21世纪普通高等教育电气信息类规划教材

最优控制理论与应用

邵克勇 王婷婷 宋金波 编著

化学工业出版社

21 世纪普通高等教育电气信息类规划教材

最优控制理论与应用

邵克勇　王婷婷　宋金波　编著

化学工业出版社
·北京·

本书以最优控制理论为基础，介绍了最优控制的工程应用，主要包括：最优控制中的变分法；连续系统和离散系统极小值原理；线性二次型最优控制系统；离散系统的动态规划和连续控制系统的动态规划；最短时间控制；最少燃料控制；时间-燃料综合最优控制问题等。

本书侧重于基本理论和基础概念的阐述，内容由浅入深，可供自动化及相关专业本科生作为专业课教材使用，也可以作为从事控制系统分析、设计的工程技术人员的自学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

最优控制理论与应用/邵克勇，王婷婷，宋金波编著. —北京：化学工业出版社，2011.8

21世纪普通高等教育电气信息类规划教材

ISBN 978-7-122-11803-5

Ⅰ. 最… Ⅱ. ①邵…②王…③宋… Ⅲ. 最佳控制-数学理论-高等学校-教材 Ⅳ. O232

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第138231号

责任编辑：郝英华　张　亮　　　　装帧设计：史利平

责任校对：蒋宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张10　字数241千字　2011年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：24.00元

前　　言

最优控制理论是研究和解决从一切可能的控制方案中寻找最优解的一门学科，它是现代控制理论的重要内容。近年来，科学技术的迅速发展，对许多被控对象，在一些情况下要求系统的某种性能指标为最优。这就要求人们对控制问题都必须从最优控制的角度去进行研究分析和设计。最优化问题就是依据各种不同的研究对象以及人们预期要达到的目的，寻找一个最优控制规律或设计出一个最优控制方案或最优控制系统。

本书介绍的最优控制理论侧重于基本理论和基础概念的阐述，由浅入深，最后介绍最优控制的应用领域。

全书共分为 6 章，第 1 章主要对最优控制问题的提法、最优控制的分类及最优控制的发展及沿革进行简要介绍；第 2 章介绍了最优控制中的变分法，其中包括泛函与变分和欧拉方程的概念、无约束条件下的变分问题以及对于不同终端时刻和终端状态的情况，如何运用变分法来求解最优控制问题；第 3 章介绍了极小值原理，包括极小值原理与变分法的联系与区别、连续系统和离散系统极小值原理的提出与证明和应用举例，并对连续系统和离散系统的极小值原理加以比较；第 4 章主要介绍了线性二次型最优控制系统，其中对二次型性能指标进行了简要介绍，着重研究状态调节器、输出调节器和最优跟踪器问题；第 5 章介绍了动态规划问题，在介绍多级决策过程及最优性原理的基础上，着重讨论离散系统的动态规划和连续控制系统的动态规划以及各自在最优控制问题中的应用；第 6 章主要介绍最优控制的应用，以极小值原理为基础，介绍了最优控制的应用实例，包括最短时间控制问题、最少燃料控制问题以及时间-燃料综合最优控制问题。

本书配套电子课件可免费提供给采用本书作为教材的院校使用，如有需要请联系：cipedu@163. com。

本书由邵克勇教授统稿，王婷婷编写第 1～3 章，宋金波编写第 4～6 章。硕士研究生胡仲瑞、刘玉琳、张晓花、陈峤郴、于海玉、马永晶参与了部分文字录入和校对工作。

由于编者水平有限，书中存在不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2011 年 7 月

目　录

第1章　绪　　论

1.1　最优控制问题的提法

近年来，科学技术的迅速发展，对许多被控对象，如宇宙飞船、导弹、卫星和现代工业设备与生产过程等的性能提出了更高的要求，在许多情况下要求系统的某种性能指标为最优。这就要求人们对控制问题都必须从最优控制的角度去进行研究分析和设计。最优控制问题就是依据各种不同的研究对象以及人们预期要达到的目的，寻找一个最优控制规律或设计出一个最优控制方案或最优控制系统。最优控制系统理论是研究和解决从一切可能的控制方案中寻找最优解的一门学科，它是现代控制理论的重要内容。

最优控制理论研究的主要问题是根据所建立的被控对象的数学模型，选择一个容许的控制律，使得被控对象按预定要求运行，并使给定的某一性能指标达到极小值(或极大值)。

从下面几个简单的例子，可以进一步了解什么是最优控制问题，以及研究最优控制问题的重要性和必要性。

【例 1-1】　最大半径轨道转移问题。

已知宇宙飞船沿环形地球轨道飞行，要求用有限推力的小火箭发动机在预定时间 t_f 内，使飞船转移到最大半径的环形火星轨道上，试确定小火箭发动机推力方位角的最优变化率。

