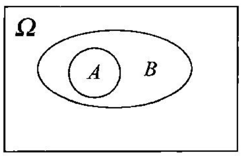

图 1-1　$A\subset B$

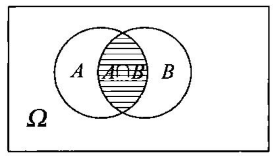

图 1-2　$A\cap B$

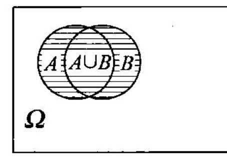

图 1-3　$A\cup B$

事件的运算规律与集合的运算规律类似.设 A,B,C 为三个随机事件,有

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律:$A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$;

(4) 德摩根(De Morgen)定律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$(两个事件),$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$,$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$(多个事件);

(5) 自反律:$\overline{\overline{A}}=A$.

例 1.4　检查产品质量时,从一批产品中任意抽取 5 件样品进行检查,若用 A_i 表示发现 i 件次品,$i=0,1,\cdots,5$,则可能的结果是:$A_0,A_1,\cdots,A_5$,用 A_i 表示下列事件:

(1)"发现 2 件或 3 件次品"(事件 B),则 $B=A_2\cup A_3$;

(2)"最多发现 2 件次品"(事件 C),则 $C=A_0\cup A_1\cup A_2$;

(3)"至少发现 1 件次品"(事件 D),则 $D=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$ 或 $D=\overline{A_0}$.

例 1.5　设 A,B,C 表示 3 个随机事件,试通过 A、B、C 表示下列随机事件.

(1) A 发生而 B,C 不发生:$A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) A,B 都发生而 C 不发生:$AB\overline{C}$;

(3) A,B,C 都发生:ABC;

(4) A,B,C 至少有 1 件发生:$A\cup B\cup C$;

(5) A,B,C 至少有 2 件发生:$AB\cup BC\cup AC$;

(6) A,B,C 都不发生:$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$;

(7) A,B,C 不多于 1 件发生:$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

(8) A,B,C 不多于 2 件发生：$\overline{ABC}$；

(9) A,B,C 恰有 2 件发生：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

第二节 随机事件的概率及性质

在这一节中，我们将给出随机事件概率的定义及确定方法，这是概率论中最基本的一个问题. 简单而直观的说法就是：概率是随机事件发生的可能性的大小，虽然在一次试验中一个随机事件 A 是否发生不能确定，但是事件 A 发生可能性的大小——概率却是可以确定的.

一、概率的统计定义

定义 1.1 若在相同的条件下重复进行 n 次试验，其中事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，则称

$$f_n(A)=r_n(A)/n$$

为事件 A 发生的频率.

显然，随机事件的频率具有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$

(2) $f_n(\Omega)=1$

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n)$$

由上一节掷硬币试验和英文字母的频率等试验我们可以看出，在大量重复试验中，随机事件的频率存在着某种客观规律性——频率的稳定性，也即在事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总是在一个确定的数字 p 附近，而且偏差随着试验次数的增大而越来越小，这就是频率的稳定性，由此我们引出概率的统计定义.

定义 1.2 在相同的条件下重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 随着试验次数 n 增大而稳定地在一个确定的数字 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动，称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

由此定义可以看出，利用概率的统计定义来估计某一事件 A 的概率时，试验次数必须要充分大. 如上面提到的掷硬币试验中，事件“正面向上”的概率为 0.5.

二、概率的公理化定义

上述概率的统计定义只适合于一类随机现象（可重复进行），它并不适合于一切随机现象，对于随机事件概率的更一般的定义最早于 1900 年由希尔伯特提出. 1933 年，苏联数学家科尔莫格洛夫给出了概率的公理化定义，只要满足定义中的三条公理，都可以说是概率. 这一公理化体系很快获得了举世公认，可以说概率的公理化定义的给出是概率论发

展史上的一座里程碑.

定义 1.3 设 E 为一随机试验,Ω 为其样本空间,对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,若 $P(A)$满足下列三个条件:

(1) 非负性公理:$P(A)\geqslant 0$;

(2) 正则性公理:$P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性公理:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$互不相容,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

概率的公理化定义并没有告诉人们如何去确定随机事件的概率.历史上,公理化定义出现之前,概率的统计定义、古典定义及几何定义等都从不同的场合给出了计算事件概率的方法,所以在有了概率的公理化定义之后,把它们看做确定概率的方法是恰当的.

三、概率的性质

利用概率的公理化定义,可以推出概率的一系列性质,以下我们逐个给出概率的一些常用性质.

