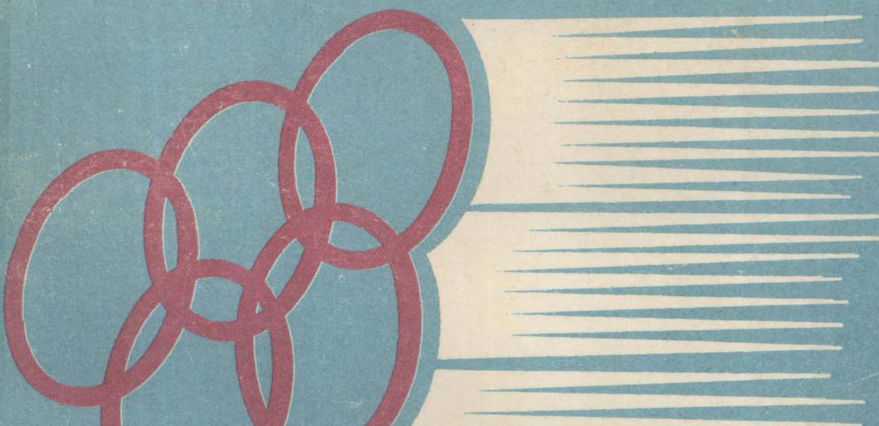
奥林匹克中小学系列教材

高中数学

（下册）

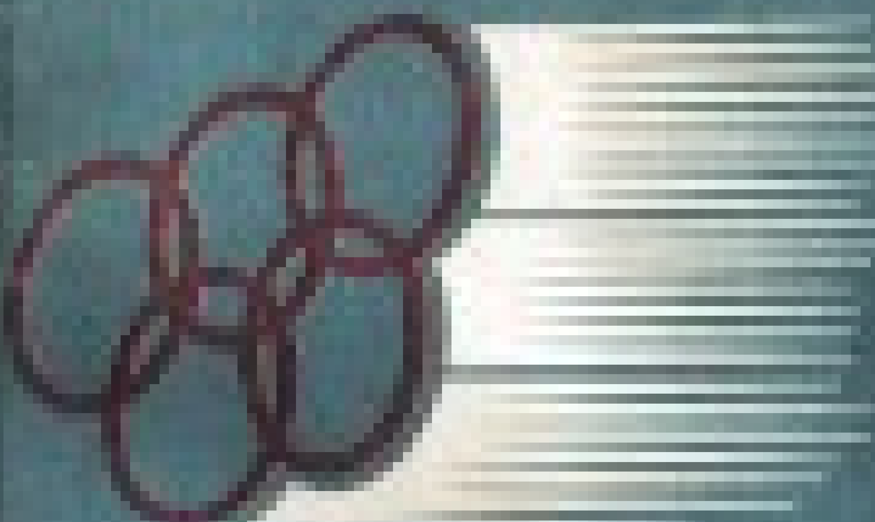


主编　钟善基

北京师范大学出版社

高中数学

（下册）



奥林匹克中小学系列教材

高 中 数 学

（下　册）

主编：钟善基

编者：章建跃　张秀平　张　程　刘仁权　朱文芳

北京师范大学出版社

（京）新登字160号

奥林匹克中小学系列教材
高中数学（下册）
钟善基　主编
*
北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
北京怀柔东晓印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：12　字数：256千
1993年9月第1版　　1993年9月第1次印刷
印数：1—5 000

ISBN 7-303-03268-1/G·2229　定价：6.50元

目　录

第九章　初 等 数 论

初等数论涉及的对象是整数，而我们用到最多的是自然数．初等数论不管是在理论上还是在实际中应用都非常广泛，在数学竞赛中也是非常重要的大块内容．在这一章里我们主要介绍整数的整除、同余、奇偶分析、高斯函数、欧拉函数和不定方程．我们将用 **Z** 和 **N** 分别表示整数集和自然数集．

§1　整　　除

一、整数的基本性质

我们这里所介绍的性质，都是大家比较熟悉的，有些是作为公理而不证明的，有些是课本里已经讲过的，因此我们不做证明而列在这里，以便复习和查阅．

1．整数的和、差、积仍为整数．（注意两个整数的商当分母不为零时，不一定是整数而是有理数，或者说有理数与分数是等价的）．

2．整数与分数的和、差、积、商（当分母不为零时）仍为分数．

3．任意多个偶数的和（或差）仍为偶数．

4．奇数个奇数的和（或差）仍是奇数．

5．偶数个奇数的和（或差）是偶数．

6．两个不相等的整数之和（或差）最小是 1．我们把这

个性质叫做离散性，有时把它写成：若 $x>y$，则 $x\geqslant y+1$.