设宇宙飞船小火箭发动机的推力为 p，其大小恒定；推力方位角为 $\theta(t)$，宇宙飞船到引力中心的径向距离为 $r(t)$，地球轨道的径向距离为 $r(0)$，火星轨道的径向距离为 $r(t_f)$。

宇宙飞船速度向量的径向分量为 $u(t)$，切向分量为 $v(t)$，宇宙飞船的质量为 m，燃料消耗率为常数 $\dot{m}$，引力中心的引力常数为 λ。推力最大半径轨道转移问题如图 1-1 所示。

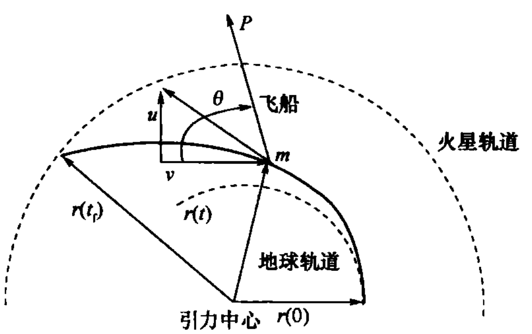

图 1-1　最大半径轨道转移示意

解　根据力学规律，可以列出系统的运动方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{r}(t) &= u(t) \\
\dot{u}(t) &= \frac{v^2(t)}{r(t)} - \frac{\lambda}{r^2(t)} + \frac{p\sin\theta(t)}{m_0 - |\dot{m}|\, t} \\
\dot{v}(t) &= -\frac{u(t)v(t)}{r(t)} + \frac{p\cos\theta(t)}{m_0 - |\dot{m}|\, t}
\end{aligned}
\tag{1-1}
$$

初始状态为

$$\left.\begin{aligned} r(0)=r_0,\ u(0)=0 \\ v(0)=\sqrt{\frac{\lambda}{r_0}},\ m(0)=m_0 \end{aligned}\right. \tag{1-2}$$

终端状态要求为

$$u(t_f)=0,\ v(t_f)=\sqrt{\frac{\lambda}{r(t_f)}} \tag{1-3}$$

性能指标为

$$J=r(t_f) \tag{1-4}$$

最优控制任务是确定 $\theta^*(t)$，使宇宙飞船在预定时间 t_f内，由已知初态转移到要求的终态，并使性能指标(轨道转移半径)最大。

【例 1-2】 最小燃料消耗问题。

飞船在月球的软着陆就是要使飞船落到月球时的速度为零，要达到这个目的，飞船必须依靠其发动机产生一个与月球重力相反的推力 $u(t)$，同时为使发动机燃料的消耗为最少，就必须寻求发动机推力的最优控制规律。

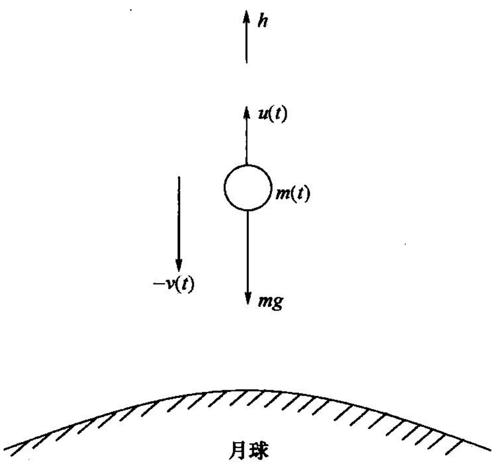

图 1-2 登月舱软着陆示意

解 如图 1-2 所示设飞船质量为 $m(t)$，它的高度和垂直速度分别为 $h(t)$和 $v(t)$，月球的重力加速度可视为常数 g，飞船自身的质量以及所带燃料质量分别是 M 和 $F(t)$。

飞船自某一时刻 $t=0$ 时刻开始进入着陆过程，其运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{h}(t)&=v(t) \\ \dot{v}(t)&=\frac{u(t)}{m(t)}-g \\ m(t)&=-ku(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

