高等数学

——及其教学软件

习题选解

（下 册）

集美大学理学院数学系
集美大学诚毅学院数学教研室 编

科 学 出 版 社

高等数学

——及其教学软件习题选解

（下册）

集 美 大 学 理 学 院 数 学 系
集美大学诚毅学院数学教研室
编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是与教材《高等数学——及其教学软件(第三版)》(上海交通大学，集美大学)配套的习题选解. 全书共有上、下两册，内容包括教材中A类习题的选解和B类习题的全解. 本书在解答中注意分析解题思路，便于学生自学.

本书可作为高等工科院校工学、经济学等各专业“高等数学”课程的配套辅导，也可作为相关教师和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其教学软件习题选解. 下册/集美大学理学院数学系，集美大学诚毅学院数学教研室编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-030016-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①集…②集… Ⅲ.①高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第008059号

责任编辑：姚莉丽　房　阳 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

明辉印刷有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011年2月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2011年2月第一次印刷　印张：9 3/4
印数：1—6 500　字数：190 000

定价：19.00元

前　言

本套《高等数学——及其教学软件习题选解》是与教材《高等数学——及其教学软件(第三版)》配套编写的，在试用两年后正式出版.

教材中每一节后面的习题分为 A 类和 B 类，A 类是基本的要求，B 类具有提高的性质(含近几年硕士研究生部分入学试题). 为了留一些基本题给学生自主完成，我们只对 A 类习题作部分解答；B 类习题难度相对高一些，我们给出了全部解答，便于学生提高解题能力.

在解答中我们注意分析解题思路，让学生从中得到启发且便于自学. 希望这套习题选解能为学生自主学习高等数学提供帮助，为教师教学提供参考.

由于编写时间仓促，习题选解中可能有不足之处，热忱希望各位专家、教师和学生提出宝贵意见.

E-mail：sjweng@jmu.edu.cn

编　者

2010 年 3 月

目　　录

第 8 章　空间解析几何与向量代数

习题 8.1(A)

4. 证明三角形两腰中点的连线平行于底边，且等于底边的一半.

证　如图 8.1.1 所示，D 是 AC 的中点，E 是 BC 的中点，于是

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

所以 $\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{AB}$，并且 $|\overrightarrow{DE}|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

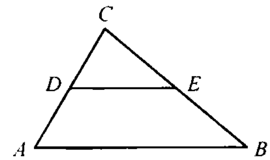

图 8.1.1　第 4 题图

习题 8.1(B)

1. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试应用向量证明它是平行四边形.

证　如图 8.1.2 所示，

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC},$$

所以该四边形有一组对边平行且相等，因此是平行四边形.

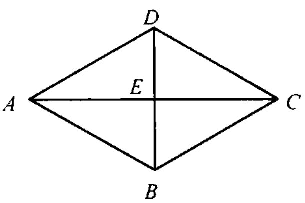

图 8.1.2　第 1 题图

2. 设 P 为平面上单位圆周上的任意一点，O 为圆心，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为圆内接正 n 边形的顶点. 试证：

(1) $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$;

(2) $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}$.

证　(1) 如图 8.1.3 所示，设 $\overrightarrow{OA_1}$ 沿 x 轴正方向，则

$$\overrightarrow{OA_k}=\left\{\cos(k-1)\frac{2\pi}{n},\sin(k-1)\frac{2\pi}{n}\right\},$$

$$k=1,2,\cdots,n,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right),\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right)\right\}=\mathbf{0}.$$

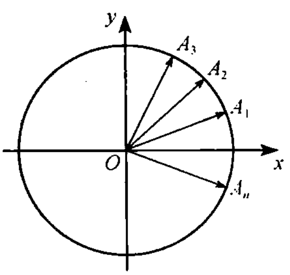

图 8.1.3　第 2 题图

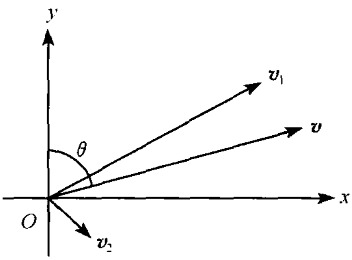

图 8.1.4　第 3 题图

(2) 因为$\overrightarrow{PA_k}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_k}$，所以$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}$.

