

□ 高等学校教材

高等数学

(第二版) 上册

主编 高军安



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

(第二版)

上册

主编 高军安



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是在大众化教育的新形势下，依据最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成。

在编写过程中，本书结合近年来的教学现状，秉承第一版“重视问题驱动，激活思考探索；注重数学思想，突出实际应用”的教材编写理念，着力突出以下特色：重视与中学教学内容的衔接；重视图形、表格的启迪作用；例题与习题更加贴近生活、贴近实际、贴近应用。上册的主要内容：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、一元函数积分学、定积分的应用、微分方程。书后附有常用数学公式、极坐标系简介与几种常用的曲线。

本书可作为普通高等院校理工、经管等专业的高等数学教材。书中标有“*”的内容和习题仅供学有余力的学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 高军安主编. —2 版. —北京：高等教育出版社，2011.8

ISBN 978-7-04-033322-0

I. ①高… II. ①高… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 140951 号

策划编辑	王 强	责任编辑	王 强	封面设计	王 洋	责任印制	胡晓旭
版式设计	马敬茹	责任校对	张小镝				

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京四季青印刷厂		http://www.landaco.com.cn
开 本	787mm × 960mm 1/16		
印 张	23.25	版 次	2007 年 6 月第 1 版
字 数	430 千字		2011 年 8 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印 次	2011 年 8 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	31.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 33322-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

主 编 高军安

副主编 罗卫民 王香柯

编 委 李昌兴 谢淑翠

第二版前言

本书第一版自 2007 年发行以来,得到了许多专家和同行的支持与鼓励,有些专家还提出了建设性的意见和建议。四年来,我们按照大众化教育形势下教材改革的精神与建设精品教材的要求,及时消化、吸收国内外教育教学改革的新理念与新成果,坚持边实践、边总结,力求教材建设能与时俱进,精益求精。

基于“平易近人,好教易学”的原则,本版对第一版进行了较大幅度的修订。部分章节,例如,微分方程、空间解析几何与向量代数、无穷级数等还采用新观点、新讲法进行了重写,使主体内容与思想更为清晰明了。同时,考虑到本课程“左邻右舍”的需求与本课程内容本身的逻辑顺序,将“无穷级数”安排在最后一章。另外,重新审查、调整、充实了全部习题。

本次修订除继续秉承第一版“重视问题驱动,激活思考探索;注重数学思想,突出实际应用”的教材编写理念,还着力突出了以下特色:

1. 重视与中学教学内容的衔接。对中学学过的基本概念与定理,力求光滑对接,平稳过渡,顺势而上。
2. 重视图形、表格的启迪作用。通过删繁就简,使风格更加简明活泼,让高等数学的学习不再枯燥。
3. 例题与习题更加贴近生活、贴近实际、贴近应用。例如,房贷问题、存款问题、治污问题、破案问题、考古问题等。对这些或者与日常生活息息相关,或者是科技发展亟待解决的问题的讨论,不仅有利于激发学生的学习兴趣,而且有利于提高学生的综合素质与创新能力。

本版由高军安担任主编,罗卫民、王香柯担任副主编。第一、二、三章由高军安编写,第四、五、六章由李昌兴编写,第七、十一章由谢淑翠编写,第八章由罗卫民编写,第九、十章由王香柯编写,最后由高军安统纂定稿。

兄弟院校的同行对本书提出不少具体意见,我们都作了认真考虑。高等教育出版社的有关同志给予了大力支持,在此一并表示感谢。

在本书再版之际,我们不会忘记原陕西省大学数学教学委员会主任叶正麟教授曾经给予的鼓励、支持与帮助。

本版虽然经过了我們自认为的深思熟虑与反复推敲,但百密难免一疏,欢迎专家、同行和广大读者一如既往地批评与帮助。

编者

2011 年 1 月

第一版前言

21 世纪我国的高等教育由“精英教育”步入了“大众化教育”，越来越多的高等院校把培养应用型人才作为重要目标。2003 年教育部数学基础课程教学指导委员会重新修订了全国“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。这本《高等数学》教材，就是根据新修订的教学基本要求，为满足普通高校教学实际需要而编写的。

在编写过程中，我们重视切合近年来的教学现状，注意保持现行教材的优势，强调吸取国外特别是欧美同类教材的精华，努力融入近年来教学改革的理念与设想。本书着力突出以下特色：

