韩其智　孙洪洲　编著

群论

北京大学出版社

群　论

韩其智　孙洪洲　编著

北京大学出版社

群　　论

韩其智　孙洪洲编著

责任编辑：周月梅

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

850×1168毫米　32开本　11印张　270千字

1987年2月第一版　1988年10月第二次印刷

印数：8001－20,000册

ISBN 7-301-00643/8/O·119

定价：2.65元

内 容 提 要

本书结合实例讲述了群和群表示基础、点群、转动群、对称群和酉群的有关理论，并介绍了李群和李代数基础、李代数的表示以及求李代数不可约表示的张量基方法等。

本书可作为物理系高年级学生和研究生群论课的教材，也可供物理工作者参考。

序

作者通过多年在北京大学物理系讲授高年级和研究生的群论课，深感需要一本合适的群论教材。本书是在多次编写讲义的基础上，并考虑到群论的一些新的应用和发展而写成的。

书的前半部分，即第一章到第五章，可以作为物理系研究生必修课的教材。第一、二章给出了群论和群表示论的基础。第三、四、五章中讲述的点群、转动群、对称群和酉群，不仅对理论物理工作者是必需的，而且对实验物理工作者也是重要的。在讲授时可根据不同对象将其中有些定理的证明部分略去。书的后半部分，即第六章到第八章，讲述了李群、李代数及其表示等内容，可作为理论物理专业研究生群论课的补充教材，也可供理论物理工作者参考。特别是本书给出的用张量基求表示的方法，可以推广到其他李代数和李超代数中去.我们希望它能对读者有所稗益。

因为本书是针对物理系的学生和理论物理工作者而写的，因此在一般情况下不给出数学上的完整证明，而力求将有关理论阐述准确、清楚。本书在内容安排上尽量做到由浅入深、多举实例，便于学生接受。另外，由于篇幅及时间关系，本书未能把群论的应用及李超代数包括进去，实是憾事。

由于作者水平和时间的限制，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者予以指正。

最后，我们深切怀念王竹溪先生对我们的关怀，衷心感谢胡济民、杨立铭老师和高崇寿同志对本书的关心和支持。

韩其智　孙洪洲

1985年于北京

目　录

第一章　群的基本知识

二十世纪以来，特别是爱因斯坦(Einstein)发现相对论之后，对称性的研究在物理学中越来越重要。对称性帮助人们求得物理问题的解，也帮助人们去寻求新的运动规律。物理学家不仅研究了时间和空间的对称性，而且还找到了许多内部对称性。如强作用的$SU(2)$同位旋对称，$SU(3)$色和味的对称，弱电统一的$SU(2)XU(1)$的对称，偶偶核的$U(6)$动力学对称等等。从七十年代起，又开展了超对称性问题的研究。群论是研究对称性问题的数学基础，因此，它越来越受到物理学工作者的重视。

1.1　群

定义1.1　设G是一些元素的集合，$G=\{\cdots,g,\cdots,\}=\{g\}$。在$G$中定义了乘法运算。如果$G$对这种运算满足下面四个条件：

(1) 封闭性。即对任意$f,g\in G$，若$fg=h$，必有$h\in G$。

(2) 结合律。对任意$f,g,h\in G$，都有

$$(fg)h=f(gh).$$

(3) 有唯一的单位元素。有$e\in G$，对任意$f\in G$，都有

$$ef=fe=f.$$

(4) 有逆元素。对任意$f\in G$，有唯一的$f^{-1}\in G$，使

$$f^{-1}f=ff^{-1}=e,$$

则称G为一个群。e称为群G的单位元素，f^{-1}称为f的逆元素。

例1　空间反演群。

设E和I对三维实空间R^3中向量$\boldsymbol{r}$的作用为

$$E\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r},\quad I\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r},$$

即E是保持$\boldsymbol{r}$不变的恒等变换，I是使$\boldsymbol{r}$反演的反演变换。定义群的乘法为从右到左连续对$\boldsymbol{r}$作用。集合$\{E,I\}$构成反演群，其乘法表见表1.1。

