司一 模块教材

高中新课标

数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：李君华 田蓓艺 胡勇

函数与集合

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

函数与集合

本册编著：李君华（南京师范大学数科院教授）

田蓓艺（南京晓庄学院数学系讲师）

胡　勇（南京师范大学数科院讲师）

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　社　长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

函数与集合/毛文凤主编.-北京:中国大百科全书出版社,2005

新课标高中数学模块教材

ISBN 7-5000-7221-X

Ⅰ.函… Ⅱ.毛… Ⅲ.高等数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142242 号

策划设计:可一图书　(http://www.keyibook.com)

责任编辑:简菊玲

新课标高中数学模块教材

函数与集合

* * *

中国大百科全书出版社出版

全国新华书店经销

http://www.ecph.com.cn

北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010-88390797

南京玄武湖印刷实业有限公司印刷

* * *

2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷

890×1240 毫米　32 开本　11.5 印张　200 千字

ISBN 7-5000-7221-X/G·819

定　价:17.00 元

序

李君华

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵，已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中，编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书，从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学，应注重概念清晰、计算正确、论证有据；数学作为一种文化，应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的，是符合新课标理念的。当然，归根结底，针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的，在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合：适度的形式化与启发兴趣形式相结合，发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合，掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生"登高望远"的感觉或"源远流长"的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前　言

集合与函数是数学的主角，在中学数学中是传统的重点内容，在新近颁布的《普通高中数学课程标准》中被列为必修课的五大模块之首，可见学好集合与函数是何等的重要。

本书的编写按照新课程标准的基本理念，首先审视了“集合与函数”作为课程内容中的基本知识、基本技能和能力的内涵，并由此形成了本书的主体：第二章“走进集合”与第三章“解读函数”。其次注意到数学作为人类文化的组成部分，为了在相应的“集合与函数”这一模块有所体现，产生了第一章：“初识函数与集合”，适度介绍了这部分数学知识形成的历史过程，尤其介绍了一些数学伟人对数学真理的追求精神，希望能有助于青少年朋友看到数学的文化价值。

按照新课标的精神，为扩展青少年朋友的数学视野，本书第四章以“再识函数与集合”为题介绍了函数概念的

近代定义，同时拓展了集合与对应的原有观念，希望能引发青少年朋友的数学创新意识。

本书还有一个亮点，那就以“几何画板”为平台，浅显地将数学教学与计算机技术结合起来，由浅入深地介绍了初等函数切实有效的作图技巧及应用函数图象的解题方法，相信一定会激发青少年朋友学习数学的极大兴趣。

本书是一本与新教材相配合的模块教材，希望广大中学生朋友能喜欢它，本书也可作为中学老师的教学参考书。限于作者的水平，编写中的不当之处，敬请广大读者批评指正。

编者

目 录

第一章　初识函数与集合

源头茫昧虽难觅，

活水奔流喜不休.

——昂利·彭加勒

§1　古算家寻觅数量关系
诸公式孕育函数思想

世间客观事物总是相互联系的.反映在数学中就可用函数来描述,但函数这一数学中基本而又重要概念的形成却经历了漫长的岁月,与同样很基本的一些数学概念相比显得“滞后”.然而,描述数量关系的事例在古往今来的数学历史中倒是比比皆是的,特别在看似“静态”的一些公式中.

古埃及人早在公元前就用下列公式去计算图形面积:

长方形面积 = 底 × 高

圆面积

$$A=\left(\frac{8}{9}d\right)^2 (d\text{ 为圆的直径}), \text{这等于取 } \pi=3.16$$

圆面积

$$A=\frac{c^2}{12}(c\text{ 为圆周长}), \text{这等于取 } \pi=3$$

这里的面积不就是底与高或直径或周长的函数吗?

古希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras,公元前572～公元前497)不仅给出了世人皆知的毕达哥拉斯定理(即勾股定理)并延伸研究了它的反问题——毕达哥拉斯数,指出毕氏数组有无穷多个,例如由等式 $(m^2+1)^2=(m^2-1)^2+(2m)^2$ 相互制约的每三个一组的无穷多个正整数组都是毕达哥拉斯数组,即在构成直角三角形这一条件下这些“数们”联系在一起了.

更一般地讲,毕达哥拉斯的“万物皆数”且不论它的科学内涵如何,但这种说法把万物与数相联系,使人们开始认识到数量关系在宇宙中的重要性.

