应用型本科数理类基础课程系列教材

复变函数与积分变换

主编　杨降龙　杨　帆

科学出版社

应用型本科数理类基础课程系列教材

复变函数与积分变换

主　编　杨降龙　杨　帆
副主编　翁连贵　梁晓东

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据教育部“复变函数与积分变换”非数学类课程的教学基本要求编写而成，主要内容有：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、Fourier 变换和 Laplace 变换. 本书从应用型本科学生的实际出发，对基本概念的引入尽量采用启发式的方法，力求理论高度不降低、推导过程简单明了、重点突出、难点分散. 书中每节后配有精选的习题，每章后配有总习题，书末附部分习题参考答案.

本书可供应用型本科院校工科各专业学生使用，也可供自学者及有关教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/杨降龙，杨帆主编. —北京：科学出版社，2011
应用型本科数理类基础课程系列教材
ISBN 978-7-03-031829-9

Ⅰ.①复… Ⅱ.①杨…②杨… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 135059 号

责任编辑：刘俊来 姚莉丽 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 7 月第一次印刷 印张：15
印数：1—3 500 字数：300 000

定价：28.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

“复变函数与积分变换”是理工类专业学生的一门重要的数学基础课程，是学习后续课程的基本工具. 近年来，随着我国高等教育的发展，一大批应用型本科院校应运而生. 为了适应这一层次本科院校的人才培养需求，我们总结多年的教学经验，编写了本书.

本书根据教育部“复变函数与积分变换”非数学类课程的教学基本要求编写而成，主要内容有：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、Fourier 变换和 Laplace 变换.

本书有如下几个方面的特点：

(1) 贯彻“强化概念，淡化理论，加强训练，学以致用”的原则，突出应用性，努力使学生学会应用数学思想、概念和方法，去处理工程实践中遇到的实际问题，学会将抽象的概念与具体的对象联系起来，并最终解决实际问题.

(2) 从应用型本科学生的实际出发，对基本概念的引入尽量采用启发式的方法，力求理论高度不降低、推导过程简单明了、重点突出、难点分散.

(3) 每节后配有精选的习题，每章后配有总习题，书末附部分习题参考答案.

本书可供应用型本科院校的工科各专业使用.

本书的教学总时数不低于 48 学时. 全书共 8 章，其中第 1，2 章由梁晓东编写；第 3～5 章由杨降龙编写；第 6 章由杨帆编写；第 7，8 章由翁连贵编写. 全书由杨降龙、杨帆负责统稿. 在编写过程中，南京工程学院的许多教师对本书的编写提出了不少有益的建议，科学出版社对本书的出版给予了大力支持，编者在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2011 年 2 月于南京

目　　录

第 1 章

复数与复变函数

中学阶段已对复数有了初步的认识，知道复数集是实数集的扩充. 以复数作为自变量的复变函数，实际上也是以实数作为自变量的实变函数在复数范围内的推广. 本章将在原有知识的基础上作简要的复习和补充，然后介绍复变函数以及复变函数的极限、连续等概念.

1.1 复数的概念及运算

通过本节学习，应掌握复数的概念、各种表示法以及各种运算的方法.

1.1.1 复数的概念

为了解代数方程，进而建立代数方程普遍理论，人们引入了复数的概念. 考虑到简单的二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无根，于是引入一个新数 i 满足方程 $x^2=-1$，这个数 i 称为**虚数单位**. 显然，$\mathrm{i}^2=-1$. 规定实数可以与 i 进行四则运算，并且原有的加法、乘法运算律仍成立. 于是方程 $x^2=-1$ 就有了两个根 i 和 $-\mathrm{i}$.

