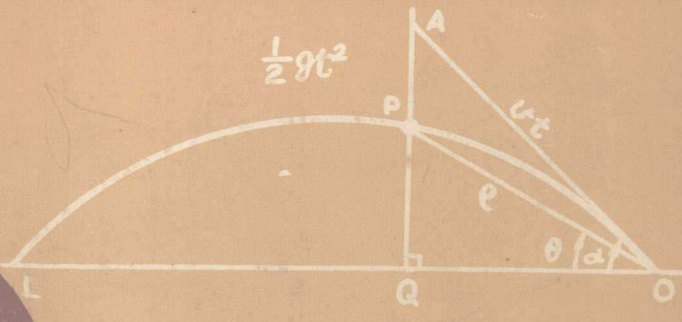
高中数学自测训练

三角

编著者：《高中数学自测训练》编写组



$$\frac{vt}{\sin(90^\circ+\theta)}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{\sin(\alpha-\theta)}$$

$$=\frac{\rho}{\sin(90^\circ-\alpha)}$$

$$\rho=\frac{2v^2\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)}{g\cos^2\theta}$$

上海翻译出版公司

高中数学自测训练

三　角

顾　问　苏步青
主　编　黄松年
编著者　《高中数学自测训练》编写组

上海翻译出版公司
1991年

内容提要

本书是结合高中数学(平面三角)课内外学习的自测练习读物，按教材每的章节单元来撰写的，完全和课堂教学同步。每节单元有【内容提要】和典型性【范例】，有及时帮助领会课内知识的【想想练练】，有针对实际使知识、能力得到巩固、熟练和运用的【自测练习题】，在每章结束时，还有对全章内容的【复习】和【自我测试题】，便于读者针对自己学习水平进行评估。

本书完全根据高中数学(平面三角)的教学大纲及教材的内容和体系撰写的。所精选的范例习题既与教材同步又不和教材重复。本书将伴随着教师的教和学生的学，系统地循序渐进地对学生进行知识和能力的培养，是有利于促进教学质量提高的好读物。

高中数学自测训练

三　角

顾问　苏步青

主编　黄松年

《高中数学自测训练》编写组编

上海翻译出版公司

复兴中路 597 号　邮政编码 200020

新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 9　字数 230,000

1991 年 8 月第 1 版　1991 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—15,000

ISBN7-80514-684-5/O·88　定价：3.10 元

前　言

数学是一门基础学科，全面提高学生的数学水平，是大家极为关注的问题。为了适应不同层次和不同水平的学生课内外学习的需要，我们特编著一套《高中数学自测训练》，敦请数学界老前辈、著名数学家苏步青教授为顾问，邀请长期从事高中数学教学工作并有丰富经验的上海市著名中学数学教师、特级教师、高级教师等10余人组成编写组，由黄松年同志为主编，撰写《代数》、《几何》(包括立体几何和解析几何)、《三角》和《高中数学综合训练》四册。在编写前，集大家的智慧和经验，多次讨论编写意图、编写提纲和编写方式，为了与现行课本和课堂教学完全同步，特按每篇章的节单元编写。

在每章的开始，先有【学习导引】，扼要叙述本章的知识结构、能力要求、教材的重点、难点和关键。然后按节单元撰写，每节有【内容提要】简述本节的知识内容、有关的思想方法和应注意的问题；【范例】针对本节的知识结构与能力要求精编典型例题，范例中一般有“分析”——研究解题思路；“解法”——由因导果叙述解题过程；“说明”——揭示解题规律和思想方法，剖析常见的错误。【想想练练】主要用以巩固基本概念、掌握基本技能、提高学习兴趣。【自测练习题】是用以配合教材、加强基础、发展智力、培养能力的练习题，题型新颖、灵活、多样。其中A组题是由一些对双基的理解、掌握和简单应用的形成性的基础题所组成，通过对本组题的训练，以求达到高中毕业数学的合格水平，并力求培养学生的学习毅力和信心，在知识与能力上步入“懂”和“会”的境界，对学习后进的学生如同雪中送炭。B组题是由一些对双基和能力综合应用的总结性的提高题所组成，通过本组题的训练，以求达到高中毕业数学学习的优秀水平，并力求激发学生的刻苦钻研精神，使之对知识与能力能灵活运用、融会贯通，进入“熟”和“活”的境界，对基础较好的学生如同锦上添花。在每章后面，有对本章知识与能力进行简单小结的【复习】，最后还配备了对本章教学内容进行学习效果检查的【自我测试题】，也分A、B两组，A组着重基础测试，B组则予以适当提高，供不同层次和水平的学生进行自我评估。因此本书的出版将伴随高中师生顺利地完成数学教学任务。

