

计算机类

依据国家自考委最新自考大纲及新修版教材编写

• 高等教育自学考试指定教材同步配套题解

高等数学(工专)

主编 陈非 武利强 崔红新



 现代出版社

寄语考生

随着我国教育总方针由应试教育向素质教育的转变,作为我国高等教育重要组成部分的自学考试也发生了重大变化。全国自考委在专业设置、考试计划、出题指导方针等方面都做了重大的调整,同时,对自学考试大纲、指定教材亦做了全方面的修订、编写。

新形势下,为使广大自学学员能及时、快速地掌握新教材,我们对原有的系列辅导用书进行了全面的修订,并不断地推出新品种以飨读者。

本套“指定教材同步配套题解”有以下特点:

新—①内容新。本套丛书全部按最新的自学考试大纲及最新版指定教材内容编写。

②结构新。同原辅导及其它辅导相比,修订后的辅导用书编排体例更加科学,增加了“本门课的学习与考试”部分。这是全书的点睛之笔。

全—信息全。本套辅导书涵盖了大纲中所有的知识点、考核点,并精心编拟大量“综合练习题”,训练强度大,解答准确。特别指出的是根据《高等教育自学考试活页文丛》(人大版)对教材中没有补充的内容,在本辅导中都做了详尽补充。

强—①作者阵容强。本套丛书的作者,有指定教材的主编,有专业教研室主任,有长期参加辅导的主讲教师。他们对自考教材分析透,对出题规律掌握准。

②针对性强。书后针对新大纲及考卷合理设计多套“全真模拟试题”,增强考生临场经验,增加本书实用性。

愿本套“同步配套题解”能帮助您顺利通过自考难关,早日实现美好理想。

《高等教育自学考试指定教材同步配套题解》编委会

前 言

对大多数参加自考的同志来说,《高等数学》是一块硬骨头。学习数学,仅靠记一些定理和公式是远远不够的。但是,是否大量地做习题就能将数学水平提高呢?大量的事例表明,在初步了解基本的概念、定理和公式之后,再经过有针对性的练习,才能收到事半功倍的效果。练习不在于多,而在于精。本书收编了多年自考试卷的真题和一些典型例题,是一本较好的自考辅导教材。

本书是严格按照国家自考委员会颁布的大纲编写的。在此基础上,编者又潜心研究了多年的自考试卷,仔细分析了自考试题的特点,尽力使本书既与教材同步,又紧密结合考试。

本书基本上覆盖了《高等数学》(工专)的各个知识点,并对历年来考卷中常出的题目重点强调,反复训练,努力使读者切实掌握基本内容,较大地提高分析问题、解决问题的能力及计算能力。

本书也可作为函授大学、职工大学、电视大学及大专班师生的参考用书。

由于我们的水平有限,缺点和不足之处在所难免,欢迎广大读者给予批评指正。

编 者
2001年5月

目 录

命题解析	(1)
第一章 函数	(4)
知识网络	(4)
同步综合练习	(5)
参考答案	(15)
第二章 极限概念、函数的连续性	(16)
知识网络	(16)
同步综合练习	(19)
参考答案	(31)
第三章 导数与微分	(32)
知识网络	(32)
同步综合练习	(34)
参考答案	(50)
第四章 微分学应用	(51)
知识网络	(51)
同步综合练习	(53)
参考答案	(70)
第五章 不定积分概念与积分法	(71)
知识网络	(71)
同步综合练习	(72)
参考答案	(90)
第六章 定积分及其应用	(91)
知识网络	(91)
同步综合练习	(95)
参考答案	(117)
第七章 空间解析几何	(118)

知识网络	(118)
同步综合练习	(121)
参考答案	(133)
第八章 多元函数微分学	(134)
知识网络	(134)
同步综合练习	(138)
参考答案	(160)
第九章 多元函数积分学	(161)
知识网络	(161)
同步综合练习	(164)
参考答案	(183)
第十章 常微分方程	(184)
知识网络	(184)
同步综合练习	(188)
参考答案	(204)
第十一章 无穷级数	(205)
知识网络	(205)
同步综合练习	(209)
参考答案	(227)
全真模拟试题(一)	(228)
参考答案	(234)
全真模拟试题(二)	(245)
参考答案	(247)

命 题 解 析

●考试题型

通过对本专业多年的试卷分析,可以看出试卷中出现的题型一般可分四种:1.填空题;2.选择题,一般都是从四个选项中选取一个正确的;3.计算题;4.应用及证明题.虽然曾有几次试卷上只有选择题和计算题,但计算题内有应用和证明题。

●分数安排

试卷中分数的分配按难、中、易的程度取 1:3:2 的比例分布.具体到各种题型来说:

一、填空题,这部分主要考察一些基本的运算能力。如:

(1995 年上)曲线 $y = x^3 - x + 1$ 在 $(0, 1)$ 点处的切线方程为 _____.