1. 重组知识结构，整合教学内容。

对现行教材的内容体系做了适当调整：将定积分置于不定积分之前，二者合为一章，称为一元函数积分学；将微分方程、级数两章依次置于定积分之后，空间解析几何之前；将全微分方程一节置于曲线积分与路径无关之后。这样使相近内容相对集中，知识模块先小后大，先易后难，结构更加合理。同时，还加强了有关三维向量的教学内容。

2. 重视问题驱动，激活思考探索。

在引入基本的数学概念、命题和方法之前，尽力提出一些具有启发性的、触及数学本质的问题。围绕问题的产生、发展与解决展开内容的讨论，以引导和激发学生进行思考与探索，使学生在知识的学习中见到“树木”更见到“森林”。

3. 确保基本要求，降低知识难度。

在保证基本概念的理解、基本方法的使用、基本技能的训练的前提下，适当降低知识难度。在叙述论证上，条理清晰、重点突出，没有令人费解的冗长证明。弱化严格抽象的理论推导，有时代之以直观扼要的说明、图示或例证，使学生易于抓住理论推导的基本思路与精神实质。适当淡化解题技巧的训练，侧重学生基本能力的培养和提高。

4. 注重数学思想，突出实际应用。

在极限、导数、积分等基本概念的介绍中，充分揭示常量与变量、直与曲、近似与精确、离散与连续、均匀与非均匀等诸对矛盾的发生、冲突与转化，在对立中达到统一。在积分应用中着力展示了微元法的思想与方法。

扩展了应用举例的领域，诠释了一些纯计算例题的应用背景，适当编入了一些半开放性的应用例题和数学建模类例题，使得数学应用得到加强。特别是建模思想和方法的融入，将给课程带来活力。

代替积分表的使用,简介了如何用 Mathematica 求不定积分和定积分,旨在使非数学专业的学生尽早接触数学软件等有力的现代数学应用工具,从繁琐的运算中解脱出来。

本书可作为普通高等院校理工、经管等专业的高等数学教材。书中带 * 号的内容和习题可不作教学基本要求,供学有余力的学生自学参考。

本书是在陕西省大学数学教学委员会的积极倡导和组织下,由西北工业大学、西安邮电学院、西安工程大学、西安工业大学等高校教师联合编写。本书第一章由贺兴时编写,第二、三章由高军安编写,第四、五章由李昌兴编写,第六、七章由孙法国编写,第八章由孙卫编写,第九章由罗卫民编写,第十、十一章由王香柯编写。最后由罗卫民统稿。原陕西省大学数学教学委员会主任、西北工业大学博士生导师叶正麟教授审阅了全稿。

李立峰、柳小燕做了书中的全部习题。对于他们的辛勤劳动,在此表示感谢。

编者对高等教育出版社的大力支持表示最诚挚的谢意。

对于来自读者发现错误、提出改进的声音,我们表示衷心的感谢。

E-mail:lwmo@xiyu.edu.cn.

编 者

2007 年 5 月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、集合、区间与邻域	1
二、映射	3
三、函数	5
四、初等函数	11
习题 1-1	15
第二节 数列的极限	17
一、数列的概念	18
二、数列的极限	18
三、数列极限的性质	21
习题 1-2	22
第三节 函数的极限	23
一、当 x 趋于无穷时函数 $f(x)$ 的极限	23
二、当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限	25
三、函数极限的性质	27
习题 1-3	28
第四节 无穷小与无穷大	29
一、无穷小	29
二、无穷大	31
习题 1-4	32
第五节 极限运算法则	33
一、极限与无穷小的关系	33
二、极限的四则运算法则	33
三、极限的换元法则	36
习题 1-5	37
第六节 极限存在准则与两个重要极限	39
一、夹逼准则	39
二、单调有界准则	41
习题 1-6	44
第七节 无穷小的比较	45