《三角》分册，内容包括有：第一章三角函数，由顾鸿达同志撰写；第二章两角和与差的三角函数、第三章反三角函数和简单三角方程，均由邵龙章同志撰写。顾慧娟同志对有关章的习题进行了核查。石壘同志和周国华同志分别对某些章节进行了审读。顾鸿达同志对全书进行了统稿和审读，黄松年同志对全书进行了审定。

本编写组顾问、著名数学家苏步青教授，长期以来对中小学基础教育十分关注，对本套书的编写给予热情的支持，在编写思想和编写方式等方面曾提出既中肯又精辟的建议，给编写组全体同志以莫大的鼓励和教育，谨表示崇高的敬意和感谢。

《高中数学自测训练　三角》虽经编写组认真编写，但限于水平，肯定有不足之处，敬希广大读者予以指正。

《高中数学自测训练》编写组

1990年9月

目　　录

第一章　三　角　函　数

一、任意角的三角函数……1
1．角的概念的推广……1
2．弧度制……4
3．任意角的三角函数……8
4．同角三角函数的基本关系式……13
5．诱导公式……20
6．已知三角函数值求角……24
二、三角函数的图象和性质……29
7．用单位圆中的线段表示三角函数值……29
8．正弦函数、余弦函数的图象和性质……32
9．函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象……39
10．正切函数、余切函数的图象和性质……44
11．小结……48

第二章　两角和与差的三角函数

1．两角和与差的三角函数……52
2．二倍角的正弦、余弦、正切……58
3．半角的正弦、余弦和正切……65
4．三角函数的积化和差与和差化积……71
5．小结……79

第三章　反三角函数和简单三角方程

一、反三角函数……85
1．反正弦函数……85
2．反余弦函数……89
3．反正切函数……95
4．反余切函数……99
5．小结……103
二、简单三角方程……108
6．最简单的三角方程……108
7．简单的三角方程……110
8．简单三角不等式……115
9．小结……120
附　答案……125

第一章 三角函数

【学习导引】

1．三角函数是一种重要的基本初等函数，它是中学数学的重要内容之一，也是进一步学习高等数学和其它自然科学的基础。

2．本章是通过角概念的扩充、角的弧度制的建立，利用坐标法和有向线段的比定义了三角函数，然后再研究正弦、余弦、正切和余切等三角函数的图象与性质。

3．三角函数的恒等变形在中学数学中有着很重要的地位。如果把三角函数式中的三角函数看作一个字母，那么代数中所有公式、法则都可以用到三角的恒等变形中去，随着同角三角函数关系与诱导公式等的建立，使三角恒等变形的内容、方法和技巧更为丰富。

4．理解三角函数的定义，熟练掌握同角三角函数关系、诱导公式，熟练记忆必要的一些特殊角的三角函数值，这是学好三角内容的关键。

一、任意角的三角函数

1．角的概念的推广

【内容提要】

1．角的形成：如图 1-1，一条射线由原来的位置 OA，绕着它的端点 O，按逆时针方向旋转到另一位置 OB，就形成角 α。旋转开始时的射线 OA 叫做角 α 的始边，旋转终止时的射线 OB 叫做角 α 的终边，射线的端点 O 叫做角 α 的顶点。

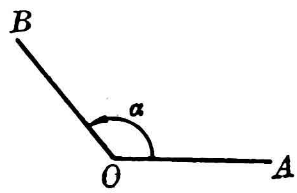


图 1-1

2．把按逆时针方向旋转、按顺时针方向旋转和不作任何旋转所形成的角分别叫做正角、负角和零角。

3．使角的顶点与坐标原点重合，角的始边在 x 轴的正半轴上，那么当角的终边在第几象限，就称这个角是第几象限的角。

4．所有与 α 角终边相同的角，连同 α 角在内，可以用式子 $k\cdot 360°+\alpha$，$k\in Z$ 来表示，也可用集合表示为 $\{\beta|\beta=k\cdot 360°+\alpha, k\in Z\}$。

【范例】

例 1 在与 $-60°$ 角终边相同的角集合 S 中，求：(1) 在 $0°\sim 360°$ 间的角 β；(2) 在 $-720°\sim 0°$ 间的角 γ；(3) 集合 S 中的最大负角 θ。

解：(1) ∵ $S=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°-60°, k\in Z\}$，又 $300°=1\cdot 360°-60°$，$0°\leqslant 300°<360°$，∴ $\beta=300°$。

(2) 由 $-720°\leqslant k\cdot 360°-60°<0°$, $k\in Z$

解得 $-\frac{11}{6}\leqslant k<\frac{1}{6}$, $\therefore$ $k=-1$, 0。

于是 $\gamma_1=-1\cdot 360°-60°=-420°$, $\gamma_2=0\cdot 360°-60°=-60°$。

(3) 由 $k\cdot 360°-60°<0°$, $k\in Z$, 得 $k<\frac{1}{6}$。

故k可取最大整数是0,集合 S 中的最大负角 $\theta=0\cdot 360°-60°=-60°$。

说明:(1) 在 0°～360° 间的 β 角,根据教材规定,是指 $0°\leqslant\beta<360°$,一般地,在 θ_1～θ_2 ($\theta_1<\theta_2$) 间的 α 角是指 $\theta_1\leqslant\alpha<\theta_2$。(2)要掌握终边相同的角的表达式,并能根据条件列方程或不等式来解题。