(1997 年上)交换二次积分次序 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy =$ _____.

二、选择题

在这部分,我们按其先后次序(实际上也是难易程度)分成两小部分.

I. 较简单的选择题,这部分主要考一些基本概念和简单的计算题,基本上不需什么技巧,只需了解基本概念和有一定的计算能力。如:

(1998 年下)两个函数相同是指这两个函数的().

- A. 定义域相同
- B. 值域相同
- C. 定义域相同且值域相同
- D. 定义域相同且对应法则相同

(1998 年上) $\int 10e^x dx = ()$

$$A. 10e^{x+c}$$

$$B. 10ex + c$$

$$C. e^x + 10$$

$$D. 10e^x + c$$

II. 较复杂的选择題, 这部分主要考对某些定理和公式的理解及一些计算技巧. 如:

(1998 年上) 设 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上连续, 则 $\int_0^2 x^3 f(x^2) dx = (\quad)$

$$A. \int_0^4 xf(x) dx$$

$$B. \int_0^2 xf(x) dx$$

$$C. \frac{1}{2} \int_0^2 xf(x) dx$$

$$D. \frac{1}{2} \int_0^4 xf(x) dx$$

三、计算题

做这一部分需熟练掌握书上的定理公式并具有较高的计算技能. 如:

(1996 年下) 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 由 $xy = 1, y = x, x = 2$ 围成.

四、应用及证明题

这部分不仅要求熟悉教材内容, 并能对所给问题正确分析, 然后会用一定的数学方法求解. 如:

(1995 年下) 已知矩形周长为 $2p$, 把它绕其一边旋转生成一旋转体, 求使旋转体体积最大的矩形各边长.

● 学习方法

学习每门课程都有一定的学习方法, 《高等数学》也一样. 就笔者多年学习数学的经验, 以及具体结合到这门课来说, 笔者认为应遵循以下原则:

1. 重视理解概念. 对于各种成体系的理论而言, 概念是其推理和发展的基础, 每个概念都包含着极其丰富的意义, 有着深刻的背景. 对概念, 特别是原始概念的准确理解, 对把握整个知识体系是至关重要的. 在这门课里, 我们应深入理解函数、极限、连续、导数、积分等基本概念.

2. 熟记重要的定理、公式及一些重要的典型例子. 例如中值定

理,求导公式、积分公式和两个重要极限等.对定理不仅要记它的结论,还要弄清它的适用条件.重要的公式不仅能知道左边 = 右边,还能知道右边 = 左边.这部分主要通过做习题来巩固提高.

3.有意识地做一些针对性习题.先做一些模拟题,了解自己在哪些章节还有不足,然后对不足的章节多加练习.若学习的目的只是应付考试,就需多做一些考前模拟题,最好是往年的真题.

4.及时有计划地总结.可按时间或章节进行总结.以免将前面的问题拖到后面,形成一个大包袱.

● 应试技巧

对整个试卷考题的分布来说,大致是按先易后难的顺序排布的.因此在答题时,可按先后顺序做.又考生一般不可能对考题的各个知识点都熟悉,我们建议,碰到不会或不太熟的题先跳过去,以免浪费时间,等整张试卷容易做的都做完了,再进行空下的题目.第一遍没做的若有选择题,最好能直接求解;若不能直接求解,可用排除法或检验法(又称代入法).排除法就是从四个选项中逐个剔除你认为不是正确答案的项,最后剩下的一个即为正确答案.检验法则是将四个选项依次代入,哪个最适合题目要求,就是正确答案.这方面的例子很多,我们这里不一一例举了.关于计算题的技巧,将在各个章节具体细述.

第一章 函 数

知识网络

● 本章内容

1. 函数. 变量 y 按确定法则随变量 x 的变化而变化, 称 y 是 x 的函数. 函数有两个重要组成因素: 1. 定义域; 2. 对应法则. 因此, 当考察一个函数时, 忽略定义域或对应法则都是无意义的.

2. 函数的基本性态 —— 单调性、有界性、奇偶性、周期性.