对于任意两个实数 x,y，称形如 $x+\mathrm{i}y$ 或 $x+y\mathrm{i}$ 的数为**复数**，常用字母 z 表示，即

$$z=x+\mathrm{i}y \quad \text{或} \quad z=x+y\mathrm{i},$$

其中实数 x,y 分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，分别记作

$$x=\mathrm{Re}(z), \quad y=\mathrm{Im}(z).$$

当 $\mathrm{Im}(z)=y=0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}=x$ 是实数；当 $\mathrm{Im}(z)=y\neq 0$ 时，z 称为**虚数**. 特别地，当 $x=0, y\neq 0$ 时，$z=y\mathrm{i}$ 称为**纯虚数**. 全体复数组成的集合称为复数集，记作 $\mathbf{C}$，即 $\mathbf{C}=\{x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbf{R}\}$，其中 $\mathbf{R}$ 为实数集. 显然，$\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

对于复数，还有如下规定：

两个复数相等当且仅当它们的实部与虚部分别相等. 两个复数只要不同时为

实数就不能比较大小.

1.1.2 复数的代数运算

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加(减)法及乘法规定如下:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1+\mathrm{i}y_1) \pm (x_2+\mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \quad (1.1.1)$$

即复数相加(减)就是将它们的实部和虚部分别相加(减),并称式(1.1.1)右端的复数为 z_1 和 z_2 的和(差).

$$z_1 z_2 = (x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1), \quad (1.1.2)$$

即两个复数相乘可按多项式相乘的法则进行,但要注意 $\mathrm{i}^2=-1$,并称式(1.1.2)右端的复数为 z_1 和 z_2 的积.

与实数一样,复数的加法、乘法运算满足如下定律:

(1) 交换律:$z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$;

(2) 结合律:$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)=z_1+z_2+z_3$,

$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)=z_1z_2z_3$;

(3) 分配律:$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

例 1.1.1 计算

(1) $(2-\mathrm{i})-(6+3\mathrm{i})$; (2) $(3-5\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})$.

解 (1) $(2-\mathrm{i})-(6+3\mathrm{i})=(2-6)+(-1-3)\mathrm{i}=-4-4\mathrm{i}$.

(2) $(3-5\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})=(-3+5)+(3+5)\mathrm{i}=2+8\mathrm{i}$.

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,称满足 $z_1=z_2z\,(z_2\neq 0)$ 的复数 z 为 z_1 除以 z_2 的商,记作

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \quad (1.1.3)$$

通常,把实部相等且虚部成相反数的两个复数称为一对**共轭复数**,与 z 共轭的复数记作 $\bar{z}$. 如果 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

实际上,两个复数 z_1 与 z_2 的商可以视为分子、分母同乘以分母的共轭复数 $\bar{z}$,再化简后得到的,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

例 1.1.2 设 $z_1=4-3\mathrm{i}$, $z_2=-2+\mathrm{i}$,求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 和 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{-2+\mathrm{i}}=\dfrac{(4-3\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}{(-2+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}=\dfrac{(-8-3)+(6-4)\mathrm{i}}{5}=-\dfrac{11}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$,

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=-\dfrac{11}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}.$

不难证明共轭复数有如下性质：

(1) $\overline{\overline{z}}=z$；

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(3) $z\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

(4) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

由性质(4)不难得知

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

例 1.1.3 设 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}-\dfrac{1}{\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ 及 $z\overline{z}$.

解 因为

$$z=\frac{\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}-\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}-\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}=\frac{3\mathrm{i}+1}{10}+\mathrm{i}=\frac{1}{10}+\frac{13}{10}\mathrm{i},$$

所以

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{10},\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{13}{10},\quad z\overline{z}=\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{13}{10}\right)^2=\frac{17}{10}.$$

例 1.1.4 已知 $\dfrac{\mathrm{i}\overline{z}}{1-\mathrm{i}}=z+3\mathrm{i}$，求 z.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，将原等式变形为

$$\mathrm{i}\overline{z}=(z+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i}),$$

则

$$\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)=[x+\mathrm{i}(y+3)](1-\mathrm{i}),$$

即

$$y+\mathrm{i}x=(x+y+3)+\mathrm{i}(y+3-x),$$

所以

$$\begin{cases}y=x+y+3,\\x=y+3-x.\end{cases}$$

解方程组得

$$x=-3,\quad y=-9,$$

故 $z=-3-9\mathrm{i}$.