4. 飞机以 250km/h 的空速向北偏东 60°的方向飞行，有风自西北方向(北偏西 45°)以 70km/h 的速度吹来，求飞机的实际航向和地面速度(所谓地面速度是合成速度的大小).

解　如图 8.1.4 所示，设空速为$\boldsymbol{v}_1$，风速为$\boldsymbol{v}_2$，地面速度为$\boldsymbol{v}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\\ &= 250\cos30°\boldsymbol{i}+250\sin30°\boldsymbol{j}+70\cos45°\boldsymbol{i}-70\sin45°\boldsymbol{j}\\ &= (125\sqrt{3}+35\sqrt{2})\boldsymbol{i}+(125-35\sqrt{2})\boldsymbol{j}=266\boldsymbol{i}+75.5\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

所以

$$|\boldsymbol{v}|=276.51\text{km/h},\quad \theta=90°-\arctan\frac{75.5}{266}=74.15°,$$

即实际航向为北偏东 74.15°.

习题 8.2(A)

5. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，并且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解
$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\&=3+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

6. 确定 c 的值，使 $\boldsymbol{a}=\{1,2,1\}$和 $\boldsymbol{b}=\{1,0,c\}$的夹角为 60°.

解　由$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\cos60°$得$\dfrac{1+c}{\sqrt{6}\sqrt{1+c^2}}=\dfrac{1}{2}$，即 $c^2-4c+1=0$，所以 $c=2\pm\sqrt{3}$.

10. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影.

解
$$\boldsymbol{a}=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k},$$
$$\text{proj}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x=13.$$

12. 已知 $\boldsymbol{a}=\{3,0,-1\}$，求 $\boldsymbol{b}$ 使 $\text{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=2$.

解　设 $\boldsymbol{b}=\{s,t,w\}$，因为

$$2=\text{proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{3s-w}{\sqrt{10}},$$

所以 $\boldsymbol{b}=\{s,t,w\}=\{s,t,3s-2\sqrt{10}\}$,其中 s,t 为任意实数.

习题 8.2(B)

1. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

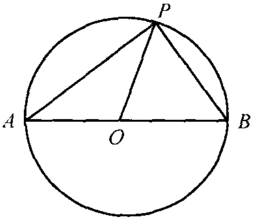

图 8.2.1 第 1 题图

证 如图 8.2.1 所示,设圆的半径为 R,AB 为直径,P 是圆周上任一点.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot(-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\\&=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO}\\&=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{AO}|^2\\&=R^2-R^2=0.\end{aligned}$$

2. 在杠杆上,支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处有一与$\overrightarrow{OP_1}$成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着,在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处有一与$\overrightarrow{OP_2}$成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着(图 8.2.2). 问当 $\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,|\boldsymbol{F}_1|,|\boldsymbol{F}_2|$符合怎样的条件时,才能使杠杆保持平衡?

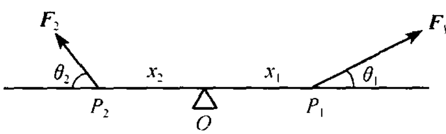

图 8.2.2 第 2 题图

解 由题意,杠杆只能绕点 O 转动,要使杠杆保持平衡,则杠杆不能转动. 由力矩平衡,必须

$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2.$$

3. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数,并指出等号成立的条件.

证 设

$$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\},$$

由于

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$

所以

$$\begin{aligned}|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|&=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\\&=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.\end{aligned}$$

等号成立的充要条件是$|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|=\pm1$,即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

4. 设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解 $\cos((\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}))=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}$,

其中

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=2,$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{6}+|\boldsymbol{b}|^2=7,$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{6}+|\boldsymbol{b}|^2=1,$$

所以

$$\cos(\widehat{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})})=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

5. 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,-2\}$,$\boldsymbol{b}=\{1,1,z\}$,问 z 为何值时,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$最小？并求出此最小值.

