普通高等教育"十一五"国家级规划教材

复变函数

李忠 编

数学基础课程系列
简明教材

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
数学基础课程系列简明教材

复 变 函 数

Fubian Hanshu

李 忠 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是为高等院校本科数学类专业学生编写的复变函数课程教材。它是作者依据多年来讲授此课使用的一份讲稿修订而成。全书共有八章，其内容如下：复数的运算与表示，复变量函数，解析函数的概念，柯西定理与柯西公式，幂级数理论，洛朗展开与孤立奇点，留数定理与辐角原理，解析函数的几何理论。每节配有习题，书后附习题答案与提示。全书力图深入浅出，简明扼要，面向读者，面向教学。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/李忠编. —北京：高等教育出版社，2011. 6

ISBN 978 - 7 - 04 - 032236 - 1

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①复变函数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O174. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 062391 号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 张晓丽　　封面设计 张申申　　责任绘图 郝 林

版式设计 王艳红　　责任校对 姜国萍　　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市南方印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850 × 1168　1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	8.25	版　　次	2011年 6 月第 1 版
字　　数	200 000	印　　次	2011年 6 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	16.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　32236-00

总　序

2005 年, 高等教育出版社为适应高校数学类专业的教学需求, 经过一段时间的酝酿, 决定在“十一五”期间推出一套“数学基础课程系列简明教材”。这套系列教材包含数学分析、高等代数、解析几何、复变函数、实变函数、概率统计、微分几何等。为做好此事, 在高等教育出版社的主持下成立了编委会, 并邀请了一批有多年教学实践经验的资深教授参加编写工作。这套系列教材中的第一批书目已经被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。经过几年的努力, 这套教材开始正式与大家见面了。其中多数是新编的, 也有一些是经过教学实践证明优秀的、深受读者欢迎的教材的修订版。

这套系列教材适用于我国综合性大学、理工科大学以及师范大学中的数学类专业, 作为数学类专业基础课的教学用书; 当然, 它们也可以作为理工科中非数学类专业的教学参考书。面向全国各类高校的数学系, 具有较广泛的适用性, 这是我们编写这套系列教材的初衷之一。

在这套系列教材中, 尽管每一本教材的风格各异, 但是在编写的基本理念上大家有着相当多的共识。我们希望这套教材做到以下几点:

首先, 教材内容“少而精”。

众所周知, “少而精”是教学的一个基本原则。它要求在教学中要紧紧地抓住所涉及学科的基础知识与基本训练这个纲, 突出重点, 纲举目张。相反, 内容过多、过杂、过深, 势必使人不得

要领，事倍功半。但是，有时人们会看不到讲得过多的害处，会在某些口号的驱使下使事情脱离了正确的轨道，比如求多求全、追求内容的先进性或现代化等等。我们知道，基础课教材的作用在于它为读者提供后续课以及日后参加工作不可或缺的基础知识、基本方法与基本思想。所讲的内容并非越多越好，越深越好。遗憾的是，目前基础课内容有一种不断扩充的趋势。这虽然出于良好的目的，而其效果却不如愿。实际上，就以我们这些“过来人”为例，认真回想一下自己以前所学到的、真正用得得心应手的内容并不多；而且真正用得到的内容也并不很多。与其求全求多，不如精选最基本的东西，帮助读者真正掌握这些内容的实质、方法和思想。读者有了这样的基础，在他们将来遇到没有学过但确有需要的内容时，也会有能力自学。课程内容“现代化”的要求，应当是针对数学系的整个的教学体系而言的，而不是要求基础课的内容更新换代。这对数学学科而言是无须争议的事实。基础课可以在观念上、记号上为专业课的现代化做些必要的准备，但不应该是把后续课的某些基本概念提到前面来讲述。