① 单调性. 对函数 $y = f(x)$, $\forall x_1, x_2 \in D$ (D 为定义域), 若 $x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 称函数 $y = f(x)$ 单增; 反之, 若均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $y = f(x)$ 单减.

② 有界性. 对函数 $y = f(x)$, $\forall x \in D$, 存在 $M > 0$, 均有 $|f(x)| \leq M$, 称 $f(x)$ 有界.

③ 奇偶性. 若 $f(x) = -f(-x)$, 称 $f(x)$ 为奇函数; 若 $f(x) = f(-x)$, 称 $f(x)$ 为偶函数. 注意若定义域关于原点不对称, 则无从谈起奇偶性.

④ 周期性. 对函数 $y = f(x)$, $\forall x \in D$, 若存在一个 $T > 0$, 满足 $f(x) = f(x + T)$, 称 $f(x)$ 为周期函数, 满足该等式的最小正数 T , 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 反函数. 由 $y = f(x)$ 可以解得 $x = \varphi(y)$, 习惯上记为 $y = \varphi(x)$, 称 $y = \varphi(x)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数. 在坐标系中, 这两个函数关于直线 $y = x$ 对称.

4. 复合函数. 把一个函数作为另一函数的自变量所构成的函数即为复合函数. 注意复合函数可能多于一重, 定义域可能发生变化.

5. 初等函数. 由基本初等函数 (常数指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数) 经过有限次的四则运算与有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数, 即为初等函数.

● 本章重点

1. 求函数的定义域.
2. 掌握函数的四种基本性态.

● 本章提示

1. 弄清函数的定义以及定义的两个重要组成部分, 知道 $y = f(x)$ 中 $f(\quad)$ 的涵义, 会求函数值.
2. 熟记初等函数的定义域, 以此为基础求解普通函数的定义域.
3. 理解反函数的概念, 知道反函数和原函数在图形上关于直线 $y = x$ 对称.
4. 清楚复合函数的概念, 会求复合函数的定义域、值域及表达式.
5. 会求任一函数是否有四种基本性态.
6. 熟悉初等函数的图形及其基本性质.
7. 能对实际问题转化成数学问题并求解.

● 本章安排

本章从函数的定义出发, 围绕函数进一步研究初等函数、反函数和复合函数以及函数的四种基本性态, 以便为下面各章进行打基础.

同步综合练习

一、选择题

1. 以下两个函数相同的是: ()
A. x 与 $\frac{x^2}{x}$
B. $\lg(x^2 + 2x + 1)$ 与 $2\lg(x + 1)$
C. $\arcsin x$ 与 $\frac{\pi}{2} - \arccos x$
D. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$ 与 $\sqrt{x^2 + 4x + 4}$
2. 函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域是 ()
A. $x \leq 1$ B. $x \geq 1$

- $C. x \neq 1$ $D. -1 < x < 1$
3. 函数 $y = \sin x + x^2$ 是()
- $A.$ 周期函数 $B.$ 奇函数
 $C.$ 偶函数 $D.$ 无界函数
4. 函数 $y = e^x + 2$ 的反函数是()
- $A. y = \ln(x - 2)$ $B. y = \ln(x + 2)$
 $C. y = \ln x - 2$ $D. y = \ln x + 2$
5. 函数 $y = |\sin 2x|$ 的最小周期是()
- $A. 2\pi$ $B. \pi$
 $C. \frac{\pi}{2}$ $D. \frac{\pi}{4}$
6. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义, 下列函数必为偶函数的是()
- $A. y = |f(x) + 2|$ $B. y = xf(x^2)$
 $C. y = -f(-x)$ $D. y = f(x) + f(-x)$
7. 已知 $f(x+1) = x^2$, 则 $f(x) =$ ()
- $A. x^2$ $B. (x+1)^2$
 $C. (x-1)^2$ $D. x^2 - 1$
8. 函数 $y = -xe^{x-1}, (-\infty < x < \infty)$ 是()
- $A.$ 单调增函数 $B.$ 单调减函数
 $C.$ 非单调函数 $D.$ 有界函数
9. 设函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) (a > 0, a \neq 1)$, 则该函数是()
- $A.$ 奇函数 $B.$ 偶函数
 $C.$ 非奇非偶函数 $D.$ 即奇又偶
10. 设 $f(x) = x^2, \varphi(x) = 2^x$, 则 $f[\varphi(x)] =$ ()
- $A. 2^{x^2}$ $B. x^{x^2}$
 $C. x^{2x}$ $D. 2^{2x}$
11. 函数 $y = \frac{x-1}{\ln x} + \sqrt{16-x^2}$ 的定义域为()