二、整除的定义及性质

定义 设 $a,b\in\mathbf{Z}$，若存在 $c\in\mathbf{Z}$，使得 $a=bc$ 则称 b 可以整除 a，记作 $b|a$，否则称 b 不能整除 a，记作 $b\nmid a$. 若 $b|a$，则称 b 为 a 的因数，a 为 b 的倍数.

关于整除有以下基本性质：

1. 若 a，b，c，$m\in\mathbf{Z}$ 且 $a|b$，$a|c$，则：$a|(b\pm c)$，$a|mb$. 当然也就有 $a|mc$，$a|m(b\pm c)$. 甚至更一般地，若还有 $n\in\mathbf{Z}$，则 $a|(mb+nc)$.

我们来证明最后一个结论：由 $a|b$，$a|c$ 知存在 d、$e\in\mathbf{Z}$，使得 $b=ad$，$c=ae$. 从而有

$$mb+nc=mad+nae=a(md+ne),$$

即 $a|(mb+nc)$.

事实上，可将此结论推广到更一般的情况：若 a，b_i，$m_i\in\mathbf{Z}$，$i=1$，2，…，n，且 $a|b_i$，则：

$$a|(m_1b_1+m_2b_2+\cdots+m_nb_n).$$

2. 设 a，b，$c\in\mathbf{Z}$，且 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$.

由 $a|b$，$b|c$ 知存在 m，$n\in\mathbf{Z}$，使得 $b=am$，$c=bn$，从而 $c=amn$，故 $a|c$.

3. 设 a，$b\in\mathbf{Z}$，且 $a|b$，则对于任何 $c\in\mathbf{Z}$，都有 $ac|bc$，反之，若 $ac|bc$，则 $a|b$.

证明比较简单，只要用定义就行了.

关于一些特殊数的整除性，有一些特定的判别方法，知道这些方法对做题会有很大帮助，我们把这些方法列在下面，在这些性质里，设 N 是自然数，表示为

$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$：

1. 若 $2|a_0$，则 $2|N$.

2. 若 $3|(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)$，则 $3|N$.

3. 若 $4|\overline{a_1a_0}$，则 $4|N$.

4. 若 $5|a_0$，则 $5|N$.

5. 若 $2|N$ 且 $3|N$，则 $6|N$.

6. 若 $7|(\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-2a_0)$，则 $7|N$.

7. 若 $8|\overline{a_2a_1a_0}$,则 $8|N$.

8. 若 $9|(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)$,则 $9|N$.

9. 若 $a_0=0$,则 $10|N$.

10. 若 $11|[(a_0+a_2+a_4+\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots)]$，则 $11|N$.

11. 若 $25|\overline{a_1a_0}$,则 $25|N$.

12. 若 $125|\overline{a_2a_1a_0}$,则 $125|N$.

13. 能被 7、11、13 整除的数的数字特征是：将 N 由个位开始分成每三位一节叫做一个千进位，则若奇千进位的和与偶千进位的和的差能被 7、11、13 整除，则这个数也能被 7、11、13 整除. 例如，$N=25437525113$,将 N 写成 25，437，525，113. 则奇千进位为 113，437 其和为 550，偶千进位为 525，25，其和为 550，再作差 $550-550=0$，7、11、13 可以整除 0，从而 7、11、13 均可整除 N.

三、质数、合数

所谓质数首先得是自然数，而在自然数里除了 1 和它本身以外再无别的因数. 质数也称为素数，不是素数的自然数就叫做合数. 一般我们用字母 p 表示素数.