习题 1-7	48
第八节 函数的连续性	48
一、函数在一点处的连续性	49
二、函数在区间上的连续性	50
三、函数的间断点及其分类	51
习题 1-8	53
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	54
一、连续函数的和、差、积、商的连续性	54
二、反函数的连续性	54
三、复合函数的连续性	55
四、初等函数的连续性	56
习题 1-9	57
第十节 闭区间上连续函数的性质	58
习题 1-10	62
第二章 导数与微分	63
第一节 导数的概念	63
一、引例	63
二、导数的定义	65
三、在区间上可导与导函数	67
四、导数的几何应用	69
五、可导与连续的关系	70
六、导数在相关学科中的含义	71
习题 2-1	72
第二节 求导法则 (I)	74
一、导数的四则运算法则	74
二、反函数的求导法则	77
三、复合函数的求导法则	79
习题 2-2	82
第三节 函数的微分	84
一、微分的概念	85
二、微分公式与运算法则	87
三、微分在近似计算中的应用	89
习题 2-3	90
第四节 求导法则 (II)	92

一、隐函数的求导法则	92
二、对数求导法	96
三、由参数方程确定的函数的导数	97
四、相关变化率	99
习题 2-4	101
第五节 高阶导数	104
一、显函数的高阶导数	105
二、隐函数的高阶导数	108
三、由参数方程确定的函数的高阶导数	109
习题 2-5	110
第三章 中值定理与导数的应用	112
第一节 中值定理	112
一、极值与费马定理	112
二、中值定理	113
习题 3-1	118
第二节 未定式与洛必达法则	119
习题 3-2	125
第三节 泰勒公式	126
一、函数的泰勒多项式	127
二、泰勒公式	128
三、泰勒公式的应用	130
习题 3-3	131
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	132
一、函数单调性的判定法	132
二、曲线的凹凸性与拐点	135
习题 3-4	139
第五节 函数的极值与最值	141
一、函数的极值及其求法	141
二、最小值与最大值问题	144
习题 3-5	148
第六节 函数图形的描绘	149
一、函数作图步骤	150
二、函数作图举例	150
习题 3-6	152

第七节	求方程近似根的牛顿法	153
	习题 3-7	156
第八节	微分学在经济中的应用	157
	一、几个常用的经济函数	157
	二、边际与边际分析	158
	三、弹性与弹性分析	160
	习题 3-8	162
第四章	一元函数积分学	165
第一节	定积分的概念	165
	一、定积分问题举例	165
	二、定积分的定义	168
	三、定积分的存在条件	169
	四、定积分的几何意义	170
	习题 4-1	171
第二节	定积分的性质	172
	习题 4-2	177
第三节	微积分基本公式与基本定理	178
	一、原函数	178
	二、微积分基本公式	179
	三、微积分基本定理	181
	习题 4-3	185
第四节	不定积分的概念与性质	187
	一、不定积分的概念	187
	二、不定积分的几何意义	188
	三、基本积分表	189
	四、不定积分的性质	191
	习题 4-4	194
第五节	换元积分法	195
	一、不定积分的换元积分法	195
	二、定积分的换元积分法	207
	习题 4-5	211
第六节	分部积分法	214
	一、不定积分的分部积分法	214
	二、定积分的分部积分法	220

习题 4-6	222
第七节 数值积分简介与 Mathematica	224
一、数值积分简介	224
二、Mathematica 求积分	228
习题 4-7	230
第八节 反常积分	232
一、无穷区间上的反常积分	232
二、无界函数的反常积分	236
习题 4-8	239
第五章 定积分的应用	240
第一节 建立积分表达式的微元法	240
第二节 平面图形的面积	242
一、直角坐标情形	242
二、极坐标情形	245
习题 5-2	247
第三节 体积	248
一、旋转体的体积	248
二、平行截面面积为已知的立体的体积	250
习题 5-3	252
第四节 平面曲线的弧长与旋转曲面的面积	253
一、平面曲线弧长的概念	253
二、平面曲线弧长的计算	254
三、旋转曲面的面积	257
习题 5-4	259
第五节 平面曲线的曲率	259
一、平面曲线曲率的概念	260
二、曲率计算公式	261
三、曲率半径与曲率圆	263
习题 5-5	265
第六节 定积分的物理应用举例	266
一、引力	266
二、水压力	267
三、变力沿直线所做的功	268
习题 5-6	270