例 1.1.5 设 z_1，z_2 为任意两个复数，证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)$.

证 因为

$$\overline{\overline{z_1}z_2}=\overline{\overline{z_1}}\,\overline{z_2}=z_1\overline{z_2},$$

所以

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=\overline{\overline{z_1}z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2).$$

例 1.1.5 也可以设出 z_1,z_2，通过计算证明等式成立.

1.1.3 复数的几何表示

1. 复平面

由复数相等的规定可知，一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与一对有序实数 (x,y) 是一一对应的. 于是在选定了平面直角坐标系后，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就可以用坐标为 (x,y) 的点 P 表示了(图 1.1). 由于 x 轴上的点表示实数，故将 x 轴称为**实轴**，y 轴上除原点外的点表示纯虚数，故将 y 轴称为**虚轴**，两轴所在的平面也就是可以表示复数的平面，称为**复平面**或 **z 平面**.

引进了复平面后，"数"与"点"之间建立了对应，这不仅使得可以借助于几何方法来研究复变函数的问题，而且也为复变函数应用于实际奠定了基础. 今后，常用点 z 来代替复数 z.

在复平面上，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也与从原点指向点 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 对应，所以复数 z 也可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示(图 1.1). $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 称为 z 的**模**(或绝对值)，记作

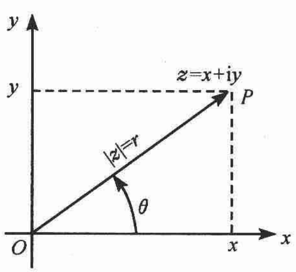

图 1.1

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0. \qquad (1.1.4)$$

显然，下列各式成立：

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,$$
$$|z|\leqslant|x|+|y|,$$
$$|z|=|\overline{z}|,$$
$$z\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2.$$

当 $z\neq 0$ 时，从正实半轴到向量 $\overrightarrow{OP}$ 的角的弧度数称为 z 的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}z$. 显然，$\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，它们都满足

$$\tan(\mathrm{Arg}z)=\frac{y}{x},\quad x\neq 0. \qquad (1.1.5)$$

如果 θ_0 是 z 的一个辐角，那么 $\mathrm{Arg}z=\theta_0+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，通常将在 $(-\pi,\pi]$ 内的辐角称为**辐角 Arg$z$ 的主值**，记作 $\arg z$. 显然，$\arg z$ 是唯一的，并且

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，辐角不确定，这就如同零向量没有确定的方向角一样.

设 $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$，根据 $\tan(\arg z)=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$，再考虑到点 z 所在的位置及 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 可知

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}\tag{1.1.6}$$

例 1.1.6 设 $z_1=-\mathrm{i}, z_2=-3+4\mathrm{i}$，分别求出 z_1 和 z_2 的模、辐角的主值及辐角.

解 $|z_1|=1$， $\arg z_1=-\dfrac{\pi}{2}$， $\operatorname{Arg} z_1=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

$|z_2|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，

因为 $\tan(\arg z_2)=-\dfrac{4}{3}$，又点 z_2 在第Ⅱ象限，所以

$$\arg z_2=\pi+\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)=\pi-\arctan\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{Arg} z_2=\pi-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

由复数与向量的对应关系可知，两个复数 z_1 与 z_2 的加减运算对应于复平面上相应向量的加减运算，可以由平行四边形或三角形法则求出(图 1.2).