例 2 试用集合形式分别表示"第一象限的角","锐角","在 0°～90° 间的角","小于 90° 的角"。

解:第一象限的角的集合表示是 $\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,\ k\in Z\}$; 锐角的集合表示是 $\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$; 在0°～90°间的角的集合表示是 $\{\alpha|0°\leqslant\alpha<90°\}$;小于 90° 的角的集合表示是 $\{\alpha|\alpha<90°\}$。

说明:由上述解可见,它们是不同的概念,在以后解题中不可相混,还应注意到锐角是小于 90° 的角、是第一象限的角、是 0°～90° 间的角,但反过来就不一定了。

例 3 写出终边在坐标轴上的角的集合。

解:$\{\alpha|\alpha=k\cdot 90°,\ k\in Z\}$。

说明:(1) 终边在x轴的正半轴、负半轴上所有角分别是 $k\cdot 360°$, $k\cdot 360°+180°$, $k\in Z$;也可归并表示成$k\cdot 180°$,$k\in Z$。(2) 终边在y轴的正半轴、负半轴上所有角分别是 $k\cdot 360°+90°$, $k\cdot 360°+270°$, $k\in Z$;也可归并表示成 $k\cdot 180°+90°$, $k\in Z$。(3) 终边在坐标轴上的所有角的集合也可表示成 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°$, 或 $k\cdot 360°+90°$, 或 $k\cdot 360°+180°$, 或 $k\cdot 360°+270°$, $k\in Z\}$, 或 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°$, 或 $k\cdot 180°+90°$, $k\in Z\}$。

例 4 若α是第二象限角,求:$\frac{\alpha}{2}$角所在象限及 2α 角所在范围。

解:$\because$ $k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°$, $k\in Z$,

$\therefore$ $k\cdot 180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+90°$, $k\in Z$。

当上式中k取不同整数,如 0, 1, 2, …时,$\frac{\alpha}{2}$角所在位置 如图 1-2 所示,故$\frac{\alpha}{2}$角是第一或第三象限的角。

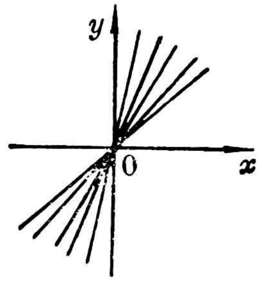
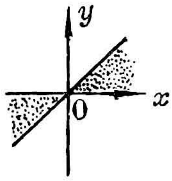
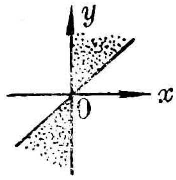
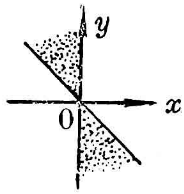
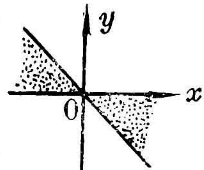


图 1-2

而 2α 角的范围是 $k\cdot720°+180°<2\alpha<k\cdot720°+360°$, $k\in Z$。

说明：（1）用上述方法可得如下规律；（2）本例求得的 2α 所在范围不能答成是第一象限或第二象限的角，因为还有终边在 y 轴负半轴上的角 $k\cdot720°+270°$，$k\in Z$也是它的解。

已知 α 角所在象限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
则 $\frac{\alpha}{2}$ 角所在象限	Ⅰ 或 Ⅲ	Ⅰ 或 Ⅲ	Ⅱ 或 Ⅳ	Ⅱ 或 Ⅳ
简图				

【想想练练】

1．与 1000° 角终边相同的角可表示成 ____，它是第 ____ 象限的角，其中最小的正角是 ____，最大的负角是____。

2．终边在二，四象限角平分线上的角 α 的集合是____。

3．设 α 是锐角，当 $k\in Z$ 时，$k\cdot360°+\alpha$，$k\cdot360°-\alpha$，$k\cdot180°+\alpha$，$k\cdot180°-\alpha$，分别是哪个象限的角？