关于一个自然数是否为素数,有如下的简单的判定方法：若不大于 $\sqrt{n}$ 的质数都不整除 n,则 n 是质数.

上面这个性质可以这样来说明：由 $(\sqrt{n})^2=n$，可知，若 n 是合数，则有 a，b 均不为 1 或 n（关于这一点，很容易由合数的定义知道．有时我们写成：$1<a,b<n$），使得 $ab=n=(\sqrt{n})^2$．由此可知，若 n 有大于 $\sqrt{n}$ 的因数，不妨设为 a，则 $a>\sqrt{n}$，$b=\dfrac{(\sqrt{n})^2}{a}<\sqrt{n}$，即 n 有小于 $\sqrt{n}$ 的因数，于是我们只要看 n 是否有小于 $\sqrt{n}$ 的因数就行了．若有小于 $\sqrt{n}$ 的因数，不妨设为 b，若 b 是合数，则可以写成素数的乘积，于是 n 就有小于 $\sqrt{n}$ 的素因数．于是我们知道，看一个自然数是否为素数，只要看有没有小于 $\sqrt{n}$ 的素因数就行了．

关于素数的另一个性质是：素数有无穷多个．

按照上面性质的证明，可以有如下结论，若 p_1、p_2、…、p_s 是 s 个连续的素数，则 $p_1p_2\cdots p_s+1$ 也是素数．

定理　若 p 是素数，且 $p|ab$，则 $p|a$ 或者 $p|b$．推而广之，若 $p|a_1a_2\cdots a_n$，则必有某个 a_i 使得 $p|a_i$．特别地，若 $p|a^n$，则 $p|a$．

事实上，由 $p|a_1a_2\cdots a_n$ 知存在 $b\in\mathbf{Z}$，使得 $a_1a_2\cdots a_n=pb$．将 a_1、a_2、…、a_n 写成素因数的乘积的形式就会发现这些素因数中，必有一个是 p，从而 p 可以整除某个 a_i．

四、最大公约数和最小公倍数

定义　设 a，$b\in\mathbf{N}$，若 $d\in\mathbf{N}$ 满足：

(i) $d|a$，$d|b$；

(ii) 若 $d'\in\mathbf{N}$ 满足 $d'|a$，$d'|b$，则 $d'|d$．

则称 d 为 a，b 的最大公约数，记作 (a,b)．

注意在定义里有两条，第一条保证 d 是公因数（或称公约数），第二条保证 d 是最大的．在证明某数是另外两个数的

最大公约数时一定要记住有两条．我们不难把它推广到多个自然数的最大公约数的定义：

设 $a_i \in \mathbf{N}$，若 $d \in \mathbf{N}$ 满足：Ⅰ，$d|a_i$；Ⅱ，若 $d' \in \mathbf{N}$ 满足 $d'|a_i$，则 $d'|d$．我们就称 d 为 a_i 的最大公约数，其中 i 是从 1 到 n 的自然数．记作 $d=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

定义 设 $a,b \in \mathbf{N}$,若 $e \in \mathbf{N}$ 满足：

Ⅰ，$a|e, b|e$；

Ⅱ，若 $e' \in \mathbf{N}$ 满足 $a|e', b|e'$,则 $e|e'$．

则称 e 为 a,b 的最小公倍数,记作$[a,b]$．

记住，最小公倍数也有两条，第一条是满足“公倍”性，第二条是满足“最小”性．

推广到 n 个自然数的最小公倍数的定义的工作留给大家自己完成．

关于最大公约数和最小公倍数有如下一些简单性质：

1. $(a,b)|a, (a,b)|b$；

2. $a|[a,b], b|[a,b]$；

3. 设 $(a,b)=d$,则可设 $a=a_1d, b=b_1d$,于是$(a_1,b_1)=1$.反之,若 $a=a_1d, b=b_1d$,且$(a_1,b_1)=1$,则$(a,b)=d$.

4. 设 $(a,b)=d$,则存在 $u,v \in \mathbf{Z}$,使得:$au+bv=d$,反之,若 $au+bv=d$,且 $d|a, d|b$,则$(a,b)=d$.