性质 1.1 $P(\varnothing)=0$

证明 由于 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots\cup\varnothing\cup\cdots$,根据可列可加性公理可得

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$$

由正则性公理 $P(\Omega)=1$ 得

$$P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots=0$$

再由非负性公理知 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2 (有限可加性)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件组,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.1}$$

证明 令 $A_k=\varnothing,k>n$,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$两两互不相容,根据可列可加性公理得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}A_i$$

性质 1.3
$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1.2}$$

证明 由于 A 与 $\overline{A}$ 互不相容,且 $A\cup\overline{A}=\Omega$,由性质 1.2 可得

$$P(A)+P(\overline{A})=1,\text{即 }P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 1.4
$$P(A-B)=P(A)-P(AB) \tag{1.3}$$

证明 因为 $A-B=A\overline{B}$,而 $A=A\cap\Omega=A\cap(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$,且 AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容,由性质 1.2 可得 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$,进一步可得 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

推论 1.1 若 $A\supset B$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \tag{1.4}$$

推论 1.2　若 $A \supset B$,则

$$P(A) \geqslant P(B)$$

性质 1.5　对任意两个事件 A、B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.5}$$

证明　因为 $A \cup B = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB$,且事件 $A\bar{B}$、$\bar{A}B$、AB 两两互不相容,则

$$P(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$$

而 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$,$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$,进一步可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

性质 1.5 一般称为概率的加法定理,而且两个事件的加法定理可推广到一般情况. 对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \tag{1.6}$$

例 1.6　已知随机事件 A,B,$A \cup B$ 的概率分别是 0.5,0.6 和 0.7,求 $P(A-B)$ 和 $P(B-A)$.

解　由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$　可得　$P(AB) = 0.4$,所以

$$P(A-B) = P(A) - P(AB) = 0.1$$

$$P(B-A) = P(B) - P(AB) = 0.2$$

四、古典概型与几何概型

1. 古典概型

确定概率的古典方法是概率论历史上最开始研究的情形,它简单、直观,不需要做大量重复试验,因此也是实际应用中最常用的一种概率模型. 古典概型的基本思想如下:

(1) 随机试验 E 的样本空间中只有有限个(n 个)样本点;

(2) 每个样本点在一次试验中出现的可能性是相同的;

(3) 若事件 A 中含有 m 个样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.7}$$

并称此概率为古典概率.

例 1.7　从 0,1,…,9 十个数字中任取一个数字,求取得奇数数字的概率.

解　随机试验的样本空间 $\Omega = \{0,1,2,\cdots,9\}$,样本空间中样本点的个数 $n=10$,取得奇数数字这一随机事件 $A = \{1,3,5,7,9\}$,其包含样本点的个数为: $m=5$,且此概率类型为古典概型,则由式(1.7)可得

$$P(A) = \frac{m}{n} = 0.5$$

注：在本例中，由于样本空间中样本点的个数比较少，我们可以轻松地把它们一一列举出来，根据古典概型中随机事件概率的计算公式求出其概率. 但是，对于一些随机试验，样本空间中样本点的个数比较多，不方便把它们一一列举出来，而实际上对于求某随机事件的概率，我们只需要知道这里的 n 和 m 就够了.

例 1.8 一个袋子中有 100 个黑球和 50 个白球，从中任取 2 个，求取出的 2 个球都是黑球的概率.

解 样本空间中样本点的个数 $n=C_{150}^{2}=11\ 175$，“取出的 2 个球都是黑球”这一随机事件 A 中样本点的个数 $m=C_{100}^{2}=4\ 950$，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4\ 950}{11\ 175}=\frac{66}{149}$$

例 1.9 袋子中有 a 个白球和 b 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回. 接连取 k 个球($1\leqslant k\leqslant a+b$)，求第 k 次取得白球的概率.

解 由于考虑到取球的顺序，我们可以认为：袋子中的 a 个白球和 b 个黑球都是有区别的，所以样本空间中可能的样本点的个数为

$$n=A_{a+b}^{k}=(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$$

设事件 A_k 表示第 k 次取得白球，由于第 k 次取得的白球可以是 a 个白球中的任一个，故有 a 种取法；而其余 $k-1$ 个球可在前 $k-1$ 次中依次从 $a+b-1$ 个球中任意取出，故有 A_{a+b-1}^{k-1} 种取法. 所以，事件 A_k 包含的样本点的个数为

$$m=a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}=a\cdot(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)$$

所求的概率为

$$P(A_k)=\frac{m}{n}=\frac{a\cdot(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}$$

注：由此例可以看出，所求的概率与 k 是没有关系的，这说明无论哪一次取得白球的概率都是一样的. 此例和我们现实生活中许多情形是类似的，如抽奖时，先抽和后抽中奖的概率都是一样的.