4．第二象限的角是钝角吗？

5．终边相同的角必相等吗？

6．三角形的内角必是第一象限或第二象限的角吗？

7．一昼夜时针、分针各转了多少度？

【自测练习题】

A 组

1．选择题

（1）四个角的大小分别是 ①160°；②480°；③－960°；④－1600°，其中在第二象限的角是 （ ）

（A）①；（B）①、②；（C）①、②、③；（D）①、②、③、④。

（2）若角 α 是第三象限的角，当其终边再按顺时针方向旋转 630° 后，角 α 是 （ ）

（A）第一象限的角；（B）第二象限的角；（C）第三象限的角；（D）第四象限的角。

（3）若角 α 与 β 都以坐标原点为顶点，以 Ox 轴的正向为始边，而终边互为反向延长线，则 α 与 β 之间的关系是 （ ）

(A) $\alpha=-\beta$;　　　　　　　　　　(B) $\alpha=180°+\beta$;
(C) $\alpha=(2k+1)\cdot180°+\beta$, $k\in Z$;　　(D) $\alpha=k\cdot180°+\beta$,　$k\in Z$。

2. 已知地球半径为 6370 公里，求赤道上 1° 的弧的长与 1′ 的弧的长（精确到 0.001 公里）。

3. 将 $-600°$ 化成 $k\cdot360°+n°$, $k\in Z$ 的形式,并求使 $k\cdot360°+n°$ 所表示的角的绝对值大小为最小的那个角。

4. 已知 θ 是第二象限的角，求 $-\theta$ 与 $-\dfrac{\theta}{2}$ 所在象限。

B 组

1. 大齿轮有 48 齿,小齿轮有 20 齿,两个齿轮啮合在一起,当大齿轮转过一周时，小齿轮转过多少角度?

2. 航海罗盘的圆周分成 32 等分,每一等分称为 1 个罗径,求 1 个罗径合几度几分?

3. 若角 α 与 β 都以坐标原点为顶点,以 Ox 轴正向为始边,而终边关于 x 轴对称，求角 α 和 β 间的关系。

4. 若角 α 的终边绕顺时针方向旋转半周后的角的大小是角 α 的 2 倍,求角 α。

5. 设动射线 OP, OP' 同时由始边 Ox 的位置出发，OP 按正向每秒旋转 50°，OP' 按负向每秒旋转 40°，(1) 问两条动直线,每隔几秒重合一次?(2)问几秒钟后两条动直线在始边 Ox 的位置上再次重合。

2. 弧 度 制

【内容提要】

1. 把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角。

2. 规定正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零。

3. 任一已知角的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$，其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对圆弧的长，r 为圆的半径。

4. 用度做单位来度量角的制度叫角度制,用弧度做单位来度量角的制度叫弧度制。对于同一个角当分别用弧度和度的单位来度量时,它们之间的换算关系是

$360°=2\pi$ 弧度；　$180°=\pi$ 弧度；$1°=\dfrac{\pi}{180}$弧度≈0.01745 弧度；

$$1\text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx57°18'。$$

5. 在弧度制下,角的集合与实数集 R 之间可以建立一一对应关系。

6. 半径为 R, 圆心角为 α 弧度的扇形,圆心角所对弧的弧长 $l=|\alpha|\cdot R$, 扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot R^2。$$

【范例】

例 1 将 $-72°$ 角化成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,\ k\in Z)$ 的形式，并用弧度形式写出与 $-72°$ 终边相同角的集合 S。

解：∵ $1°=\dfrac{\pi}{180}$弧度，　∴ $-72°=\dfrac{\pi}{180}$弧度$\times(-72)=-\dfrac{2\pi}{5}$弧度。

于是
$$-\frac{2\pi}{5}=-2\pi+\frac{8\pi}{5}\quad\left(\text{其中 } k=-1,\ \alpha=\frac{8\pi}{5}\right)。$$

∴
$$S=\left\{\beta\,|\,\beta=2k\pi+\frac{8\pi}{5},\ k\in Z\right\}。$$

例 2 若 α 是第二象限的角，判定下列各角所在的象限：(1) $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$；(2) $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$；(3) $\alpha-\pi$；(4) $2\pi-\alpha$。

解：(1) $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$的角是把第二象限的角 α 的终边向逆时针方向旋转$\dfrac{\pi}{2}$弧度，到第三象限，所以 $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$是第三象限的角。

(2) $-\alpha$ 角是和 α 角大小相同，方向相反的角，故当 α 是第二象限角时，$-\alpha$ 是第三象限角，再向逆时针方向旋转$\dfrac{\pi}{2}$弧度，得$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 是第四象限的角。

(3) $\alpha-\pi$ 是第四象限的角。

(4) $2\pi-\alpha$与$-\alpha$ 是终边相同的角，由(2)知 $-\alpha$ 是第三象限的角，故 $2\pi-\alpha$ 是第三象限的角。

说明：本题也可用不等式来解。

由题设，设 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$，$k\in Z$。

故得　$2k\pi+\pi<\alpha+\dfrac{\pi}{2}<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in Z$；　$-2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-\alpha<-2k\pi$，$k\in Z$；

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}<\alpha-\pi<2k\pi,\ k\in Z;\quad -2k\pi+\pi<2\pi-\alpha<-2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ k\in Z。$$