其次，教材尽可能做到“深入浅出”。

基础课教材是初学者入门的读本，而这些初学者在此之前没有任何学习高等数学的经验。在这种情况下，就要求教材注意循序渐进、由浅入深，尽可能做到通俗易懂，最好还能做到生动有趣，引起读者的兴趣。一个好的数学基础课教材应当既逻辑严谨、体系完整，又深入浅出、平实自然。我们应当学会通过典型的实例和足够详尽的解释，来帮助初学者学会解读数学的抽象形式，透过抽象的数学叙述，正确把握和理解其内容实质。教材的真正水准应当体现在是否能把那些艰深的内容讲得让人感到自然易懂。把本来容易的东西讲得复杂难懂，是不可取的。为此，我们要注意避免过度形式化的不良倾向。数学工作者由于长期从事数学研究与教学，已经养成了严谨的习惯，追求叙述的一般性与抽象性，但与此同时，也往往形成了某种毛病，那就是忽

视描述性语言，忽视那些抽象形式背后的直观模型，甚至抹杀直观的意义，这是很不妥当的。过度的形式化，不仅造成了初学者的困难，更重要的是歪曲了数学本质，误导了学生。在基础课教材中，为了帮助初学者理解抽象数学形式的意义，除了典型例子之外，用必要的直观描述性语言去解释它的意义，同样是十分重要、不可或缺的。

最后，教材重视基本训练，重视对学生的能力培养。

我们赞同“双基”的提法，即基础课的任务是传授基础知识和掌握基本技能。学好一门数学课程，单单知道有关数学结论是不够的，还要求读者具有一定的分析问题与解决问题的能力。这样，勤于思考，独立思考，并做好相当数量的习题，是完全必要的。这是一切在数学上学而有成的人的共同体会。通过做题可以深入、具体地理解和掌握基本概念、结论和方法；获得计算和推理的能力；理解、掌握应用基本知识和方法解决问题的途径；同时也进一步锻炼刻苦思考和探索的毅力，培养创造性的思维能力和习惯。后一点不仅对学好数学很重要，而且对读者以后工作能力的提高和事业的成功都是很重要的。在这套教材中，我们精心选配好适合读者的各种例题与习题，它们是教材很重要的组成部分，不可忽视。习题中不仅有基本练习，而且有一些题目，需要读者经过一定的努力，花费一定的时间去探索，才能最终解决。此外，题目富有多样性、趣味性和启发性。当然，我们也不赞成出一些技巧性过强而没有训练价值的偏题与难题。

常言道：“授人以鱼，不如授人以渔”。一本好的基础课教材要努力做到授人以渔，而不只是罗列知识。这就需要帮助读者理解课程内容和方法的实质，理解其中的数学思想。在教材中要尽可能地介绍清楚问题和概念的来龙去脉，包括一些典型的例子；尽可能解释清楚解决问题的思路和方法，其中包括定理证明和计算过程的思路，以提高学生的创新意识与探索精神。

以上是我们对这套教材的希望与要求，也是我们编书的理念。

把它们写在这里，主要是为了自勉，并不表明这些我们已经全部做好了、做到位了。我们希望使用这套教材的师生和其他读者多提宝贵意见，使教材得以不断完善。

“数学基础课程系列简明教材”编委会

2008 年 1 月 5 日

前　言

大家知道,复数最早出现在 16 世纪中叶,那是由于解二次与三次代数方程的需要而引入的。当时人们认为这是一种根本不存在的、想象中的数。然而,这种数一旦出现,就显示了顽强的生命力,后来在不同领域中不断出现一些应用。就这样,人们带着迷茫与困惑,一方面使用着它,而另一方面又不承认它的存在。这种状态一直持续了近两百年。高斯 (Gauss) 等人在 18 世纪初叶,提出了复数的几何表示,把一个复数看成平面上的一个点,其四则运算也有明显的几何意义。从此,人们对复数有了一种“真实感”,并最终接受了它。高斯对复数的这种几何解释,不仅为复数提供了一个实际模型,而且沟通了复数与几何的联系,为数学与物理中的平面问题应用复数与复变量函数奠定了基础。