式中，k 是一个常数。

要求控制飞船从初始状态

$$h(0)=h_0,\ v(0)=v_0,\ m(0)=M+F(0) \tag{1-6}$$

出发，在某一终端 t_f时刻实现软着陆，即

$$h(t_f)=0,\ v(t_f)=0 \tag{1-7}$$

控制过程中推力 $u(t)$ 不能超过发动机所能提供的最大推力 $u_{\max}$，即

$$0 \leqslant u(t) \leqslant u_{\max} \tag{1-8}$$

满足上述约束，使飞船实现软着陆的推力 $u(t)$ 程序不止一种，其中消耗燃料最少的才是问题所要求的最优的推力程序，即问题可归纳为求

$$J = m(t_f) \tag{1-9}$$

最大的数学问题。

飞船的月球软着陆的优化问题是在满足方程式(1-5)和式(1-8)的推理约束条件下，寻求发动机推力的最优变化率 $u^*(t)$，使飞船由已知初始状态转移到要求的终端状态，并使性能指标 $J = m(t_f) = \max$，从而使飞船软着陆过程中燃料消耗最少。由此可见，该最优化问题是一个最少燃料消耗的最优控制问题。

【例 1-3】 最快拦截问题。

设空中有一枚敌方导弹 M(称为目标)和一枚我方导弹 N(称为拦截器)，已知 M 以 v_M 做等速飞行，其重力加速度为 g；N 的质量为 $m(t)$，满载燃料时的质量为 $m(0)$，燃料消耗完毕时的质量为 m_e，发动机推力为 $p(t)$，单位推力的燃料消耗率为常数 k，推力的方位角为 $\theta(t)$，发动机的最大推力限额为 p_M。作战任务要求确定 N 推力及其方位角的最优变化率 $p^*(t)$ 和 $\theta^*(t)$，以便在空中尽快摧毁目标 M。

为便于研究起见，假定 N 与 M 在同一平面内运动，如图 1-3 所示。

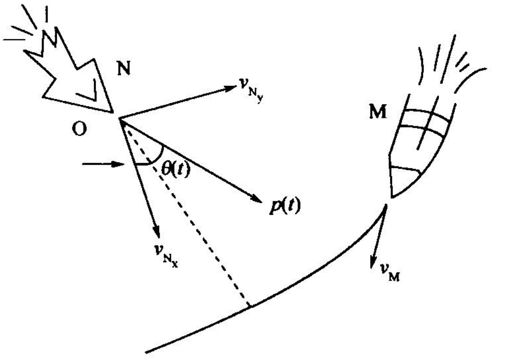

图 1-3 最快拦截问题示意

由图可列出目标 M 的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_M(t) &= v_{M_x}(t) \\ \dot{y}_M(t) &= v_{M_y}(t) \\ \dot{v}_{M_x}(t) &= 0 \\ \dot{v}_{M_y}(t) &= -g \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

式中，(x_M, y_M) 表示平面上目标 M 的位置；(v_{M_x}, v_{M_y}) 表示目标 M 的速度。若以 (x_N, y_N) 表示平面上 N 的位置，(v_{N_x}, v_{N_y}) 表示 N 的速度，则其运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_N(t) &= v_{N_x}(t) \\ \dot{y}_N(t) &= v_{N_y}(t) \\ \dot{v}_{N_x}(t) &= \frac{p(t)}{m(t)}\cos\theta(t) \\ \dot{v}_{N_y}(t) &= \frac{p(t)}{m(t)}\sin\theta(t) - g \\ \dot{m}(t) &= kp(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

为了进一步简化运动方程，取相对运动坐标系。令 N 与目标的相对位置及相对速度为

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_N(t) - x_M(t) \\ y(t) &= y_N(t) - y_M(t) \\ v_x(t) &= v_{N_x}(t) - v_{M_x}(t) \\ v_y(t) &= v_{N_y}(t) - v_{M_y}(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

于是，拦截器与目标的相对运动方程可写为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=v_x(t)\\&\dot{y}(t)=v_y(t)\\&\dot{v}_x(t)=\frac{p(t)}{m(t)}\cos\theta(t)\\&\dot{v}_y(t)=\frac{p(t)}{m(t)}\sin\theta(t)\\&\dot{m}(t)=kp(t)\end{aligned}\right\}\tag{1-13}$$

初始状态

$$\left.\begin{aligned}&x(t_0)=x(0),\ y(t_0)=y(0),\ m(t_0)=m(0)\\&v_x(t_0)=v_x(0),\ v_y(t_0)=v_y(0)\end{aligned}\right\}\tag{1-14}$$

式中，t_0为初始时刻。

终端状态要求为

$$\left.\begin{aligned}&x(t_f)=y(t_f)=0\\&m(t_f)\geqslant m_e\end{aligned}\right\}\tag{1-15}$$

其意义是要求拦截器在燃料消耗完毕前击中目标。

控制约束为

$$\left.\begin{aligned}&|p(t)|\leqslant p_M\\&\theta(t)\text{不限}\end{aligned}\right\}\tag{1-16}$$