2. 几何概型

古典概型是假设试验的样本空间包含的样本点的个数为有限个时的情形，因此对于试验的样本点为无穷多个的情形，概率的古典定义显然是不适用的. 这里，我们进一步研究样本空间为一线段、平面区域、立体空间等的等可能试验的概率模型——几何概型. 其基本思想是：

(1) 某一随机试验的样本空间 Ω 充满某个区域，其度量(长度、面积、体积等)大小用 μ_Ω 来表示；

(2) 任一点落在度量相同的子区域是等可能的；

(3) 若事件 A 为样本空间 Ω 的一个子区域，其度量大小用 μ_A 来表示，则事件 A 的概

率为

$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega} \tag{1.8}$$

例 1.10　在区间[−1,1]中随机地任取一点，求事件“此点与原点的距离小于 0.5”的概率.

解　随机试验的样本空间 Ω 为线段[−1,1]，其长度 $\mu_\Omega=2$，设事件 $A=$“此点与原点的距离小于 0.5”，即 $A=(-0.5,0.5)$，则其长度为 $\mu_A=1$，根据概率的几何意义，可得

$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}=0.5$$

例 1.11　(会面问题)甲、乙二人相约在上午 8：00—8：30 内在某地点会面，先到的人等候另一人，经过 20 分钟后方可离开. 求甲、乙二人会面的概率. 假设他们在上午 8：00—8：30 内的任一时刻到达约会地点是等可能的.

解　设甲、乙二人到达指定点的时刻分别为 x 和 y(8：00 为起始点)，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 30\}$$

设事件 A 表示二人能会面，则

$$A=\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant 20,0\leqslant x,y\leqslant 30\}$$

由于甲、乙二人在任一时刻到达约会地点是等可能的，显然，这是一个几何概型，有

$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}=\frac{30^2-10^2}{30^2}=\frac{8}{9}$$

第三节　条件概率与乘法定理

一、条件概率

如果我们在事件 B 已经发生的条件下考虑事件 A 的概率，则这种概率叫做事件 A 在事件 B 已发生的条件下的条件概率，记作：$P(A|B)$. 它一般是与 $P(A)$不同的.

例 1.12　某种机器零件由甲乙两台车床生产，从中取出 100 件，其产品结构如表 1-3 所示.

表　1-3

	合格品数	次　品　数	总　　计
甲车床	40	10	50
乙车床	45	5	50
总　计	85	15	100

从这 100 个零件中任取一件，则取得次品(设为事件 A)的概率为

$$P(A)=\frac{15}{100}=0.15$$

如果已知取出的零件是由甲车床生产的(设为事件 B),则其为次品的概率为

$$P(A \mid B)=\frac{10}{50}=0.2$$

显然 $P(A|B)\neq P(A)$,若对上面条件概率 $P(A|B)$的分子、分母同时除以 100,则可得

$$P(A \mid B)=\frac{10/100}{50/100}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

其中事件 AB=“甲车床生产的次品率”.若将上述关系式推广到一般情形,便得到条件概率的定义.

定义 1.4 设 A,B 为两个随机事件,且 $P(B)>0$,则称

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.9}$$

为事件 B 发生的条件下,事件 A 的概率.

注:由例 1.12 可以看出,一般情况下,$P(A|B)\neq P(A)$,这是因为 $P(A)$是在整个样本空间 Ω 上考察事件 A 发生的概率,而计算 $P(A|B)$时,样本空间发生了改变,由原来的集合 Ω 变成了现在的集合 B,因此,一般 $P(A|B)\neq P(A)$.

由于条件概率也是概率的一种,因此,概率的公理化体系对于条件概率也是适合的,即

(1) $P(A|B)\geqslant 0$

(2) $P(\Omega|B)=1$

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件组,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n \mid B)=P(A_1 \mid B)+P(A_2 \mid B)+\cdots+P(A_n \mid B) \tag{1.10}$$

例 1.13 掷两颗骰子,以事件 A 表示“两点数之和为 10”,以事件 B 表示“第一颗点数大于第二颗点数”,求下列条件概率 $P(A|B)$和 $P(B|A)$.

解 试验的样本空间中样本点的个数为 $n=36$;

事件 A 中样本点的个数为 $m_A=3$;

事件 B 中样本点的个数为 $m_B=15$;

事件 AB 中样本点的个数为 $m_{AB}=1$;

所以

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{15},\quad P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$$

二、乘法定理

由上条件概率的定义经过变形之后立即可得

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)=P(B)P(A \mid B) \tag{1.11}$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com