解

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}.$$

令$\left(\frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}\right)'=0$得

$$\frac{-6\sqrt{2+z^2}-3(1-2z)\dfrac{2z}{2\sqrt{2+z^2}}}{9(2+z^2)}=0,$$

解得 $z=-4$. 当 $z=-4$ 时,$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$最大,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$最小,此时

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{4}.$$

习题 8.3(A)

1. 求一个向量 $\boldsymbol{a}$,使它同时垂直于 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$.

解 1　设 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$,由已知,

$$\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}),$$

$$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$$

$$=\boldsymbol{0}+(-\boldsymbol{j})+(-\boldsymbol{k})+\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

所以 $\boldsymbol{a}=\{x,-x,-x\}$,其中 x 为任意实数.

解 2　设 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$,由已知,

$$a\cdot\{1,1,0\}=x+y=0,\quad a\cdot\{1,0,1\}=x+z,$$

所以 $\boldsymbol{a}=\{x,-x,-x\}$，其中 x 为任意实数.

5. 已知空间三点 $P(1,0,-1)$，$Q(2,4,5)$，$R(3,1,7)$.

(1) 求一向量，使它垂直于过 P,Q,R 三点的平面；

(2) 求$\triangle PQR$ 的面积.

解 (1) 所求向量 $\boldsymbol{a}/\!/\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$，

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\{1,4,6\}\times\{2,1,8\}=\{26,4,-7\},$$

所以 $\boldsymbol{a}=k\{26,4,-7\}$，其中 k 为实数.

(2) $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\frac{1}{2}\sqrt{741}.$

7. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$，求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

解

$$\begin{aligned}S&=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\times3\boldsymbol{b}|\\&=|-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\left|-5|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right|=30.\end{aligned}$$

8. 如图 8.3.1 所示，在自行车踏板上施加 60N 的力，踏板到齿轮中心的距离为 18cm，求关于 P 点的力矩的大小.

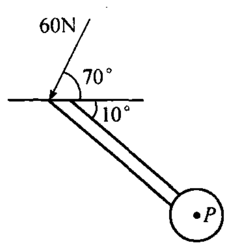

图 8.3.1 第 8(1)题图

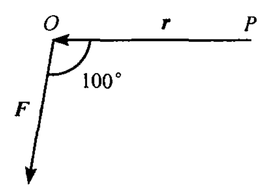

图 8.3.2 第 8(2)题图

解 如图 8.3.2 所示，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，

$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{r}|\cdot|\boldsymbol{F}|\sin80^\circ=0.18\cdot60\cdot\sin80^\circ\approx10.6$，$\boldsymbol{M}$ 的方向指向外.

9. 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{c}=\{2,1,2\}$，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$\mathrm{proj}_{c}\boldsymbol{r}=14$，求 $\boldsymbol{r}$.

解 由已知，

$\boldsymbol{r}/\!/\{2,-3,1\}\times\{1,-2,3\}$，$\{2,-3,1\}\times\{1,-2,3\}=\{-7,-5,-1\}$，

所以

$$\boldsymbol{r}=k\{-7,-5,-1\}.$$

又

$$14=\mathrm{proj}_c\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}})=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{-21k}{3},$$

从而 $k=-2$，于是 $\boldsymbol{r}=\{14,10,2\}$.

习题 8.3(B)

1. (1) 设直线 L 过 Q,R 两点，P 是 L 外一点，记 $\overrightarrow{QR}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{QP}=\boldsymbol{b}$. 证明 P 点到直线 L 的距离为 $d=\dfrac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；

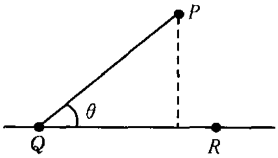

图 8.3.3　第 1 题图

(2) 已知直线 L 过 $Q(0,6,8)$，$R(-1,4,7)$ 两点，求 $P(1,1,1)$ 到 L 的距离.