性能指标取为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{d}t\tag{1-17}$$

最优控制任务是：在容许控制中确定 $p^*(t)$和 $\theta^*(t)$，使拦截器 N 从已知初态转移到要求的终态，并使给定的性能指标极小(时间最短)。

从上述几个最优控制的实例可见，最优控制问题可以用数学方法描述，包含以下几方面内容，即最优控制的提法包括以下几个部分。

(1) 系统的数学模型

被控系统的数学模型即系统的微分方程，它反映了动态系统在运动过程中所应遵循的规律，通常以状态方程来表示。

对于状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t]\tag{1-18}$$

输出方程

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t]\tag{1-19}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$为系统状态向量；$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$为系统控制向量。$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 为 n 维向量函数，t 为时间变量。在确定的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$情况下，若已知控制律 $\boldsymbol{u}(t)$，则状态方程(1-18)有唯一解 $\boldsymbol{x}(t)$。

对于离散系统，有状态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k),\ k],\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\tag{1-20}$$

输出方程

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k),\ k],\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\tag{1-21}$$

(2) 系统的边界条件

状态方程的边界条件，也就是动态系统的初态和终态。动态系统的运动归根结底是在状态空间里从一个状态转移到另一个状态，其运动随时间变化对应于状态空间的一条轨线。轨线的初始状态可以记为 $x(t_0)$，t_0为初始时间，轨线的终端状态可记为 $x(t_f)$，t_f为到达终端的时间。

在最优控制问题中，初始状态一般是已知的，而终端状态可以归结为以下两种情况。

① 终端时间和终端状态都固定。终端时间固定指到达终点的时间是已知的或固定的，即 t_f是一个定值。终端状态固定指终端状态 $x(t_f)$对应于状态空间的一个固定点。

② 终端时间固定，终端状态自由。终端状态自由是指终端状态是一个运动的点，不再是一个固定的点，而是一个满足所有条件的终端状态的集合，这个点的集合称为目标集，可以用 S 来表示。

对于以上两种情况，都可以用一个目标集 S 来概括，如果终端状态不受任何条件的约束，则目标集 S 扩展到整个状态空间；如果终端状态受某些条件的约束，则目标集 S 为状态空间的一个曲面；如果终端状态固定，则目标集 S 仅有一个元素。

(3) 容许控制集

在控制系统中，存在两类控制：一类是变化范围受限制的控制，如例 1-2 中的发动机推力和例 1-3 中拦截器的推力等，这一类控制属于某一闭集；另一类是变化范围不受限制的控制，如例 1-3 中的拦截器推力的方位角以及例 1-1 中宇宙飞船小火箭发动机推力的方位角等，这一类控制属于某一开集。

对于一个实际的控制问题，输入控制 $\boldsymbol{u}(t)$的取值必定要受一定条件的约束。满足约束条件的控制作用$\boldsymbol{u}(t)$的一个取值对应于 r 维空间的一个点，所有满足条件的控制作用$\boldsymbol{u}(t)$的取值构成 r 维空间的一个集合，记为 $\boldsymbol{\Omega}$，称之为容许控制集。凡是属于容许控制集 $\boldsymbol{\Omega}$ 的控制，都是容许控制，用 $\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{\Omega}$ 表示。

(4) 性能指标

在状态空间中，从初始状态转移到终端状态，可以通过不同的控制作用来实现，如何来衡量系统在每一个控制作用下的好坏，需要用一个标准对它进行量化评定。这个评比的标准称之为性能指标。

性能指标的内容与形式主要取决于最优控制问题所要完成的任务。不同的最优控制问题，必定有不同的性能指标。然而，即使是同一个最优控制问题，其性能指标的选取也可能由侧重点的不同而不同。例如，有的要求时间最短，有的注重燃料最省，有的时间与燃料兼顾。应当指出，性能指标选取的合适与否，是决定系统是否存在最优解的关键所在。

性能指标一般用 J 来表示，在最优控制相关资料中也被称为性能泛函、目标函数、价值函数、效益函数、代价函数等。性能指标有以下三种典型形式。

① 积分型或称拉格朗日(Lagrange)型性能指标

$$J=\int_{t_0}^{t_f}L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\mathrm{d}t \tag{1-22}$$

表示在整个自动控制过程中，状态 $\boldsymbol{x}(t)$和控制 $\boldsymbol{u}(t)$应达到某些要求。要求调节过程的某种积分评价为极小(或极大)属于这一类问题，举例如下。

a. 最短时间控制问题。要求系统在最短时间内由给定的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$转移到要求的终端状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$，取 $L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]=1$，则有