19 世纪初,关于实变量函数的无穷小分析的理论日趋成熟,人们的注意力开始转向复变量函数的研究上,并把微积分的思想与方法推广到复变量函数。这样,就逐步形成一个新的数学分支——复变函数论。柯西 (Cauchy)、黎曼 (Riemann) 和魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 是这一领域的创始人。他们分别从积分、几何与幂级数三个不同角度研究了一类特殊的复变量函数——解析函数,并为解析函数的理论奠定了完整的基础。

所谓解析函数,就是指在一个平面区域内处处可导的复变量函数,而这里的可导在形式上与实变量函数完全一致。使人感到意外的是,虽然解析函数是处处可导的实变量函数的自然推广,然而它有一系列独特而优美的性质,远远强于实变量函数情形。

比如,解析函数一阶导数处处存在意味着它有任意阶导数;它沿着单连通区域内任意简单闭曲线的线积分为零;它所实现的映射具有保角性等等。此外,我们在微积分中遇到的基本初等函数,在复变函数论中也都有相应的推广。而且只有在复数域中,我们才看清了这些基本初等函数之间的联系与统一。当时对解析函数的研究不仅仅是出自纯数学的考虑,而且还由于它与物理和力学(特别是流体力学)有紧密的联系。柯西当时利用解析函数为一种平面物理场建立了复的位势理论,因此,解析函数论成为一种常用的数学物理方法是十分自然的事。

19 世纪关于解析函数论的研究在当时数学领域中占据了中心地位,并取得了辉煌的成就。除去前面提到的柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯的成就之外,还有阿贝尔 (Abel)、施瓦茨 (Schwarz) 以及雅可比 (Jacobi) 等人关于椭圆函数与自守函数所做出的杰出贡献。19 世纪关于解析函数的成就,对 20 世纪之后形成的当代数学产生了深远影响。举例而言,黎曼提出的 ζ 函数沟通了素数分布与解析函数的联系,使得数论的研究得以使用解析函数的工具。后来形成了现代数学的一个重要的数学分支——解析数论。黎曼所提出的有关 ζ 函数的零点的猜测,至今是数学尚未解决的最重大难题之一。又比如,黎曼为了讨论多值解析函数而提出的一种特殊曲面被后人称之为黎曼曲面。关于黎曼曲面的研究,则与后来的拓扑、代数几何和复流形等密切相关。20 世纪初叶外尔 (H.Weyl) 所提出的一般黎曼曲面的概念,实际上是今天我们广泛使用的流形概念最早的雏形。今天,我们学习复变函数这门课的目的就是为进一步学习与掌握近代数学打下必要的基础。

大家知道,近半个世纪以来,科学技术的发展大大加快了步伐。数学科学也同样如此。我们正面临一个知识“大爆炸”的时代。对于今天的大学生而言,与以前的大学生相比,他们需要学习更多的新知识。然而,数学类专业的基础课,不可能像电子器件那样,来一个“更新换代”。在这种情形下,对于原有的基础课的传

统内容用现代的眼光重新做一番审视，加以删繁就简，就成为一项必要的、较为务实的措施。

这本教材的前身是作者在北京大学多次讲授复变函数时使用的一份油印讲稿。2010 年作者又在首都师范大学使用了一遍，做过若干修改。

作为一本面向大学生的复变函数课的教材，作者一向主张不宜讲得过深、过难，或者过于琐碎。一些较深或较专的内容，不应讲给一般大学生，而应当留作研究生的专门教材。对于一些过于繁琐，技巧性很强，但缺乏一般意义的内容，应当简化或干脆删除。基于这样一个看法，作者对于复变函数课某些传统内容作了适当调整。比如，我们弱化了有关利用解析函数的回路积分计算实函数定积分的内容；删除了利用初等函数把某些具体区域变成单位圆的训练，删除了把多边形共形映射成上半平面的克里斯托佛 (Christoffel)– 施瓦茨公式叙述与证明；但我们详细讲述了分式线性变换的理论，并增强了解析函数几何理论的某些讨论。对于复变函数论中某些较为艰深的定理我们只叙述结论，讲清它们的意义，但略去了证明。