第七节 积分学在经济中的应用	271
一、由边际函数求原经济函数	271
二、由边际函数求原经济函数在区间上的改变量	272
三、由经济函数关于时间的变化率求原经济函数的改变量	273
四、资本的现值与投资问题	273
习题 5-7	275
*第八节 数学建模中的定积分应用	275
一、人口统计模型 1	275
二、人口统计模型 2	277
习题 5-8	278
第六章 微分方程	279
第一节 微分方程的基本概念	279
习题 6-1	283
第二节 几类简单的一阶微分方程	284
一、可分离变量的微分方程	284
二、齐次微分方程	287
三、一阶线性微分方程	290
习题 6-2	292
第三节 一阶微分方程应用举例	294
习题 6-3	299
第四节 可降阶的高阶微分方程	300
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程	301
二、 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程	302
三、 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程	303
四、应用举例	304
习题 6-4	306
第五节 线性微分方程解的结构	307
一、二阶齐次线性微分方程解的结构	308
二、二阶非齐次线性微分方程解的结构	309
*三、常数变易法	310
习题 6-5	312
第六节 常系数线性微分方程的解法	313
一、二阶常系数齐次线性微分方程	313
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	316

习题 6-6	320
第七节 二阶线性微分方程应用举例	321
习题 6-7	326
附录 I 常用数学公式	327
附录 II 极坐标系简介与几种常用的曲线	328
习题答案	333
主要参考书目	354

第一章 函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象, 极限则是它的基本研究工具. 本章主要介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念, 以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、集合、区间与邻域

1. 集合

集合是指具有某种属性的对象的全体, 这些对象称为集合的元素. 例如, 一个教室里的学生构成了一个集合; 26个英文字母构成了一个集合. 集合通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示, 而元素通常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素, 则记作 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 的元素, 则记作 $a \notin A$.

集合的表示方法通常有两种: 一种是列举法, 即把集合中的所有元素一一罗列出来, 并放在一对花括号中. 例如, 由 a, b, c, d 四个字母构成的集合可以表示为

$$A = \{a, b, c, d\};$$

另一种是描述法, 就是将集合中元素的公共属性描述出来. 例如, 全体偶数构成的集合可以表示为

$$B = \{x \mid x \text{ 为偶数}\}.$$

本书用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合. 在不特别声明的情况下, 今后提到的数都指实数, 并且用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数构成的集合, 用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数构成的集合, 用 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数构成的集合, 用 $\mathbf{N}$ 表示全体正整数构成的集合, 用 $\varnothing$ 表示空集, 即不含任何元素的集合.

在应用上, 用得较多的数集是所谓的区间与邻域.

2. 区间

设 a, b 是实数, 且 $a < b$, 称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点, 其中 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$. 称数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, 其中 $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$. 类似地, 可以定义半开区间 $(a, b]$ 与 $[a, b)$ 分别为

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$$

以上这些区间称为有限区间, $b - a$ 称为这些区间的长度. 在数轴上, 这些区间依次表现为长度有限的线段(图 1-1-1).

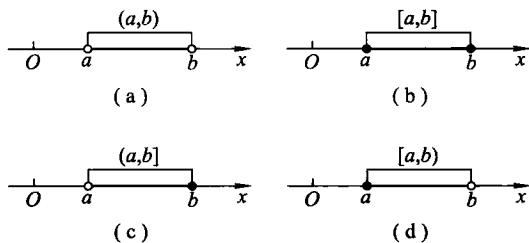


图 1-1-1

此外, 还有所谓的无限区间, 它们分别是

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &= \{x \mid x \geq a\}, \\ (-\infty, b] &= \{x \mid x \leq b\}, \\ (a, +\infty) &= \{x \mid x > a\}, \\ (-\infty, b) &= \{x \mid x < b\}, \\ (-\infty, +\infty) &= \{x \mid x \in \mathbf{R}\}, \end{aligned}$$

其中前两个区间称为无限半开区间, 后三个区间称为无限开区间. 记号“ $-\infty$ ”读作负无穷大, “ $+\infty$ ”读作正无穷大. 在数轴上, 前四个无限区间表现为一条半直线(图 1-1-2), 而最后一个无限区间表现为整个数轴. 以后如果所作的论述对各种区间(有限的、无限的、开的、闭的、半开的)均适用, 为了简明起见, 就用“区间 I ”代表各种类型的区间.

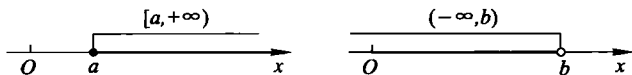


图 1-1-2