(1) **证**　如图 8.3.3 所示，距离

$$d=|\boldsymbol{b}|\cdot|\sin\theta|=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

(2) **解**　$d=\dfrac{|\{-1,-2,-1\}\times\{1,-5,-7\}|}{|\{-1,-2,-1\}|}=\dfrac{|\{9,-8,7\}|}{|\{-1,-2,-1\}|}=\dfrac{\sqrt{97}}{\sqrt{3}}$.

2. (1) 设平面 Π 过 Q,R,S 三点，P 是 Π 外一点，$\overrightarrow{QR}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{QS}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{QP}=\boldsymbol{c}$，证明 P 点到平面的距离为 $d=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}$；

(2) 已知平面 Π 过 $Q(1,0,0)$，$R(0,2,0)$，$S(0,0,3)$ 三点，求 $P(2,1,4)$ 到 Π 的距离.

(1) **证**　如图 8.3.4 所示，距离

$$\begin{aligned}d&=|\overrightarrow{QP}|\cdot|\cos\theta|\\&=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\cos\theta|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}\\&=|\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}\\&=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}.\end{aligned}$$

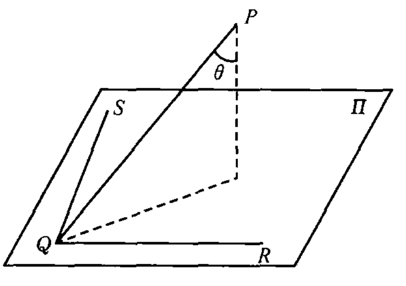

图 8.3.4　第 2 题图

(2) **解**

$$\begin{aligned}d&=\frac{|\{-1,2,0\}\cdot(\{-1,0,3\}\times\{1,1,4\})|}{|\{-1,2,0\}\times\{-1,0,3\}|}\\&=\frac{|\{-1,2,0\}\cdot\{-3,7,-1\}|}{|\{6,3,2\}|}=\frac{17}{7}.\end{aligned}$$

3. 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，

(1) 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，是否必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$？

(2) 已知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，是否必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$？

(3) 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，是否必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$？

解 (1) 否. 例如,

$$\boldsymbol{a}=\{1,1,1\},\quad \boldsymbol{b}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{c}=\{0,1,0\}.$$

(2) 否. 例如,

$$\boldsymbol{a}=\{1,1,1\},\quad \boldsymbol{b}=\{1,0,0\},\quad \boldsymbol{c}=\{0,-1,-1\}.$$

(3) 是. 因为此时有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0,\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0},$$

于是得 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 且 $\boldsymbol{a}/\!/(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$. 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$, 则存在 $k\neq0$, 使得 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}$, 从而得 $\boldsymbol{a}\perp k\boldsymbol{a}$, 这是不可能的.

4. 给定空间 4 点 $A(1,0,1)$, $B(2,3,0)$, $C(-1,1,4)$, $D(0,3,2)$, 求以 AB, AC, AD 为棱的平行六面体的体积.

解 $V=|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$

$=|(\{1,3,-1\}\times\{-2,1,3\})\cdot\{-1,3,1\}|$

$=|\{10,-1,7\}\cdot\{-1,3,1\}|=6.$

5. 如图 8.3.5 所示, 50N 的力作用于构件, 求关于 P 点的力矩的大小.

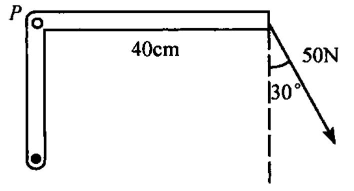

图 8.3.5 第 5 题图

解 $M=|0.4\cdot50\cdot\sin60^\circ|=20\sin60^\circ\approx17.3$(J).