被誉为“数学之神”的阿基米德(Archimede,公元前287～公元前212)在从事几何定理的研究中,不仅使用数值逼近法精密计算得圆周率 $\pi=3.14$,而且运用他独创的力学探索法及穷竭法,发现了许多今天要用微积分才能解决的一些求积公式,像我们现在所用的球面积公式,球体积公式以及旋转抛物体、旋转双曲体、旋转椭球体的体积公式和抛物线弓形面积公式都是由阿基米德最早给出的,用现在数学语言与符号可具体写为:

(1)球表面积公式

$$S = 4\pi R^2 (R\text{ 为球半径})$$

(2)球体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 (R\text{ 为球半径})$$

(3)椭圆面积公式

$$S = \pi ab (a, b\text{ 分别为椭圆长半轴和短半轴})$$

(4)旋转抛物体体积公式

$$V = \frac{1}{2}SH (S\text{ 为底面积}, H\text{ 为高})$$

(5)旋转椭球体体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2 (\text{长轴为 } 2a, \text{短轴为 } 2b \text{ 的椭圆绕长轴旋转所得的椭球体})$$

阿基米德的工作条件近乎原始状态，没有纸笔只有草片、沙盘，而且由于时代局限，当时的数系十分落后，文字表达系统也相当粗糙，人们折服他这些精妙的数学发现，但无缘知道他是如何发现这些命题，又如何证明它们，仅有的著作有《论方法》是被人抄写在羊皮纸上而流传下来的，其中记述了一些他发现许多定理的方法，才使其思路公诸于世.

下面举一例，我们来看一下阿基米德是如何根据力学原理由圆柱和圆锥的体积推出球的体积公式的.

如图 1-1-1，将矩形 $ABCD$ 及以 AB 为直径的内切半圆，等腰直角三角形 ABE，绕 AB 轴旋转，分别得到圆柱、内切球和圆锥. 然后在距 AD 为 x 处切一铅直薄片，宽度为 Δx，旋转后得到的是厚度为 Δx

的圆盘，设 $AB=2r$，这圆盘薄片在圆柱、圆锥和球的部分中体积的近似值分别为：

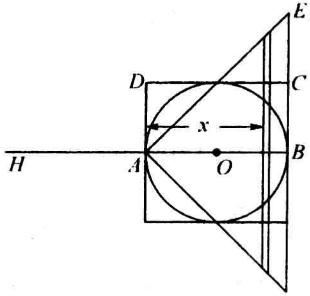

图 1-1-1

圆柱部分：$\pi r^2\Delta x$

圆锥部分：$\pi x^2\Delta x$

球部分：$\pi(\sqrt{r^2-(x-r)^2})^2\Delta x=\pi x(2r-x)\Delta x$

现以 A 为支点，在 BA 延长线上取 $AH=AB$，设想把球体和圆锥体的这类薄片挂在 H 点上，它们关于支点的合力矩（该体积与支点到这体积重心的距离之乘积，即重 $\times$ 重臂）为

$$2r[\pi x(2r-x)\Delta x+\pi x^2\Delta x]=4\pi r^2x\Delta x=4x\cdot(\pi r^2\Delta x)$$

这正好等于圆柱部分挂在原处力矩 $x\cdot\pi r^2\Delta x$ 的 4 倍.

把从 A 到 B 所有割出的薄片加在一起，将球和圆锥用绳子挂在 H 点，其力臂是 $2r$，把圆柱的重心挂在 O 点，它的力臂是 r，它们的力矩也应满足 4 倍关系，即球和圆锥挂在 H 点与 4 个圆柱挂在 O 点杠杆平衡，于是

$$2r(\text{球体积}+\text{圆锥体积})=4r(\text{圆柱体积})$$

而已知：圆锥体积 $= \frac{8}{3}\pi r^3$，圆柱体积 $= 2\pi r^3$

得：$2r\left(V_{球} + \frac{8}{3}\pi r^3\right) = 4r \cdot 2\pi r^3$

化简得：$V_{球} = \frac{4}{3}\pi r^3$

由此公式可得球体积是它外切正圆柱体积的$\frac{2}{3}$.

多么精彩的方法，阿基米德竟然用秤称出了球的体积公式，但他不满足于用力学原理发现球体积公式，他运用数学方法严格论证了他的发明，他所用的"穷竭法"实际上就是极限方法，也是微积分的原始思想，这是发生在两千多年以前的故事，真使人难以想像.

阿基米德有一句名言流传至今："给我一个立足点，就能移动地球."历史上也真有人为考验阿基米德的这句豪言壮语而做了一个实验，海厄罗国王选了一艘三桅大货船，下水时曾动员了叙拉古城所有的人，而阿基米德凭着他发明的机械通过一组滑轮，让国王一个人亲自将船拖动，国王佩服得五体投地，当即宣布："从现在起，阿基米德说的话我们都要相信."他还有两个故事几乎无人不晓，一是阿基米德在澡堂洗澡时看到自己身体部分浮起，于是突然联系到一直冥思苦想的金王冠掺杂质的问题有了答案，忘了穿衣裸体直奔到大街，直喊："有了！有了！（Eureka！Eureka！）"，他的答案便是《浮体论》命题7：若将一个重于液体之物置于液内，将它沉到底，且若在液体内衡其重量，则其轻于原重之数等于其所排液体重量.