本书几乎在一开头，就用一种自然方式引入了形式偏导数的概念，并把它放在较显著的位置。这主要是考虑到形式偏导数在现代复分析中扮演着重要角色，而它们的引入并不会造成什么困难。多年的教学实践表明，这样做没有给学生带来任何困难，反而简化了基本初等函数解析性的处理，更重要的是，这样做有助于初学者对解析函数概念的理解。

面向读者是作者编写此书的一个基本指导思想。作者希望这本书便于初学者自学，容易把握要领。对于每一个重要概念与重要结论，我们花费了较多的笔墨解释其意义与价值，并列举了足够的例题，以加深读者的理解。复变函数的理论与实分析、代数和几何有广泛的联系，我们希望读者在学习的过程中，用更多的力气与时间，去用心思考概念的本质和定理的意义，以达到融会贯

通的目的。

本书每一节之后，都附有一定数量的习题，我们希望读者能够尽可能独立地完成这些习题。这里的大多数题并不难。个别题有一定难度，都在习题中做了必要的提示，相信多数初学者可以从提示中得到启发，能够自己动手解决。在本书之末附有“习题答案与提示”，其中不仅给出了计算题的答案，而且针对某些较难证明题提供了更进一步的提示。希望初学的读者，在没有经过充分思考之前，不要轻易地查阅后面的这些提示。作者希望这些习题，不仅使读者得以“学而时习之”，而且还能使读者从一些侧面深入了解解析函数的意义以及与其他学科的联系。

高等教育出版社的李蕊同志策划了这套数学基础课程系列简明教材，并促成了本书的出版。张晓丽同志对本书的书稿作了精心的编辑加工，纠正了作者的一些疏漏。在这里作者对她们致以衷心的感谢！

作者深知自己水平有限，书中定会有一些不当之处，诚恳欢迎使用此书的教师与学生提出批评和指正。

李　忠

2011 年 1 月 20 日

目　录

第一章　复数的运算与复平面上的拓扑

§1.　复数域与复数的几何表示

1.1　复数域

我们在中学数学教程中已经知道, 形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 的数称为复数[注], 其中 x 和 y 是任意的实数, 而 i 是一个特殊的记号, 满足运算规律:$\mathrm{i}^2 = -1$. 这里的实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**, 分别记为 $x = \mathrm{Re}\,(z)$,$y = \mathrm{Im}\,(z)$. 特别地, 当 $x = 0$ 时, 形如 $z = 0 + \mathrm{i}y$ 的复数称为**纯虚数**, 或简称为**虚数**, 通常简记为 $\mathrm{i}y$. 当 $y = 0$ 时, 形如 $z = x + \mathrm{i}0$ 的复数就是实数, 通常简记为 x.

显然, 实部与虚部都是零的复数 $z = 0 + \mathrm{i}0$(通常简记为 0), 既是实数又是虚数. 反过来, 既是实数又是虚数的复数也只有 $z = 0 + \mathrm{i}0$.

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 是任意给定两个复数. 当且仅当它们的实部和虚部分别相等, 也即 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$, 我们称 z_1 与 z_2 **相等**, 并记之为 $z_1 = z_2$. 如果 $x_1 \neq x_2$, 或 $y_1 \neq y_2$, 则我们称 z_1 与 z_2 不相等, 记为 $z_1 \neq z_2$.

和实数一样, 复数有加、减、乘、除四则运算. 对任意两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, 我们按照下述规则定义它们的四则运算:

注　复数 $x + \mathrm{i}y$ 也可写成 $x + y\mathrm{i}$, 并认为两者代表同一个数.

加法运算: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$;

减法运算: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$;

乘法运算: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

除法运算: 设 $z_2 \neq 0$, 也即 x_2 与 y_2 不同时为 0,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

这里加减法的定义是十分自然的, 而乍一看似乎乘除法的定义并不自然. 但其实不然.

先看乘法的定义. 事实上, 只要在下列计算中

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 + \mathrm{i}^2 y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

将 i^2 换成 -1 就得到了我们现在乘法的定义.