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{d}t=t_f-t_0$$

b. 最少燃料控制问题。要求保证$[t_0, t_f]$时间内由给定的初始状态$x(t_0)$转移到要求的终端状态$x(t_f)$所用燃料最少，取$L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]=\sum_{j=1}^{m}|u_j(t)|$，则有

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=1}^{m}|u_j(t)|\,\mathrm{d}t$$

c. 最小能量控制问题。要求保证一个物理系统所用能源的能量消耗最少，取$L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{u}(t)$，则有

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t$$

在变分法中，积分型性能指标的泛函极值最优控制问题称为拉格朗日问题。

② 终端型或称迈耶尔（Mayer）型性能指标

$$J=\Phi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] \tag{1-23}$$

表示系统在控制过程结束后，终端状态$x(t_f)$应达到某些要求。例如，月球软着陆问题中要求终端时刻飞船的质量最小。终端时刻t_f可以固定，也可自由，由最优控制问题的性质而定。

在变分法中，终端型性能指标的泛函极值最优控制问题称为迈耶尔问题。

③ 综合型或称波尔扎(Bolza)型性能指标

$$J=\Phi[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\mathrm{d}t \tag{1-24}$$

表示对控制过程中的状态$\boldsymbol{x}(t)$，控制$\boldsymbol{u}(t)$及控制过程结束后的终端状态$\boldsymbol{x}(t_f)$均有要求，是最一般的性能指标形式，举例如下。

a. 有限时间线性状态调节器问题。所谓线性状态调节器，是指设计一个线性系统，使其在干扰作用下始终能保持处于平衡状态$x(0)=0$，即该系统应具有从任何初始状态返回到平衡状态的能力，选取性能指标如下

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{1-25}$$

式中，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，$\boldsymbol{Q}(t)=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0$，$\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)>0$，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{Q}(t)$，$\boldsymbol{R}(t)$均为加权矩阵。

b. 有限时间线性跟踪问题。所谓跟踪问题，是指要求控制系统的输出$\boldsymbol{y}(t)$跟踪期望输出$\boldsymbol{z}(t)$，选取性能指标如下

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{1-26}$$

式中，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，$\boldsymbol{Q}(t)=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0$，$\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)>0$，且$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{y}(t)$为输出误差向量，而$\boldsymbol{z}(t)$为希望输出向量，$\boldsymbol{y}(t)$为输出向量。

在变分法中，综合型性能指标的泛函极值问题称为波尔扎问题。需要指出的是，以上三种类型的性能指标，通过引入适当的辅助变量，可以相互转换。

根据以上的分析，可以将最优控制问题的一般提法概括如下。

设系统状态方程及初始条件为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t], \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1-27}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^n$是$\boldsymbol{x}(t)$、$\boldsymbol{u}(t)$和$t$的连续向量函数，并对$\boldsymbol{x}(t)$和$t$连续可微；$\boldsymbol{u}(t)$在$[t_0, t_f]$上分段连续。若存在控制作用$\boldsymbol{u}(t)$，能使系统从初态$\boldsymbol{x}_0$转移到终态$\boldsymbol{x}_f\in S$，并

使下列性能指标

$$J = \Phi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \mathrm{d}t \tag{1-28}$$

达到极小或极大值的控制作用 $\boldsymbol{u}(t)$ 称为最优控制，记为 $\boldsymbol{u}^*(t)$。对应的 $\boldsymbol{x}(t)$ 称为最优轨线，记为 $\boldsymbol{x}^*(t)$。其中，$\Phi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]$ 和 $L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$ 都是 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 t 的连续可微函数。

可见，最优控制的任务是：给定一个被控系统或被控过程(包括有关的约束条件和边界条件)以及性能指标，如何设计相应的控制系统，使得在满足约束条件和边界条件的同时，其性能指标达到极小(或极大)值。

1.2 最优控制问题的分类

根据系统的结构性能和完成的任务各不相同，最优化问题可以按下述情况进行分类。

(1) 单变量函数与多变量函数最优化问题

如果系统中需要最优的变量仅有一个，则为变量函数的最优化问题。如果系统中需要寻优的变量多于一个，则为多变量函数的最优化问题。尽管实际生产过程中往往需要寻优的变量是很多的，即为多变量函数的最优化问题，但对于不少多变量的优化问题，往往归结为反复地求解一系列变量函数的最优值，因此，单变量函数最优化方法是求解最优化问题的基本方法。