于是，得　$\alpha+\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$\alpha-\pi$，$2\pi-\alpha$ 分别是第三、第四、第四、第三象限的角。

例 3 如图 1-3 中已知扇形OAB，$OA=8$cm，$\overset{\frown}{AB}=12$cm，(1) 求$\angle AOB$的弧度数和度数；(2) 求扇形 OAB 的面积；(3) 求弓形 AMB 的面积(精确到 0.01cm²)。

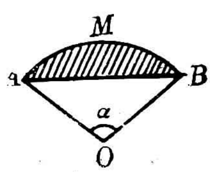


图 1-3

解：(1) $\alpha=\dfrac{l}{R}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{OA}=\dfrac{3}{2}$弧度。∵ 1 弧度$=57.3°$，

$\therefore \quad \alpha=57.3°\times\frac{3}{2}=85.95°$。

(2) $S_{扇形OAB}=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\times12\times8=48(cm^2)$。

(3) $\because \quad S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha, \quad S_{扇形}=\frac{1}{2}R^2\alpha,$

$$\therefore \quad S_{弓形AMB}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}R^2\alpha-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\times8^2\times\left(\frac{3}{2}-\sin\frac{3}{2}\right)\approx16.08(cm^2)。$$

例 4 求时钟在 3 点 43 分 15 秒时的时针与分针的夹角的度数和弧度数。

解：选取 12 点处作时针和分针的起始点，分针从 12 点处旋转到 43 分 15 秒处走过角度为 $\frac{360°}{60}\times\left(43+\frac{15}{60}\right)=259°30'$，由于时针旋转速度是分针的$\frac{1}{12}$，因此时针从 12 点处到 3 点 43 分 15 秒共走角度为 $\frac{360°}{12}\times3+\frac{1}{12}\times259°30'=111°37'30''$，故两针夹角为 $259°30'-111°37'30''=147°52'30''$，化为弧度 $147°52'30''\times\frac{\pi}{180}\approx2.58$(弧度)。

例 5 已知一扇形的周长为 $c(c>0)$，当扇形的中心角为多大时，它有最大的面积？

解：设扇形半径为 R，中心角为 α，扇形的面积为 S，则

$$c=2R+\alpha R, \qquad R=\frac{c}{2+\alpha}, \qquad S=\frac{1}{2}R^2\alpha=\frac{c^2\alpha}{2\alpha^2+8\alpha+8},$$

$$2S\alpha^2+(8S-c^2)\alpha+8S=0, \tag{①}$$

由 $S\neq0$ 及 $\triangle\geqslant0$，得 $16Sc^2-c^4\leqslant0$，

$$\because \quad c\neq0, \qquad \therefore \quad S\leqslant\frac{c^2}{16}。$$

即 S 有最大面积$\frac{c^2}{16}$，将 $S=\frac{c^2}{16}$代入①，解得 $\alpha=2$，故当扇形中心角为 2 弧度时，扇形有最大面积$\frac{c^2}{16}$。

【想想练练】

1．什么叫做 1 弧度的角？你能否画一个大小为 1 弧度的角？

2．下列各度分别是多少弧度？

15°，18°，20°，30°，36°，45°，48°，60°，75°，120°，135°，150°，225°，240°，300°，315°，330°，345°。

3．下列各弧度分别是多少度？

$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{5}$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{8}$，$\frac{\pi}{9}$，$\frac{\pi}{10}$，$\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{15}$，$\frac{\pi}{18}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{5}$，$\frac{7\pi}{6}$，$\frac{3\pi}{8}$，$\frac{5\pi}{12}$，

$\frac{7\pi}{18}$，$\frac{7\pi}{3}$。

4．在同一个圆中，设 1 弧度圆心角所对的弧长为 l，$\frac{\pi}{3}$弧度的圆心角所对弦长为 a，问 l 与 a 哪个长？

5．把下列各角化成 $2k\pi+\alpha$（$0\leqslant\alpha<2\pi$，$k\in Z$）的形式：

(1) $-\frac{\pi}{3}$；(2) -4π；(3) $480°$；(4) $-100°$

6．已知扇形的半径 $R=1\text{cm}$，圆心角为 1.5 弧度，求这扇形的弧长、周长和面积。

【自测练习题】

A 组

1．填充题：

(1) $90°=$____弧度；(2) $22°30'=$____弧度；(3) $255°=$____弧度；(4) $-144°=$____弧度；(5) -8π 弧度$=$____度；(6) $\frac{7\pi}{18}$弧度$=$____度；(7) $\frac{2\pi}{7}$ 弧度$=$____度；(8) 6 弧度$=$____度。