5. $(a,b)=1$ 的充要条件是存在 $u,v \in \mathbf{Z}$,使得 $au+bv=1$.

6. $(a,b)[a,b]=ab$.

7. 若 $(a,b)=1, (a,c)=1$,则$(a,bc)=1$.推而广之则有,若$(a,b_i)=1, i=1,2,\cdots,n$,则$(a,b_1b_2\cdots b_n)=1$.

8. 若 $(a,b)=1, n \in \mathbf{N}$,则 $(a^n,b^n)=1$.

9. 若 $(a,b)=1$；且 $a|bc$，则 $a|c$.

10. 若 $a|m$，$b|m$，则 $[a,b]|m$.

由上面的性质可以看到，我们涉及最多的是最大公约数，事实上，无论在竞赛还是在实际问题中，用到最多的是最大公约数.

关于性质 4 和 5 的证明将在带余除法的后面给出. 其它性质的证明都不困难，请大家自己给出证明.

在上面这些性质里涉及到了 $(a,b)=1$，即最大公约数是 1，这时我们称 a 和 b 是互素的.

五、带余除法

定理 设 a，$b\in\mathbf{Z}$，则存在唯一的整数 q，r，$0\leqslant r<|b|$ 使得 $a=bq+r$.

存在性似乎是明显的，我们只要从 a 里拿出很多个 b（不论正与负），最后总能拿到比 b 的绝对值小但大于等于零的整数，我们来证明唯一性：

设有 $q_1,q_2,r_1,r_2\in\mathbf{Z}$，$0\leqslant r_1,r_2<|b|$，使得：$a=bq_1+r_1$，$a=bq_2+r_2$，则两式相减便有 $r_1-r_2=b(q_2-q_1)$，即：

$$|r_1-r_2|=|b||q_2-q_1|$$

若 $q_1\neq q_2$，则 $|r_1-r_2|\geqslant|b|$.

又 $0\leqslant r_1<|b|$，$0\leqslant r_2<|b|$，所以 $-|b|<r_1-r_2<|b|$，

即：
$$|r_1-r_2|<|b|$$

矛盾！故 $q_1=q_2$，从而 $r_1=r_2$，即证得唯一性.

六、算术基本定理

任给自然数 n，都可将其分解为素因数的乘积的形式，且这种分解是唯一的，即 n 可以唯一地表示成

$$n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_t^{s_t}$$

的形式，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ 均为素数，$s_1, s_2, \cdots, s_t$ 为自然数. 当然，我们的唯一性是指素因数及其指数，而不考虑 n 里面素因数的排列顺序.

七、关于进制的问题

在十进制中，我们用 $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ 来表示一个整数. 显然 $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$.

若 p 是一个自然数，则在十进制中，整数 N 一定可以表示成 $b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0$ 的形式，其中 $0 \leqslant b_i < p, i = 0, 1, \cdots, m$. 于是我们称 N 在 p 进制中的表示为 $\overline{b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0}$，记为：

$$N_{(p)} = \overline{b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 (p)}.$$

各种进制之间的数可以互相转换，下面仅以八进制和十进制为例来说明：

$574_{(8)} = 5 \times 8^2 + 7 \times 8 + 4 = 380_{(10)}$

$380_{(10)} = 47 \times 8 + 4$

$47 = 5 \times 8 + 7$

$\therefore \quad 380_{(10)} = 5 \times 8^2 + 7 \times 8 + 4 = 574_{(8)}$

即：当 P 进制转化成十进制数时，只要按 $N = b_m \times p^m + b_{m-1} \times p^{m-1} + \cdots + b_1 \times p + b_0$ 计算即可. 将十进制转化为 p 进制时，用带余除法即可：

$$N = pq_1 + r_1$$

$$q = pq_2 + r_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$q_{n-1} = pq_n + r_n$$

一直到 $q_n < p$，则 $N_{(p)} = \overline{q_n r_n r_{n-1} \cdots r_2 r_1 (p)}$.