(2) 无约束与有约束最优化问题

如果控制变量的范围不受限制，则为无约束的最优化问题。求无约束函数的极值时，问题的最优解即为性能指标的极值，但是，在实际的控制问题中，控制变量的取值范围总是受到限制的，也就是说，总是要在一定的约束条件下来研究性能指标的最优化问题，即为有约束的最优化问题。约束条件可分为等式约束条件和不等式约束条件。等式约束条件上各点称为可行解。等式约束曲线表示为可行域。满足不等式的约束条件的区域范围称为解的可行域。在该域内的解称为可行解，而可行解的数目会有无限多个，其中必有一个为最优解。

例如，某公司要在规定的时间内对其产品做一个计划，那么它必须根据库存量、市场对产品的需求量以及生产率来考虑使产品的生产成本最低。那么这个问题就是一个经济最优控制问题。

设 T 是一个固定时间，$x(t)$ 表示在时刻 $t(0 \leqslant t \leqslant T)$ 时的产品存货量，$r(t)$ 表示在时刻 t 时对产品的需要率。这里假定 $r(t)$ 是一个定义上的时间 t 的已知连续函数，$u(t)$ 表示在时刻 t 的生产率，函数 $u(t)$ 由生产计划人员来选取，即生产计划或者称控制。取 $u(t)$ 为分段连续函数，则存货量由如下微分方程(1-29)确定，其中 x_0 是原来的库存量，即初始值。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r(t) + u(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1-29}$$

设该产品在单位时间内的生产成本是生产率的函数，即单位时间的生产成本是 $h[u(t)]$，$b>0$ 是单位时间贮藏单位商品的费用。于是，在时刻 t 的该公司生产这个产品的单位时间的成本是

$$f[x(t), u(t), t] = h[u(t)] + br(t) \tag{1-30}$$

因此，在规定时间 T 内生产此产品的总成本为

$$J(t) = \int_0^t f[x(t), u(t), t] \mathrm{d}t \tag{1-31}$$

对于生产计划人员来说，就是要选取一个控制 $u(t)$使得总成本 $J(t)$达到极小值。

如果对于 $x(t)$，$r(t)$和 $u(t)$不加任何的限制，即为一个无约束条件的最优化问题。但从 $x(t)$的实际意义来看，公司的库存量不可能是无限的，要受一定条件的限制。

$0\leqslant x(t)\leqslant A$，$A$ 为公司最大库存量。

生产计划 $u(t)$是公司的生产率，要受公司生产设备的限制。

$0\leqslant u(t)\leqslant B$，$B$ 为公司最大生产率。

产品的需要率 $r(t)$，也不可能是无限的，也要受一定的限制。

$0\leqslant r(t)\leqslant C$，$C$ 为产品的最大需要率。

如果在做计划时考虑这些条件的限制，那么这个问题就是一个在不等式约束条件下的最优化问题。

(3) 确定最优和随机规划问题

在确定最优问题中，系统中每一个变量的变化规律是确定的，可用一个确定的关系式描述，每个变量的取值是确定的，可知的。例如，电路中用电设备的耗电量与时间的关系。在随机最优问题中，系统中有些变量不能用一个确定的表达式来描述，某些变量的取值是不确定的，但可根据大量的实验统计法来确定概率分布规律。例如，电子系统的可靠问题是一个随机性最优化问题，这是因为人们无法缺切知道电子系统中某些组成器件或部件的失效时间，而只能根据经验或统计资料，掌握其概率分布规律。解决随机性最优化问题一般可采用卡尔曼滤波方法。对于某些能表示成数学规律模型的随机性最优化问题，可以和确定性最优化问题一样采用规划方法求解，称为随机规划。

(4) 线性和非线性最优化问题

如果性能指标和所有约束条件式均为线性，即它们是变量的线性函数，则称为线性最优化问题或线性规划问题。如果性能指标或约束条件式（即使只是部分约束条件式）中任何一个是变量的非线性函数，则称为非线性最优化问题或非线性规划问题。线性最优化问题的求解方法大致分为间接法（解析法）和直接法（数值解法）。线性规划问题是非线性规划问题的一个特例，求解线性规划问题有很成熟的方法，比较容易求解。求解非线性规划问题则很困难。在实际工程应用中，往往采用线性化方法，用线性函数求解近似非线性最优化中的非线性函数，把非线性最优化问题转化成线性最优化问题。