2．(1) 若三角形三内角之比是 1:2:3，求这三内角的弧度数；

(2) 若三角形的最大内角比第二大的内角大 1 弧度，第二大的内角比最小内角也大 1 弧度，求这三内角的弧度数。

3．若正 n 边形的一个内角比正 $n+2$ 边形的一个内角小 $\frac{\pi}{30}$ 弧度，求 n。

4．用弧度制表示：第二象限角 α 的集合；终边在上半面的角 β 的集合。

5．半径为 1 的圆上一段圆弧所对弦长为 1，求该弦所对应的弧的弧长。

6．求下列各三角函数的值：

(1) $\sin\frac{\pi}{4}$；(2) $\cos\frac{3\pi}{4}$；(3) $\text{tg}\frac{\pi}{6}$；(4) $\text{ctg}\frac{\pi}{3}$；

(5) $\sin\frac{2\pi}{3}$；(6) $\cos\frac{\pi}{3}$；(7) $\text{tg}\frac{\pi}{4}$；(8) $\text{ctg}\frac{\pi}{6}$。

B 组

1．选择题：

(1) 使角 α 的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，则角 α 与角 $\pi+\alpha$ 的终边的位置关系是（其中 $\alpha\neq\frac{1}{2}k\pi, k\in Z$）　　（　）

(A) 关于 x 轴成对称；　　(B) 关于 y 轴成对称；

(C) 关于原点 O 成对称；　　(D) 随角 α 的变化有不同的对称性。

(2) 若以原点为角的顶点，以 x 轴正半轴为角的始边，则终边关于 y 轴成对称的两个角是　　（　）

(A) $2k\pi+\alpha$ 与 $2k\pi-\alpha$，$k\in Z$；　　(B) $2k\pi+\alpha$ 与 $2k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$，$k\in Z$；

(C) $2k\pi+\alpha$ 与 $2k\pi+\pi-\alpha$, $k\in Z$; (D) $2k\pi+\alpha$ 与 $2k\pi-\pi+\alpha$, $k\in Z$。

(3) 用弧度制表示终边在 y 轴上的角的集合,正确的是 ( )

(A) $\{\beta|\beta=k\pi,\ k\in Z\}$; (B) $\{\beta|\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\}$;

(C) $\{\beta|\beta=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in Z\}$; (D) $\{\beta|\beta=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\}$。

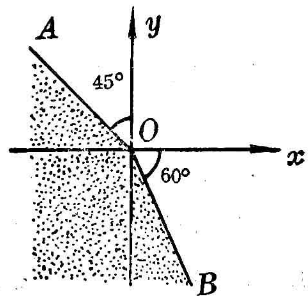
2. 设角 α、β 间有关系式 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,试确定 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ 的范围。

3. 在 $\triangle ABC$ 中,试证明:

(1) 若 $\angle A$ 是最大的内角,则 $\frac{\pi}{3}\leqslant A<\pi$;

(2) 若 $\angle A$ 是第二大的角,则 $0<A<\frac{\pi}{2}$;

(3) 若 $\angle A$ 是最小的内角,则 $0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$。



(第 4 题)

4. 试用弧度制表示终边位置在图中影阴部分中的角 α 的集合 S(终边包括在 OA、OB 的位置)。

5. 一点二十分,时针与分针所夹的角是多少弧度?

6. 中心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形,它的弧长为 4π,求它的内切圆的半径。

3. 任意角的三角函数

【内容提要】

1. 三角函数的定义

设角 α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y),它与原点的距离是 $r(r>0)$,那么角 α 的**正弦**、**余弦**、**正切**、**余切**、**正割**、**余割**分别是

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\ (\alpha\in R),\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},\ (\alpha\in R),$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\ (\alpha\in R,\text{且 }\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z),$$

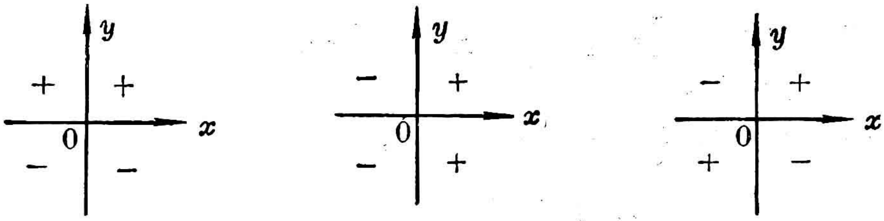
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\ (\alpha\in R,\text{且 }\alpha\neq k\pi,k\in Z),$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},(\alpha\in R,\text{且 }\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z),$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y},\ (\alpha\in R,\text{且 }\alpha\neq k\pi,k\in Z)。$$

它们都是以角为自变量,以比值为函数值的函数,这些函数都叫做三角函数。

2. 各三角函数值在每个象限的符号如图 1-4 所示。



sin α, csc α　　　　cos α, sec α　　　　tg α, ctg α

图 1-4

3．终边相同的角的同一三角函数的值相等，即

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha;\qquad \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha;\qquad \operatorname{ctg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,$$