阿基米德的另一个故事就是在叙拉古保卫战中他以古稀之龄，投

身于反侵略战争，最后为国捐躯，这是阿基米德一生中最悲壮、最惊心动魄的一幕. 那是在公元前 214 年到公元前 212 年，罗马名将马塞勒斯率领大军围攻叙拉古，在这危急存亡之秋，阿基米德献出自己的一切杰出的科学技术为祖国效劳，马塞勒斯从陆上及海上袭击叙拉古，阿基米德用他发明的起重机之类的器械将靠近墙根的船只抓起来，再狠狠地摔下去，有的被撞得粉碎，有的沉入海底，马塞勒斯不甘示弱，他用 8 艘 5 层橹船，每两艘锁在一起，架起一种叫"萨姆布卡"的武器，准备攻城，可叙拉古人未等敌船靠近，就用强大的机械将巨大石块抛出，形同暴雨，打得"萨姆布卡"七零八落，同时万弩齐发，罗马兵死伤无数，吓得目瞪口呆的马塞勒斯下令退兵.

还有一种传说是阿基米德还用巨大的火镜(利用抛物面反射镜能聚焦的性质制造而成)反射阳光来焚烧敌船，这大概是夸张的说法，有的书说是将燃烧的火球弹出去使敌船着火，这也许可信.

无论如何，罗马兵已成惊弓之鸟，只要看到一样东西从城里扔出来，立刻抱头鼠窜，大呼："阿基米德的机器又瞄准我们了."

阿基米德还制造了一种叫"蝎子"的弩炮专门对付近处敌人，使罗马兵再次吃亏. 罗马统帅马塞勒斯嘲笑他自己的工程师和工兵说："我们还能同这个懂几何的'百手巨人'打下去吗？他轻松地稳坐在海边，把我们的船只像掷钱游戏似的抛来抛去，船队被搞得一塌糊涂，还射出那么多的飞弹，比神话里的百手妖怪还厉害."

后来罗马兵放弃正面进攻，改用长期围困策略，叙拉古城终于因粮食耗尽、叛徒出卖而陷落. 当罗马大军攻入城中时，阿基米德还正在

沙盘上研究几何，全然没有理会人城士兵的吆喝，还口中念道“别碰我的图！”以致被激怒的士兵刺死，时年 75 岁. 罗马统帅敬仰阿基米德的才智，下令礼葬了这位曾令他大伤脑筋的学者，并遵照其生前有过的愿望在他的墓碑上镌刻了阿基米德著名定理的图形——球内切于圆柱.

在中国数学史中也有类似情况，《周髀算经》中载有每年 24 个节气日中午八尺标杆的影长(称晷长)与节气关系，而且仅实测冬至和夏至的数据，其余的节气日数据都是由计算公式给出，翻译为现在的函数关系就是，如用 $f(n)$ 表示，夏至到冬至的第 n 个节气日的晷长，则有 $f(n)=a+\frac{n}{12}(b-a)$，其中 a，b 分别为夏至和冬至的晷长，这里 n 是可以从夏至起双向取值的，例如清明是夏至前的第五个节气日，白露是夏至后的第五个节气日，在计算它们的晷长时间都取 $n=5$.

如在所在地实测得 $a=160$(分)，$b=1\,350$(分)，则上述计算公式可简写为 $f(n)=160+n\times 99\frac{1}{6}$，于是可得清明节的晷长为 $160+5\times 99\frac{1}{6}=655\frac{5}{6}$(分)，即清明节中午 8 尺标杆的影长为 6 尺 5 寸又 $5\frac{5}{6}$ 分.

上述所用的第 n 个节气晷长公式就是一个等间距的一次内插公式，在以后的历法研究中应用二次内插公式是这个公式的推广.

在另一名著《九章算术》中，计算公式更是丰富多彩，第 1 章“方田”是计算土地面积，第 4 章“少广”是求积问题的逆问题，第 5 章“商

功"是工程土方的体积计算问题，第2章粟米，第3章衰分，第6章均输其纯数学部分内容也就是正比例函数与反比例函数问题.

下列仅列出"商功"中的一些柱、锥、台的体积公式，主要有

(1)方堢(正四棱柱)：底边^2×高

(2)城垣、堤等(正截面为梯形的直棱柱)：$\frac{1}{2}$(上广＋下广)×高×袤(高为截面梯形的高，袤为棱柱的长)

(3)圆壔(正圆柱)：$\frac{1}{12}$圆周×高

(4)方锥(正四棱锥)：$\frac{1}{3}$底边^2×高

(5)圆锥(正圆锥)：$\frac{1}{36}$下周^2×高

(6)方亭(正四棱台)：$\frac{1}{3}$(上底边^2＋上底边×下底边＋下底边^2)×高

(7)圆亭(圆台)：$\frac{1}{36}$(上周^2＋上周×下周＋下周^2)×高

(8)堑堵(两底面是勾股形的正三棱柱)：$\frac{1}{2}$勾×股×柱高

(9)阳马(底面是长方形且有一棱与底面垂直的四棱锥)：$\frac{1}{3}$底长×底宽×锥高

(10)鳖(底面是勾股形且有一棱与底面垂直的四棱锥)：$\frac{1}{6}$勾×股×锥高