(5) 静态和动态最优化问题

控制系统最优化问题一般可分为静态最优化（参数最优化）问题和动态最优化（最优控制）问题。

静态最优化问题是指在稳定工况下实现最优化，它反映系统达到稳态后的静态关系。系统中各变量不随时间 t 变化，而只表示对象在稳定工况下各参数之间的关系，其特性用代数方程来描述。大多数的生产过程被控对象可以用静态最优化问题来处理，并且具有足够的精度。静态最优化问题一般可用一个目标函数 $J=f(x)$和若干个等式约束条件或不等式约束条件来描述。要求在满足约束条件下，使目标函数 J 为极大或极小。

动态最优化问题是指系统从一个工况变化到另一个工况的变化过程中，应满足最优要求。在动态系统中，所有的参数都是时间 t 的函数，其特性可用微分方程或差分方程来描述。动态最优控制要求寻找出控制作用的一个或一组函数而不是一个或一组数值，使性能指标在满足约束条件下为最优值。这样，性能指标不再是一般函数，而是函数的函数，即性能指标是一个泛函。因此，在数学上属于泛函求极值的问题。

静态最优化问题可以采用线性规划和非线性规划方法（包括间接法和直接法）来解决。而解决动态最优化问题则采用经典变分法、极小（极大）值原理、动态规划和线性二次型最优控制法等。对于动态系统，当控制无约束时，采用经典变分法。当控制有约束时，采用极小值原理或动态规划法。如果系统是线性的，性能指标是二次型形式的，则可采用线性二次型最优控制方法求解。

应当指出，在求解动态最优化问题中，若将时域$[t_0, t_f]$分成许多有限区域段，在每一分段内，将变量近似看作常量，那么动态最优化问题可近似按分段静态最优化问题处理，这就是离散事件最优化问题，显然分段越多，近似的精确程度越高。所以静态最优和动态最优问题并不是毫无联系的。如果动态最优化问题能够表示成线性规划的数学模型，则完全可以用线性规划方法来求解动态最优问题。

1.3 最优控制的发展及沿革

自动控制理论（古典或经典控制理论）对于设计和分析单输入单输出的线性时不变系统是非常有效的。但是随着航空及空间技术的发展，对控制精度提出了更高的要求，并且被控对象是多输入多输出系统，用古典控制理论中的传递函数方法、频率特性方法处理这一类问题变得很复杂。面对实际工程应用中提出的各种问题，学者们深入了解控制系统的内在规律性，充分挖掘时域分析方法的优点，建立了以状态空间法为基础的现代控制理论。

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分，其形成与发展奠定了整个现代控制理论的基础。早在 20 世纪 50 年代初，学者们就开始了对最短时间控制问题的研究；随后，由于空间技术的发展，越来越多的学者和工程技术人员投身于这一领域的研究和开发，逐步形成了一套较为完整的最优控制理论体系。迄今为止，控制理论的发展经历了古典控制理论和现代控制理论的两个重要发展阶段，并进入了大系统理论和智能控制理论的第三阶段。

最优控制理论研究的主要问题是：根据已建立的被控对象的时域数学模型或频域数学模型，选择一个容许的控制域，使得被控对象按预定要求运行，并使给定的某一性能指标达到最优值。从数学观点来看，最优控制理论研究的问题是求解一类带有约束条件的泛函极值问题，属于变分学的理论范畴。

然而，经典变分理论只能解决容许控制属于开集的一类最优控制问题，而工程实践中所遇到的多数是容许控制属于闭集的一类最优控制问题。对于这一类问题，经典变分理论变得无能为力，因而为了适应工程实践的需要，20 世纪 50 年代中期出现了现代变分理论，在现代变分理论中，最常用的两种方法是极小值原理和动态规划。

极小值（极大值）原理是前苏联科学院院士庞特里亚金（N. C. Pontryagin）于 1956～1958 年间逐步创立的。庞特里亚金在力学哈密尔顿原理的启发下进行推测，证明了极小值原理的结论，同时放宽了控制条件，解决了当控制为有界闭集约束时的变分问题，被称为现代变分法。

动态规划是美国学者贝尔曼（R. E. Bellman）于 1953～1957 年为了优化多级决策问题的算法而逐步创立的。贝尔曼依据最优性原理，发展了变分学中的哈密尔顿-雅可比理论，更好的解决了多级决策最优化问题，是一种适用于计算机计算、处理问题范围更广泛的方法。

此外，在现代控制理论的形成与发展中，起过重要推动作用的还有库恩和图克(Kuhn-Tucker)共同推导的关于不等式约束条件下的非线性最优必要条件（库恩-图克定理）以及卡