6. 设 $\boldsymbol{a}=\{-1,3,2\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,-3,-4\}$, $\boldsymbol{c}=\{-3,12,6\}$, 证明向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面, 并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

证 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\{-1,3,2\}\times\{2,-3,-4\}\cdot\{-3,12,6\}$

$=\{-6,0,-3\}\cdot\{-3,12,6\}=0,$

所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 又设 $\boldsymbol{c}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$, 即

$$\{-3,12,6\}=s\{-1,3,2\}+t\{2,-3,-4\},$$

于是有

$$-3=-s+2t,\quad 12=3s-3t,\quad 6=2s-4t,$$

解得 $s=5$, $t=1$, 所以 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

7. 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$, 则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________. (研 1995)

解 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.$

习题 8.4(A)

1. 求过点 $(-1,3,-8)$ 且与平面 $3x-4y-6z-9=0$ 平行的平面方程.

解 所求平面与 $3x-4y-6z-9=0$ 平行, 其法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,-4,-6\},$$

所求平面方程为

$$3(x+1)-4(y-3)-6(z+8)=0,$$

即

$$3x-4y-6z-33=0.$$

2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解　所求平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM_0}=\{2,9,-6\},$$

所求平面方程为

$$2(x-2)+9(y-9)-6(z+6)=0,$$

即

$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过三点 $A(1,0,-3)$,$B(0,-2,-4)$,$C(4,1,6)$的平面方程.

解　所求平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{-1,-2,-1\}\times\{3,1,9\}=\{-17,6,5\},$$

所求平面方程为

$$-17(x-1)+6(y-0)+5(z+3)=0,$$

即

$$17x-6y-5z-32=0.$$

4. 指出下列各平面的特殊位置,并画出各平面:

(1) $2x+3y-6=0$;　(2) $3x-5=0$;　(3) $x-y=0$;　(4) $6x+5y-z=0$.

解　(1) 法向量为$\{2,3,0\}$,所以平面平行于 z 轴(图 8.4.1).

(2) 法向量为$\{3,0,0\}$,所以平面平行于 yOz 面(图 8.4.2).

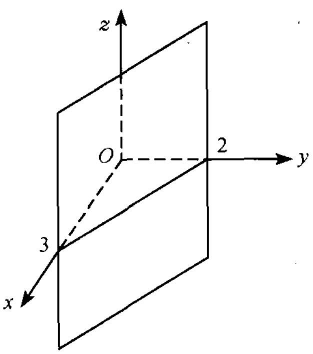

图 8.4.1　第 4(1)题图

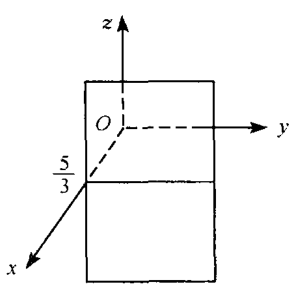

图 8.4.2　第 4(2)题图

(3) 法向量为$\{1,-1,0\}$,并且常数项为 0,所以平面过 z 轴(图 8.4.3).

(4) 常数项为 0,所以平面过原点(图 8.4.4).

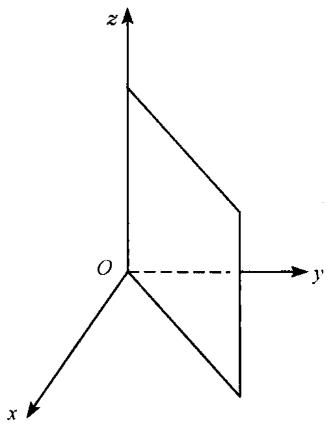

图 8.4.3 第 4(3)题图

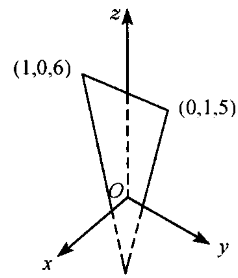

图 8.4.4 第 4(4)题图

5. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 zOx 面且经过点$(2,-5,3)$;

(2) 通过 z 轴和点$(-3,1,-2)$;

(3) 平行于 x 轴且经过两点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$.