其中 $k\in Z$。

【范例】

例 1　已知角 α 终边上一点 $P(-a,\sqrt{3}a)$，$a<0$，求 α 的六个三角函数值。

解：$\because$　$x=-a$，$y=\sqrt{3}a$，又 $a<0$，$\therefore$　$r=\sqrt{x^2+y^2}=2|a|=-2a$。
根据任意角的三角函数定义，得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-\sqrt{3},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=2,\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}。$$

例 2　利用三角函数的定义，求关于 210° 的六个三角函数值。

解：如图 1-5 画 210° 角，设终边为 OP，在 OP 上取 $|OP|=1$，过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M，则在 $Rt\triangle OPM$ 中，$\angle MOP=30°$，$|MP|=\frac{1}{2}$，$|OM|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故点 P 坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$。根据任意角的三角函数定义，得

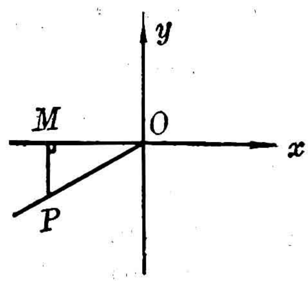


图 1-5

$$\sin210°=-\frac{1}{2},\ \cos210°=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}210°=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}210°=\sqrt{3},\quad \sec210°=-\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\csc210°=-2。$$

例 3　求下列函数的定义域：

(1)　$y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$；　(2)　$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\cos x}$；

(3)　$y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$。

解：(1) ∵ $\begin{cases} x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, \\ x\neq k\pi, \end{cases}$ $k\in Z$。 ∴ $x\neq\dfrac{1}{2}n\pi$，$n\in Z$。

即 函数y的定义域是 $\left\{x \mid x\neq\dfrac{1}{2}n\pi,\ n\in Z\right\}$。

(2) ∵ $\begin{cases}\sin x\geqslant 0 & ① \\ -\cos x\geqslant 0 & ②\end{cases}$

由①，得 $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi$，$k\in Z$； 由②，得 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in Z$。

$$\therefore\quad 2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\ k\in Z。$$

即函数y的定义域是 $\left\{x \,\middle|\, 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\ k\in Z\right\}$。

(3) 由 $2x-\dfrac{\pi}{4}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$， 得 $2x\neq k\pi+\dfrac{3\pi}{4}$， $x\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{8}$，$k\in Z$。

∴ 函数y的定义域是 $\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{8},\ k\in Z\right\}$。

例 4 确定下列各式的符号：

(1) $\sin\dfrac{8\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{11\pi}{10}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{3}$； (2) $\sin 4\cdot\cos 3\cdot\operatorname{ctg} 5$。

分析：要求上式的符号，只须求出乘积式中每个因式的符号。

解：(1) ∵ $\pi<\dfrac{11\pi}{10}<\dfrac{8\pi}{7}<\dfrac{3\pi}{2}$，∴ $\sin\dfrac{8\pi}{7}<0$，$\cos\dfrac{11\pi}{10}<0$。 ∵ $\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{5\pi}{3}<2\pi$，

∴ $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{3}<0$。

于是得 $\sin\dfrac{8\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{11\pi}{10}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{3}$ 的符号为负。

(2) ∵ $\pi<4<\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<3<\pi$，$\dfrac{3\pi}{2}<5<2\pi$， ∴ $\sin 4<0$，$\cos 3<0$，$\operatorname{ctg} 5<0$。于是得 $\sin 4\cdot\cos 3\cdot\operatorname{ctg} 5$ 的符号为负。

例 5 若$\cos\theta\cdot\operatorname{ctg}\theta<0$，试确定角$\theta$所在象限。

解：当 $\cos\theta\cdot\operatorname{ctg}\theta<0$ 时，有两种情形：

(i) $\cos\theta>0$，且 $\operatorname{ctg}\theta<0$， 此时$\theta$是第四象限的角； (ii) $\cos\theta<0$，且 $\operatorname{ctg}\theta>0$。此时$\theta$是第三象限的角。

综合(i)、(ii)，θ是第三象限或第四象限的角。

例 6 计算：

$$\cos 1080°+\sin(-690°)-\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3}+\operatorname{ctg}\left(-\frac{15\pi}{4}\right)。$$

分析：利用终边相同的角的三角函数值相等的公式，把上述各项转化成 0°～180° 或 0～π 间的角的三角函数，然后再求它们的值。

解：原式$=\cos(3\times 360°)+\sin(-2\times 360°+30°)-\operatorname{tg}\left(3\times 2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$
$+\operatorname{ctg}\left(-2\times 2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$=\cos 0^\circ+\sin 30^\circ-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{2}-\sqrt{3}+1=\frac{5}{2}-\sqrt{3}。$$