八、例题

一些主要的性质和定理已经在上面介绍过了，有些比较难的已经进行了证明或说明．还有一些性质将通过例题来介绍．

例 1　设 $n \in \mathbf{N}$，求证：$\dfrac{12n+7}{14n+8}$ 是既约分数．

分析：所谓 $\dfrac{b}{a}$ 是既约分数，就是 a 和 b 是互素的，即 $(a,b)=1$，于是我们的目的就是证明 $(12n+7,14n+8)=1$．

证明：$(12n+7,14n+8)$

$=(12n+7,14n+8-12n-7)$

$=(12n+7,2n+1)=(1,2n+1)=1$

$\therefore \quad \dfrac{12n+7}{14n+8}$ 是既约分数．

说明：在这个证明里用到了一个基本关系式 $(a,b)=(a,b+ka)$，其中 k 为整数．证明如下：用定义，设 $d=(a,b)$，则 $d|a$，$d|b$，于是由整除的性质知 $d|(b+ka)$，从而 d 是 a 和 $b+ka$ 的公因数．任取 a 和 $b+ka$ 的公因数 d'，则 $d'|a$，$d'|(b+ka)$．于是 $d'|(b+ka-ka)$，即 $d'|b$，从而 d' 是 a 和 b 的公因数．所以 $d'|d$，即 d 是 a 和 $b+ka$ 的最大公因数，由此证得 $(a,b)=(a,b+ka)$．本例证明中还用到另一个关系式 $(1,a)=1$，它的证明留给大家自己完成．

例 2　证明 $120|(n^2-1)(n^3-5n^2+26n)$．

分析：先看看 120 是个什么样的数，将它进行素因数分解：$120=2\times2\times2\times3\times5=2\times3\times4\times5=5!$，你就会发现要在 $(n^2-1)(n^3-5n^2+26n)$ 中找到 3 个 2 的因数，一个 3 的因数，一个 5 的因数．请自己先思考一下，你将怎么证明，然后再看解答．

证明：$(n^2-1)(n^3-5n^2+26n)$

$$
\begin{aligned}
&=n(n^2-1)(n^2-5n+26)\\
&=(n-1)n(n+1)(n^2-5n+6+20)\\
&=(n-1)n(n+1)[(n-2)(n-3)+20]\\
&=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\\
&\quad+20(n-1)n(n+1)
\end{aligned}
$$

记 $f(n)=(n^2-1)(n^3-5n^2+26n)$，则：

$$f(1)=0,f(2)=120,f(3)=480$$

所以，$f(1),f(2),f(3)$ 均可被 120 整除.

而当 $n\geqslant 4$ 时，$(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$ 是 5 个连续自然数的乘积，故可被 120 整除. 同样 6 可以整除 $(n-1)n(n+1)$，从而 $20(n-1)n(n+1)$ 也可被 120 整除. 于是，对任意自然数，均有 $(n^2-1)(n^3-5n^2+26n)$ 可被 120 整除.

说明：本例用到一个结论：n 个连续自然数的乘积一定可以被 $n!$ 整除. 更强的结论将在以后学到.

例 3 求证：当 n 是奇数时，$60\mid(6^n-3^n-2^n-1)$.

分析：先将 60 进行素因数分解：$60=5\times3\times2\times2$. 由于 3、4、5 是两两互素的，故只要证明 3、4、5 这三个数均可以整除 $6^n-3^n-2^n-1$ 即可. 怎样才能在 $6^n-3^n-2^n-1$ 里找到 3 的因数呢？

证明：$\because$ $3\mid6^n-3^n, 3\mid2^n+1$（n 为奇数），

$\therefore$ $3\mid(6^n-3^n-2^n-1)$.

$\because$ $4\mid6^n-2^n, 4\mid3^n+1$，$\therefore$ $4\mid(6^n-3^n-2^n-1)$.

$\because$ $5\mid6^n-1, 5\mid3^n+2^n$，$\therefore$ $5\mid(6^n-3^n-2^n-1)$.

$\because$ 3、4、5 两两互素，$\therefore$ $3\times4\times5\mid(6^n-3^n-2^n-1)$.