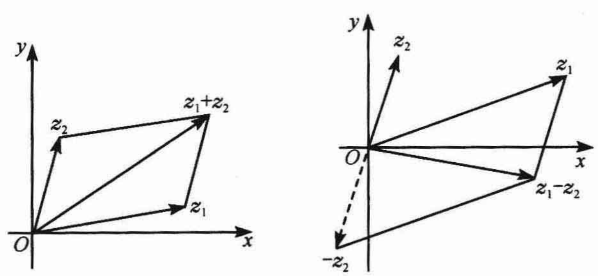

图 1.2

由图 1.2 和图 1.3 可知，$|z_1-z_2|$表示点 z_1 和 z_2 之间的距离，并且

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\tag{1.1.7}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.\tag{1.1.8}$$

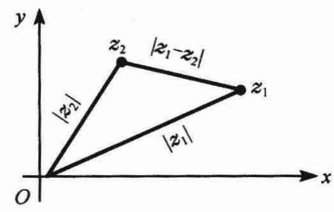

图 1.3

在建立了复平面，完成了“数”与“形”的对应后，很多平面图形就可以用复数形式的方程(或不等式)

来表示了.反之,对于给定的复数形式的方程(或不等式),也可以确定它所表示的平面图形.有时,复数形式的方程会更加简便.

例 1.1.7 确定下列方程所表示的曲线:

(1) $|z-2\mathrm{i}|=1$;　　(2) $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$;

(3) $z=\mathrm{Im}(\mathrm{i}\bar{z})$;　　(4) $z=t+\dfrac{\mathrm{i}}{t}$($t$ 为实参数).

解 (1) 方程$|z-2\mathrm{i}|=1$表示到点 $2\mathrm{i}$ 的距离等于 1 的点的轨迹,它是一个圆心为 $2\mathrm{i}$,半径为 1 的圆.

(2) 方程$|z-1|=|z+\mathrm{i}|$表示到点 1 和点$-\mathrm{i}$ 的距离相等的点的轨迹,它是以点 1 和点$-\mathrm{i}$ 为端点的线段的中垂线.

(3) 设 $z=x+\mathrm{i}y$,由 $z=\mathrm{Im}(\mathrm{i}\bar{z})$可得

$$x+\mathrm{i}y=\mathrm{Im}(x\mathrm{i}+y)=x,$$

于是 $y=0$,故该曲线的直角坐标方程为 $y=0$,它表示实轴.

(4) 设 $z=x+\mathrm{i}y$,由 $z=t+\dfrac{\mathrm{i}}{t}$可得

$$\begin{cases} x=t, \\ y=\dfrac{1}{t}, \end{cases}$$

消去参数 t 可知,该曲线的直角坐标方程为 $xy=1$,它表示一条双曲线.

例 1.1.7 中,(1),(2)也可以用代数方法求出曲线的直角坐标方程分别为 $x^2+(y-2)^2=1$ 和 $y=-x$(请读者自己完成).

2. 复数的三角表示式和指数表示式

设 $z=x+\mathrm{i}y$, $|z|=r$,θ 为 z 的一个辐角,由图 1.1 可知

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

于是 z 可表示成下面的形式:

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.1.9}$$

式(1.1.9)称为**复数的三角表示式**.

又根据欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.1.10}$$

式(1.1.10)称为**复数的指数表示式**. $z=x+\mathrm{i}y$ 称为**复数的代数表示式**.

根据不同的问题,复数可选择更为方便的表示式,需要时也可以将表示式的形式进行转化.

例 1.1.8 将下列复数化为三角表示式与指数表示式：

(1) $z=-1-\mathrm{i}$； (2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$.

解 (1) 显然，$r=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，点 z 在第Ⅲ象限内，它的一个辐角 θ 满足 $\tan\theta=1$，所以 $\theta=\frac{5}{4}\pi$. 于是 z 的三角表示式为

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right),$$

z 的指数表示式为

$$z=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{4}\pi}.$$

(2) 显然，$r=|z|=1$. 又因为

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10},$$

所以 z 的三角表示式为

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10},$$

z 的指数表示式为

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{10}\pi}.$$

3. 复球面与无穷远点

复数除了可以用复平面上的点和向量表示外，还可以用复球面上的点表示.