尔曼研究的关于随机控制系统最优滤波器等。

近年来，由于数字计算机的飞速发展和完善，逐步形成了最优控制理论中的数值计算法。当性能指标比较复杂，或者不能用变量函数表示时，可以采用直接搜索法，经过若干次迭代，搜索到最优点。常用的数值计算法有邻近极值法、梯度法、共轭梯度法及单纯形法等。同时，由于可以把计算机作为控制系统的一个组成部分，以实现在线控制，从而使最优控制理论的工程实现成为现实。因此，最优控制理论提出的求解方法，既是一种数学方法，又是一种计算机方法。

在现代控制理论和现代控制工程应用中，最优控制吸收了现代数学的很多成果，又得到了很大发展，并渗透到生产、生活、国防、城市规划、智能交通、管理等许多领域，发挥了越来越大的作用。最优控制的发展成果主要包括分布式参数系统的最优控制、随机最优控制、鲁棒最优控制、自适应控制、大系统的最优控制和微分对策等。最优控制理论形成了比较完善的理论体系，在实际工程中的应用将愈来愈广泛。

1.4 本书的主要内容

第 1 章——绪论。本章对最优控制问题的提法、最优控制的分类及最优控制的发展及沿革进行简要介绍。

第 2 章——最优控制中的变分法。首先介绍泛函与变分的概念，其次介绍无约束条件下的变分问题，最后介绍对于不同终端时刻和终端状态，如何运用变分法来求解最优控制问题。

第 3 章——极小值原理。首先阐述最小值原理与变分法的联系与区别，其次分别介绍连续系统和离散系统极小值原理的提出与证明和应用举例，最后对连续系统和离散系统的极小值原理加以比较。

第 4 章——线性二次型最优控制系统。简要介绍二次型性能指标，着重研究状态调节器、输出调节器和最优跟踪器问题。

第 5 章——动态规划。在介绍多级决策过程及最优性原理的基础上，着重讨论离散系统的动态规划和连续控制系统的动态规划以及各自在最优控制问题中的应用。

第 6 章——最优控制的应用。介绍最优控制的应用实例，包括最短时间控制问题、最少燃料控制问题以及时间-燃料综合最优控制问题。

第 2 章　最优控制中的变分法

最优控制问题是在一定的约束条件下，找到使性能指标达到极值时的控制函数。当被控对象的运动特性由向量微分方程描述，性能指标由泛函数来表示时，确定最优控制函数的问题，就变成在微分方程约束下求泛函的极值问题。

变分法是研究泛函极值问题的一种经典的数学方法，在经典力学、动力学、光学、电磁学、自动控制理论等方面应用广泛。掌握变分法的基本概念，有助于理解以极小值原理和动态规划为代表的现代变分法的思想和内容。为了区别现代变分法与本章所介绍的变分法，常将本章所提出的变分法称为古典变分法或经典变分法。

2.1　泛函与变分

泛函是函数概念的一种扩充，泛函可简单理解为“函数的函数”，它经常以定积分的形式出现。求泛函极值的方法与求函数极值的方法有许多类似之处。由于性能指标是一种泛函，因此本节将简要介绍有关泛函及其变分的若干基本概念。

在数学领域中，求一般函数的极值时微分或导数起着重要的作用，而在研究泛函极值时，变分起着同样重要的作用。求泛函的极大值和极小值问题都称为变分问题，求泛函极值的方法称为变分法。变分法是研究分析泛函极值的一种方法，它的任务是求泛函的极大值和极小值。

变分在泛函研究中的作用，与微分在函数研究中的作用几乎一样。泛函的变分与函数的微分，其定义式形式相当。下文通过回顾函数的概念，来引出泛函的定义式。

(1) 泛函的定义

对应于定义域中的每一个值 x，y 都有一个（或一组）值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为$y=f(x)$。这里 x 是自变量，y 是因变量。

与函数概念相对应，可以这样来阐明泛函的概念：对应于某一类函数中的每一个确定的函数 $y(x)$（注意，不是函数值），因变量 J 都有一个确定的值（注意，不是函数）与之对应，则称因变量 J 为函数 $y(x)$的泛函数，简称泛函。记为 $J=J[y(x)]$或简单记为 J。也就是说，泛函可简单理解为“函数的函数”，它经常以定积分的形式出现。

例如，函数的定积分是一个泛函。设

$$J[x(t)]=\int_0^2 x(t)\mathrm{d}t$$

则 $J[x(t)]$的值由函数 $x(t)$决定。当 $x(t)=2t$ 时

$$J[x(t)]=\int_0^2 2t\mathrm{d}t=4$$

当 $x(t)=\cos t$ 时

$$J[x(t)]=\int_0^2 \cos t\mathrm{d}t=\sin 2$$

可见，$x(t)$表示一类函数，一旦函数的表达式确定，则 J 的值是确定的。J 的值随函数