【想想练练】

1．将角 α 的三角函数值填入表内：

α \ 函数	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$									
$\operatorname{ctg}\alpha$									

2．若角 α 的终边过点 $P(a,b)$ $(ab\neq0)$，则 $\sin\alpha=$____，$\cos\alpha=$____，$\operatorname{tg}\alpha=$____，$\operatorname{ctg}\alpha=$____。

3．确定下列各式的符号：

(1) $\sin500^\circ\cdot\cos500^\circ$；　(2) $\operatorname{tg}460^\circ+\operatorname{ctg}460^\circ$；

(3) $\cos\frac{14\pi}{5}+\cos\frac{16\pi}{5}$；　(4) $\sin2+\sin3+\operatorname{tg}4$。

4．计算：

(1) $\sin1200^\circ$；　(2) $\cos(-1020^\circ)$；　(3) $\operatorname{tg}2.25\pi$；　(4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$。

5．求下列函数的定义域：

(1) $y=\sin\frac{1}{x}$；　(2) $y=\frac{1}{\sin x}$；　(3) $y=\operatorname{tg}2x$；　(4) $y=\sqrt{\cos x}$。

【自测练习题】

A 组

1．填充题：

(1) 若角 α 的终边过点 $P(a,a)$ $(a\neq0)$，则 $\sin\alpha=$____，$\cos\alpha=$____，$\operatorname{tg}\alpha=$____，$\operatorname{ctg}\alpha=$____；

(2) 若角 α 的终边过点 $P(a,0)$ $(a<0)$，则 $\sin\alpha=$____，$\cos\alpha=$____，$\operatorname{tg}\alpha=$____，$\operatorname{ctg}\alpha=$____；

(3) 若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，且角 α 的终边经过点 $P(-1,y)$，则角 α 是第____象限的角，点 P 的纵坐标 $y=$____，$\cos\alpha=$____，$\operatorname{tg}\alpha=$____；

(4) 若 $\sin\alpha>0$，$\operatorname{tg}\alpha<0$，则 α 是第____象限的角；

(5) 若 $\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha<0$，则 α 是第____象限的角。

2．确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\sin 5110°$； (2) $\operatorname{tg} 510° \cdot \cos 112°$；

(3) $\sin 12 \cdot \cos(-3)$； (4) $\operatorname{tg} 6 \cdot \operatorname{ctg} 15$。

3．求下列各三角函数的值：

(1) $\sin 420° + \cos 510°$； (2) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\cos\frac{21\pi}{4}$；

(3) $\operatorname{tg}(-660°) - \operatorname{ctg} 780°$； (4) $\cos 12\pi \cdot \operatorname{tg}(-11.75\pi)$；

(5) $\sin\frac{1}{2} + \cos 40$； (6) $\operatorname{tg} 20 + \operatorname{ctg} 0.2$。

4．求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{-\sin x}$； (2) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$； (3) $y=\lg(\cos x)$； (4) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos x}}$。

B 组

1．选择题：

(1) 使角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的正半轴重合，若角 α 终边上有一点 $P(0, -3)$，那么角 α （ ）

(A) 在第三象限； (B) 在第四象限；

(C) 在第三象限或第四象限； (D) 既不在第三象限，也不在第四象限。

(2) 若角 α 的终边上有一点 $P(3a, -4a)$，$(a<0)$，则 $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ 的值是 （ ）

(A) $\frac{16}{15}$； (B) $\frac{15}{16}$； (C) $-\frac{16}{15}$； (D) $-\frac{15}{16}$。

(3) 使式子 $\log_6 \operatorname{tg} x + (-\cos x)^{-\frac{1}{2}}$ 有意义的 x 的取值范围是 （ ）

(A) $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，$k \in Z$； (B) $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \pi$，$k \in Z$；

(C) $2k\pi + \pi < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$，$k \in Z$； (D) $2k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi$，$k \in Z$。

(4) 使 $|\operatorname{tg}(-x)| = \operatorname{tg}(-x)$ 与 $|\cos(-x)| = \cos(-x)$ 成立的角 x 所在取值范围是 （ ）

(A) $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，$k \in Z$； (B) $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \pi$，$k \in Z$；

(C) $2k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi$，$k \in Z$； (D) $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x \leqslant 2k\pi$，$k \in Z$。

2．(1) $\sin\theta > 0$，且 $\cos\theta < 0$，θ 是第____象限的角；

(2) $\operatorname{tg}\theta < 0$，且 $\sec\theta > 0$，θ 是第____象限的角；

(3) $\cos\theta$ 与 $\operatorname{tg}\theta$ 同号，θ 是第____象限的角；

(4) $\csc\theta$ 与 $\operatorname{tg}\theta$ 异号，θ 是第____象限的角。

3．若角 α 的终边经过直线 $x+4y-3=0$ 和直线 $2x-y+3=0$ 的交点，求角 α 的各三