取一个与复平面相切于原点 O 的球面(图 1.4)，过切点 O 作垂直于复平面的直线，与球面相交于点 N，原点 O 称为球的南极(S 极)，N 称为球的北极(N 极). 对于复平面上的任一点 z，作连接 z 和 N 的直线，与球面相交于异于 N 的一点 P. 反之，若 P 为球面上任一异于 N 的点，则作连接 N 与 P 的直线，该直线交复平面于唯一确定的点 z. 这样复平面上的所有点都与球面上除北极外的点之间建立了一一对应的关系，于是可以用球面上的点来表示复数. 至于北极点 N，虽然不能对应复平面上的一个定点，但注意到当球面上的点离 N 点越近时，它所表示的复数的模就越大. 于是在复平面上加一个假想的“无穷远点”，它与 N 点对应，并把它记作∞(注意：此处

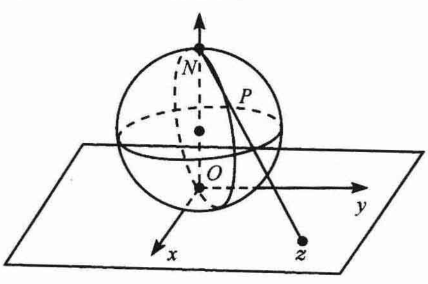

图 1.4

符号∞代表的是一个点——无穷远点，不要和微积分中的无穷大混淆，后者是一个变量)，N 点就是无穷远点的几何表示. 这样球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应，这个球面称为**复球面**. 包括无穷远点在内的复平面称为**扩充复平面**，不包括无穷远点的复平面称为**有限复平面**. 显然，复球面可以把扩充复平面中的无穷远点表示出来，这是复球面比扩充复平面优越的地方. 以后如无特殊声明，复平面均指有限复平面.

对于复数∞来说，其实部、虚部和辐角等概念都无意义，但它的模约定为无穷大，即$|\infty|=+\infty$，而对其他的有限复数 z，总有$|z|<+\infty$. 为使用方便起见，对于复数∞和有限复数 α 之间的运算作如下规定：

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty,$$
$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \quad (\alpha \neq 0),$$
$$\frac{\infty}{\alpha} = \infty, \quad \frac{\alpha}{\infty} = 0,$$
$$\frac{\alpha}{0} = \infty \quad (\alpha \neq 0).$$

对$\infty \pm \infty$，$0 \cdot \infty$以及$\frac{\infty}{\infty}$不规定其意义，$\frac{0}{0}$没有确定的值.

引进无穷远点会给今后一些问题的讨论带来方便，这也是给出这个“假想点”的目的所在.

1.1.4 复数的乘幂与方根

1. 积与商

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

式(1.1.11)表明

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1.1.12}$$
$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2. \tag{1.1.13}$$

由于辐角的多值性，对式(1.1.13)应按集合相等来理解，即等式两端能取的值的全体相同，即对左端的任一值，右端总有一值与之相等，反过来也一样. 今后，只要遇到等式两端是多值的情况都按这种意思来理解.

定理 1.1.1 两个复数乘积的模等于它们模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

定理 1.1.1 在几何上的解释如下：表示 z_1z_2 的向量可以由表示 z_1 的向量先逆时针旋转 $\mathrm{Arg}z_2$ 角度后，再伸缩 $|z_2|$ 倍得到(图 1.5).

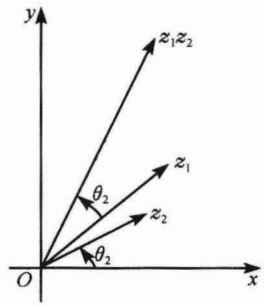

图 1.5

利用数学归纳法，可将定理 1.1.1 进一步推广如下：

设

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k), \quad k = 1,2,3,\cdots,n,$$

则

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)], \quad (1.1.14)$$

于是

$$|z_1z_2\cdots z_n| = |z_1||z_2|\cdots|z_n|, \quad (1.1.15)$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2\cdots z_n) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 + \cdots + \mathrm{Arg}z_n. \quad (1.1.16)$$

定理 1.1.2 两个复数商的模等于它们模的商，两个复数商的辐角等于它们辐角的差.