再看除法的定义. 要定义 z_1 除以 z_2 的商, 实际上就是要找一个复数 z 使得 $zz_2 = z_1$, 其中 $z_2 \neq 0$. 我们令 $z = x + \mathrm{i}y$, 那么

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = (x + \mathrm{i}y)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = xx_2 - yy_2 + \mathrm{i}(xy_2 + yx_2),$$

也即

$$xx_2 - yy_2 = x_1, \quad xy_2 + yx_2 = y_1.$$

解此方程组, 即得到

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

这里的 x 与 y 分别就是定义中 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的实部与虚部.

上面定义的四则运算满足下列运算规律:

(1) 关于加法的交换律:$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

(2) 关于加法的结合律: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

(3) 关于乘法的交换律:$z_1 z_2 = z_2 z_1$;

(4) 关于乘法的结合律:$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

(5) 关于乘法对加法的分配律:$z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2$.

这些运算规律很容易直接验证. 我们这里略去它们的验证.

这样, 全体复数组成了一个**数域**. 我们称之为**复数域**, 通常记为 $\mathbb{C}$.

例 1.1 $(2-\mathrm{i}\sqrt{3})^2=4+3\mathrm{i}^2-4\mathrm{i}\sqrt{3}=1-4\mathrm{i}\sqrt{3}$.

例 1.2 $(2+\mathrm{i}\sqrt{2})^2/(1+\mathrm{i})^3=\dfrac{4+2\mathrm{i}^2+\mathrm{i}4\sqrt{2}}{1+3\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3}=\dfrac{1+\mathrm{i}2\sqrt{2}}{\mathrm{i}-1}$.

现在, 我们引入一个复数的共轭复数与模的概念.

对于给定的一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 我们称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为它的**共轭复数**,并记之为 $\overline{z}$. 另外, 我们称实数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**,并记作 $|z|$.

很容易直接验证, 复数模与共轭复数具有下列性质:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|;\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};$$

$$|z|=|\overline{z}|;\quad |z|^2=z\overline{z};$$

$$\overline{(\overline{z})}=z;\quad \overline{(z_1\pm z_2)}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2};$$

$$\overline{(z_1z_2)}=\overline{(z_1)}\,\overline{(z_2)};\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};$$

$$\mathrm{Re}\,(z)=\frac{z+\overline{z}}{2};\quad \mathrm{Im}\,(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

这些公式在复数的计算上都是十分基本的. 希望读者能逐步熟练掌握与灵活运用它们.

例 1.3 共轭复数给除法运算带来方便, 至少使我们不必记忆复数除法的公式. 比如:

$$\frac{3+5\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{(3+5\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}=\frac{1}{4}[3-5\sqrt{3}+\mathrm{i}(5+3\sqrt{3})].$$

例 1.4 证明 $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})$.

证 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\&=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1\overline{z_2}}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

例 1.5 设

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\ (a_0\neq 0)$$

是一个实系数多项式, 也即其中的 $a_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 均为实数. 证明: 若 α 是 $P(z)$ 的一个根, 则 α 的共轭 $\overline{\alpha}$ 一定也是它的一个根.

证 根据假定,$P(\alpha)=0$. 运用共轭运算的有关规律, 我们有

$$\begin{aligned}P(\overline{\alpha})&=a_0\overline{\alpha}^n+a_1\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{\alpha}+a_n\\&=a_0\overline{(\alpha^n)}+a_1\overline{(\alpha^{n-1})}+\cdots+a_{n-1}\overline{\alpha}+a_n\\&=\overline{a_0\alpha^n}+\overline{a_1\alpha^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}\alpha}+\overline{a_n}\\&=\overline{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n}\\&=\overline{P(\alpha)}=\overline{0}=0.\end{aligned}$$

这里我们用到 $\overline{a_j}=a_j\ (j=0,1,\cdots,n)$, 这是因为它们都是实数的缘故.

这个例子告诉我们: 对于实系数多项式而言, 非实数根的共轭复数也必然是一个根. 因此, 非实数根总是成双出现.

1.2 复数的几何表示

在平面上取定直角坐标系 Oxy. 这时平面上的一点 $P(x,y)$ 便对应于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 反之, 对于任意一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$,