$$A. (0, 1) \quad B. (0, 1) \cup (1, 4)$$

$$C. (0, 4) \quad D. (0, 1) \cup (1, 4]$$

12. 函数 $y = \log_4 2 + \log_4 \sqrt{x}$ 的反函数是()

$$A. y = 2^{x-1} \quad B. y = 2^{2x-1}$$

$$C. y = 4x - 1 \quad D. y = 4^{2x-1}$$

13. 设函数 $f(x) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sin \frac{x}{n}$ (n 为自然数), 则 $f(x)$ 是()

$$A. \text{无界函数} \quad B. \text{有界函数}$$

$$C. \text{单调函数} \quad D. \text{以 } n\pi \text{ 为周期的函数}$$

14. 设 $f(x) = \frac{1-3x}{x-2}$ 与 $g(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$g(x) = ()$$

$$A. \frac{1+2x}{x+3} \quad B. \frac{1-3x}{x-2}$$

$$C. \frac{x+3}{1+2x} \quad D. \frac{x-2}{1-3x}$$

15. 设 $f(x-1) = x^2 + 1$, 则 $f(x_0 + h) = ()$

$$A. (x_0 + h)^2 + 1 \quad B. (x_0 + h) - 1$$

$$C. (x_0 + h)^2 - 1 \quad D. (x_0 + h)^2 + 2(x_0 + h) + 2$$

16. 已知 $f(x) = \ln x + 1$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$, 则 $f[g(x)] = ()$

$$A. \ln(\sqrt{x} + 1) + 1 \quad B. \ln \sqrt{x} + 2$$

$$C. \sqrt{\ln(x+1)} + 1 \quad D. \ln \sqrt{x} + 1$$

17. 函数 $y = \frac{\ln x + 1}{\sqrt{x} - 1}$ 的定义域是()

$$A. \{x \mid x > -1\} \quad B. \{x \mid x > 1\}$$

$$C. \{x \mid x \geq -1\} \quad D. \{x \mid x \geq 1\}$$

18. 函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & |x| \leq 3 \\ x^2 - 9, & 3 < |x| < 4 \end{cases}$ 的定义域是()

$$A. [-3, 4] \quad B. (-3, 4)$$

$$C. [-4, 4) \quad D. (-4, 4)$$

19. 函数 $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$ 的定义域是()

A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$

B. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$

20. 下列函数中, 奇函数是()

A. $\sin x^2$

B. $(x-1)^3$

C. $e^{3x} + x$

D. $x^2 \sin x$

21. 设函数 $f(x) = x^3 - x^2 - 1$, 则 $f[f(1)] =$ ()

A. -1

B. -3

C. 0

D. 1

22. 函数 $y = e^x + e^{-x}$ 的图形, 对称于直线()

A. $y = x$

B. $y = -x$

C. $x = 0$

D. $y = 0$

23. 对于常数函数 $y = c (-\infty < x < +\infty)$, 则其反函数为()

A. 不存在

B. 存在, 但不确定

C. $x = c$

D. $y = c - x$

24. $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 的周期为()

A. 2π

B. 4π

C. 6π

D. $\frac{2}{3}\pi$

25. 若 $y = u^2, u = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, 则将 y 表示成 x 函数是()

A. $\log_a x^2$

B. $\log_a^2 x$

C. $2\log_a x$

D. $\log_a 2x$

26. 下列函数中, 非奇非偶函数是 $f(x) =$ ()

$$A. 1 + x^2$$

$$B. x + x^3$$

$$C. |x|$$

$$D. |x + 1|$$

$$27. \text{ 设 } f(x) = |1 + x| + \frac{(7-x)(x-1)}{|2x-5|}, \text{ 则 } f(-2) = (\quad)$$

$$A. 4$$

$$B. 8$$

$$C. -2$$

$$D. -4$$

28. 下面各组函数中表示同一函数的一组是()

$$A. f(x) = \log_a x^2 \text{ 与 } g(x) = 2\log_a x$$

$$B. f(x) = x - 1 \text{ 与 } g(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)}$$

$$C. f(x) = x \text{ 与 } g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$D. f'(x) = 1 \text{ 与 } g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

29. 点 x_0 的 δ 邻域($\delta > 0$)指的是()

$$A. (x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad B. [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$C. (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad D. [x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

30. 已知 $f(x) = 1 + \ln x$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$, 则 $f[g(x)] = (\quad)$

$$A. 1 + \ln(\sqrt{x} + 1) \quad B. 1 + \sqrt{\ln x + 1}$$

$$C. 2 + \ln \sqrt{x} \quad D. 2 + \sqrt{\ln x}$$

二、填空题

1. 设集合 $A = \{x | -3 < x \leq 4\}$, $B = \{x | -2 < x < 7\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 函数 $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ 的定义域是_____.

3. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}} + \ln(2x-7)$ 的定义域是_____.

4. 函数 $y = x \sin x$ 的图形是关于_____对称.

5. 函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内关于_____对称.

6. 函数 $f(x) = \sin(\frac{3}{4}x + 1)$ 的周期是_____.

7. 函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数是_____.

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 0 \\ xe^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(2) - f(0) =$ _____.

9. 设 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, 则 $f(f(x)) =$ _____.

10. 已知 $f(x-1) = x^2 + 2x$, 则 $f(x) =$ _____.

三、计算及证明题

(注: 鉴于该章为本书的基础, 函数的概念又较难理解, 特给出一些提示, 以后各章解题技巧请读者从解题步骤中具体揣摩。)

1. 求函数 $y = \frac{1+x}{1-x}$ 的反函数.

提示: 先求出用 y 来表示 x 的式子, 然后把 x, y 互换, 注意原值域变或定义域.

解: 由 $y = \frac{1+x}{1-x}$, 得 $y(1-x) = 1+x$

从而

$$x = \frac{y-1}{y+1} \quad (x \neq 1)$$

所以

$y = \frac{1+x}{1-x}$ 的反函数应为 $y = \frac{x-1}{x+1}$.

(因只有当 x 为 ∞ 时, $y = 1$)

2. 设 $f(x) = 2x + 3$, 求 $f[f(x)]$.

提示: 应将 $f(x)$ 作为 $f[\quad]$ 的自变量来求解 $f[f(x)]$.

解: $f[f(x)] = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 5+x, & x \geq 1 \\ x^2-1, & x < 1 \end{cases}$ 求 $f[f(-3)]$.

提示: 对于分段函数, 应看某点属于哪一段, 再具体代入其表达式求其值.

解:因为 $-3 < 1$,

故

$$f(-3) = (-3)^2 - 1 = 8 > 1$$

所以

$$f[f(-3)] = f(8) = 5 + 8 = 13$$

4. 设 $f(x^2 + 4) = x^4 + 5x^2 + 6$, 求 $f(x)$.

提示:求复合函数的解析式,应设次外层函数为自变量,再逐层求解.

解:因为

$$\begin{aligned} f(x^2 + 4) &= x^4 + 5x^2 + 6 \\ &= (x^2 + 2)(x^2 + 3) \\ &= (x^2 + 4 - 2)(x^2 + 4 - 1), \end{aligned}$$

故设 $x^2 + 4 = y$

则

$$f(y) = (y - 2)(y - 1)$$

所以

$$f(x) = (x - 2)(x - 1)$$

5. 求 $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 - 6x + 8} > 1$ 的定义域.

提示:求定义域时,应先列出满足题目要求的各个不等式,最后取交集.

解:依题意,有

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 6x + 8} > 0 \\ \sqrt{x^2 - 6x + 8} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - 6x + \frac{31}{4} > 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x > 4 \text{ 或 } x < 2 \\ \frac{6-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{6+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

因为

$$2 < \frac{6-\sqrt{3}}{2}, \frac{6+\sqrt{3}}{2} < 4$$

∴ 定义域为空集 ϕ .

6. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 若 $f(-1) = 3, f(1) = 2, f(2) = 8$, 求 $f(x)$.

提示: 应将对应点的函数值代入, 求出待定系数.

解: 依题, 有

$$\begin{cases} a - b + c = 3 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 8 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a = \frac{13}{6} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

所以

$$f(x) = \frac{13}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

7. 若 $f(x)$ 是奇函数, 证明 $f[f(x)]$ 也是奇函数.

证明: 若 $f(x)$ 是奇函数, 由定义知

$$f(x) = -f(-x) \text{ 或 } -f(x) = f(-x).$$

故

$$f[f(x)] = f[-f(-x)]$$

把 $-f(-x)$ 看成 $f(x)$ 的自变量, 则

$$f[-f(-x)] = -f[f(-x)]$$