证 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$\overline{z_2} = r_2(\cos\theta_2 - \mathrm{i}\sin\theta_2) = r_2[\cos(-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(-\theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{r_1r_2[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]}{r_2^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]. \quad (1.1.17)$$

式(1.1.17)表明

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.1.18)$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2. \quad (1.1.19)$$

复数的乘积和商用复数的指数表示式可表示如下：

设 $z_k = r_k e^{\mathrm{i}\theta_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)}, \quad (1.1.20)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}. \quad (1.1.21)$$

2. 幂与根

n 个相同的复数 z 的乘积称为 z 的 n 次方，记作 z^n，即 $z^n = \overbrace{zz\cdots z}^{n个}$.

根据复数乘法的运算律，实数范围内正整数次幂的运算律在复数范围内仍成立，即对任意的复数 z_1, z_2 及正整数 m, n 有

$$z^m z^n = z^{m+n},$$
$$(z^m)^n = z^{mn},$$
$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

对于虚数单位 i，显然有

$$i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1.$$

一般地，对于任意的正整数 n 有

$$i^{4n} = 1,\quad i^{4n+1} = i,\quad i^{4n+2} = -1,\quad i^{4n+3} = -i. \tag{1.1.22}$$

而对于任意复数，设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，根据式(1.1.14)及乘幂的定义易知

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.1.23}$$

如果用 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ 定义负整数次幂，则式(1.1.22)和式(1.1.23)对 n 为负整数也成立.

特别地，如果 $|z|=1$，则由式(1.1.23)可以得到

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{1.1.24}$$

这就是著名的棣莫弗(De Moivre)公式.

式(1.1.23)写成指数形式为

$$(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \tag{1.1.25}$$

从式(1.1.23)和式(1.1.25)可以看出，复数的三角表示式或指数表示式在处理乘幂运算时较代数表示式更为方便.

例 1.1.9 计算 $(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^9$.

解 先将 $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 化为三角表示式，

$$-\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

所以

$$(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^9 = 2^9\left[\cos\left(9\times\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(9\times\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -512\mathrm{i}.$$

对于给定的复数 z，满足方程 $w^n=z$ 的复数 w 称为 z 的 n 次方根，记作 $\sqrt[n]{z}$，即 $w=\sqrt[n]{z}$.

一般地，已知复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\neq 0$，为求出 w，令 $w=\rho(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)$，由 $w^n=z$ 可知

$$\rho^n(\cos n\phi+\mathrm{i}\sin n\phi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

于是

$$\rho^n=r,\quad n\phi=\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

即

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \phi=\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

所以

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

当 k 依次取 $0,1,\cdots,n-1$ 时,可以得到 w 的 n 个不同的值.考虑到正弦余弦是周期为 2π 的函数,所以当 k 取其他整数时将重复上述 n 个值.因此,非零复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$ 共有 n 个不同的值,分别为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1,\tag{1.1.26}$$

其中 $\sqrt[n]{r}$ 为正数 r 在实数范围内开 n 次方.

复数的 n 次方根用指数表示式可表示为

$$\sqrt[n]{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.\tag{1.1.27}$$

从几何上不难看出,$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值是以原点为圆心,$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1.1.10 求 $\sqrt[3]{1}$.

解 因为 $1=\cos0+\mathrm{i}\sin0$,所以

$$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3},\quad k=0,1,2.$$

将 $k=0,1,2$ 依次代入,可以得到 $\sqrt[3]{1}$ 的三个不同的值,分别为

$$w_0=1,\quad w_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\quad w_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

例 1.1.11 在复数范围内解下列方程:

(1) $z^2+2z+3=0$; (2) $z^3+8=0$.

解 (1) 根据二次方程的求根公式以及 $\sqrt{-1}=\pm\mathrm{i}$ 可知,原方程的两个根为

$$z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i},$$