于是，当 n 为奇数时，$60\mid(6^n-3^n-2^n-1)$.

说明：本题用到如下两个基本性质：①若 n 是自然数，则 $(x-y)\mid(x^n-y^n)$；② 当 n 为奇数时，$(x+y)\mid(x^n+y^n)$．这两个性质的证明只要用到如下的两个因式分解公式就行了：

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})\quad(n\in\mathbf{N})$$

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})\quad(n\text{ 为奇数})$$

另外，在证明某个表达式可以被某个数整除时，常常把这个表达式分成几个表达式的和，这在例 2 中也可以看到．

例 4　求证：$49\mid(6^{83}+8^{83}-35)$．

分析：$49=7^2$，当然要从 $6^{83}+8^{83}-35$ 中找到 7^2 的因数才行．

证明：由二项式定理得：

$$\because\quad 6^{83}=(7-1)^{83}$$
$$=7^{83}-C_{83}^{1}\times7^{82}+C_{83}^{2}\times7^{81}-\cdots-C_{83}^{81}\times7^2+C_{83}^{82}\times7-1$$

$$8_{83}=(7+1)^{83}=7^{83}+C_{83}^{1}\times7^{82}+C_{83}^{2}\times7^{81}+\cdots+C_{83}^{81}\times7^2+C_{83}^{82}\times7+1$$

$$\therefore\quad 6^{83}+8^{83}=2(7^{83}+C_{83}^{2}\times7^{81}+\cdots+C_{83}^{80}\times7^3+C_{83}^{82}\times7)$$
$$=2\times49\times(7^{81}+C_{83}^{2}\times7^{79}+\cdots+C_{83}^{80}\times7)+14\times83$$

于是：$6^{83}+8^{83}-35=2\times49\times(7^{81}+C_{83}^{2}\times7^{79}+\cdots+C_{83}^{80}\times7)+49\times23$

$$\therefore\quad 49\mid(6^{83}+8^{83}-35).$$

说明：这是利用二项式定理的一个很好的例子，也是证明整除性的重要手法之一．

例 5　已知 $a,b\in\mathbf{N}, a<b, a+b=75252$，且 $(a,b)=$

6271. 求 a,b.

解:因为 $(a,b)=6271$,所以可设 $a=6271a_1,b=6271b_1$,且$(a_1,b_1)=1$. 由此可得:

$$6271a_1+6271b_1=757252,\text{即}\ a_1+b_1=12.$$

因为 $a<b$,所以 $a_1<b_1$,又$(a_1,b_1)=1$,所以:

$$\begin{cases}a_1=1\\b_1=11\end{cases}\qquad\begin{cases}a_1=5\\b_1=7\end{cases}$$

即,a、b 有两组解:

$$\begin{cases}a=6271\\b=68981;\end{cases}\qquad\begin{cases}a=31355\\b=43897.\end{cases}$$

说明:在涉及到最大公因数 $(a,b)=d$ 时,便可令 $a=a_1d,b=b_1d$ 且$(a_1,b_1)=1$. 利用这一条可使很多题目写起来清晰易懂.

例 6 对于任意 $n\in\mathbf{N},n>1$,都有 n 个相邻的数是合数.

分析:只要找到 n 个相邻的合数就行了. 自然而然,就会想到这 n 个数可分别被 $2,3,\cdots,n+1$ 整除就行了.

证明:考虑下面这 n 个连续的自然数:

$$(n+1)!+2,(n+1)!+3,\cdots,(n+1)!+(n+1)$$

很显然,它们都是合数,于是所证结论成立.

例 7 设 $n>2$,证明在 n 和 $n!$之间一定有一个素数.

证明:设不超过 n 的所有素数为 $p_1,p_2,\cdots,p_s$, 令

$$N=p_1p_2\cdots p_s-1$$

因为 $n>2$,所以 N 为自然数,设 p 是 N 的一个素因数,因为 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是所有不超过 n 的素数,且均不能整除 N,所以 p 是异于 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 的素数,从而 $p>n$. 而 $N\leqslant n!-1<n!$,