解 (1) 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,由已知得 $A=C=0$,将点$(2,-5,3)$代入方程得

$$-5B+D=0,\quad D=5B,\quad B\neq 0,$$

所以所求方程为 $y+5=0$.

(2) 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,由已知得 $D=C=0$,将点$(-3,1,-2)$代入方程,得

$$-3A+B=0,\quad B=3A,\quad A\neq 0,$$

所以所求方程为 $x+3y=0$.

(3) 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,由已知得 $A=0$,将点$(4,0,-2)$,$(5,1,7)$代入方程得

$$-2C+D=0,\quad B+7C+D=0,$$

变形为

$$D=2C,\quad B=-9C,$$

所以所求方程为 $9y-z-2=0$.

6. 一平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{2,1,1\}$和 $\boldsymbol{b}=\{1,-1,0\}$,试求这个平面的方程.

解　所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{2,1,1\}\times\{1,-1,0\}=\{1,1,-3\},$$

所以所求方程为

$$(x-1)+(y-0)-3(z+1)=0,$$

即

$$x+y-3z=4.$$

习题 8.4(B)

1. 证明三元一次方程 $ax+by+cz+d=0((a,b,c)\neq(0,0,0))$是一个平面方程.

证　设(x_0,y_0,z_0)是方程 $ax+by+cz+d=0$ 的一组解,取向量 $\boldsymbol{n}=\{a,b,c\}$,作点法式平面方程

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

整理得

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0,$$

即

$$ax+by+cz+d=0,$$

所以 $ax+by+cz+d=0$ 是以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量,过点(x_0,y_0,z_0)的平面方程.

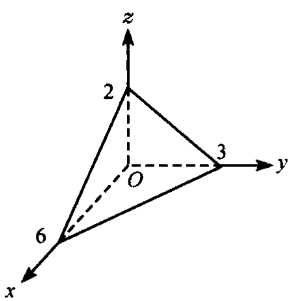

图 8.4.5　第 2 题图

2. 试求平面 $x+2y+3z-6=0$ 与三坐标面所围四面体的体积.

解　如图 8.4.5 所示,

$$V=\frac{1}{6}\times6\times3\times2=6.$$

习题 8.5(A)

2. 求过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$的直线方程.

解　所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{2,1,5\}$,所求直线方程为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

3. 求过已知两点的对称式和参数式直线方程.

(1) $M_1\left(3,1,\frac{1}{2}\right),M_2(-1,4,1)$.

解 (1) 直线的方向向量为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{-4,3,\frac{1}{2}\right\},$$

对称式方程为

$$\frac{x+1}{-4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-1}{1/2},$$

参数式方程为

$$x=-1-4t,\quad y=4+3t,\quad z=1+\frac{1}{2}t.$$

4. 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4.\end{cases}$

解 令 $x=1$,求得直线上点(1,1,1),取直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\{1,-1,1\}\times\{2,1,1\}=\{-2,1,3\},$$

对称式方程为

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3},$$

参数式方程为

$$x=1-2t,\quad y=1+t,\quad z=1+3t.$$

5. 求过点(2,0,-3)且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程.

解 平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,-2,4\}\times\{3,5,-2\}=\{-16,14,11\},$$

平面方程为

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0,$$

即

$$16x-14y-11z-65=0.$$

6. 求过点(3,1,-2)且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

解 点 $P(4,-3,0)$在直线上,平面过点 $P(4,-3,0)$和 $Q(3,1,-2)$,平面平行于{5,2,1}和$\overrightarrow{PQ}=\{-1,4,-2\}$,平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{5,2,1\}\times\{-1,4,-2\}=\{-8,9,22\},$$

平面方程为

$$-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0,$$

即

$$8x-9y-22z-59=0.$$