表1.1　反演群乘法表

	E	I
E	E	I
I	I	E

例2　n阶置换群S_n，又称n阶对称群。将n个元素的集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$映为自身的置换为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix},$$

其中$m_1m_2\cdots m_n$是$1,2,\cdots,n$的任意排列，P表示把1映为m_1，2映为$m_2,\cdots,n$映为m_n的映射。显然置换只与每列的相对符号有关，与第一行符号的顺序无关，如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

定义两个置换P'和P的乘积$P'P$，为先实行置换P，再实行置换P'，如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

容易看出在这乘法定义下，全部n阶置换构成S_n群。S_n群共有$n!$个元素。

例3　平面正三角形对称群D_3，又称为6阶二面体群。

考虑重心在原点，底边与x轴平行的xy平面上的正三角形$\triangle ABC$，见图1.1(a)。保持正三角形不变的空间转动操作有

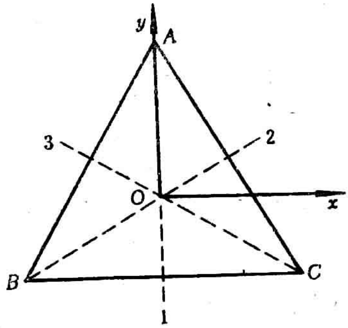
e：不转，　　　　d：绕z轴转$2\pi/3$，

f：绕z轴转$4\pi/3$，　　　　a：绕轴1转π，

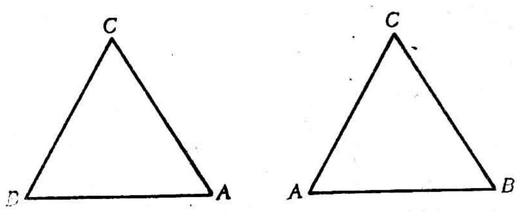
b：绕轴2转π，　　　　c：绕轴3转π。

定义两个转动操作的乘积，如ab为先实行操作b，再实行操作a。由图1.1(b)可看出，实行操作b和实行操作ab后$\triangle ABC$位

置的变化，且可看出，实行操作 ab 与实行操作 d 一样，因此 $ab=d$。在上述乘法定义下，保持正三角形不变的全体转动操作构



(a)



(b)

图 1.1

成 D_3 群。$D_3=\{e,d,f,a,b,c\}$ 是 6 阶群，它的乘法表见表1.2。

表1.2 D_3的乘法表

	e	d	f	a	b	c
e	e	d	f	a	b	c
d	d	f	e	c	a	b
f	f	e	d	b	c	a
a	a	b	c	e	d	f
b	b	c	a	f	e	d
c	c	a	b	d	f	e

例 4 定义群的乘法为数的加法，则全体整数构成一个群，0 是单位元素，n 和 $-n$ 互为逆元素。同理，全体实数在加法下也构成一个群。但实数全体在乘法为数乘时，并不构成一个群，因为 0 没有逆元素。除去 0 以外的实数构成一个群。

例 5 空间平移群 $T(3)$。设 $\boldsymbol{a}$ 是 R^3 中的向量，$\boldsymbol{r}$ 是 R^3 中任意一向量，定义空间平移 T_a 为

$$T_a\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a},$$

定义两个平移 T_a 和 T_b 的乘积 T_aT_b，为先实行平移 T_b，再实行平移 T_a，

$$T_aT_b\boldsymbol{r}=T_a(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=T_{a+b}\boldsymbol{r},$$

故

$$T_aT_b=T_{a+b}=T_bT_a.$$

$T(3)$ 群的单位元素是平移零向量，T_θ，即不平移，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 是零向量，T_a 和 T_{-a} 是互逆元素。

例 6 三维转动群 $SO(3)$。保持 R^3 中点 O 不动，设 $\boldsymbol{k}$ 是过 O 点的任一轴，绕 $\boldsymbol{k}$ 轴转 ψ 角的转动为 $C_k(\psi)$。定义两个转动 $C_k(\psi)$ 和 $C_{k'}(\psi')$ 的乘积 $C_{k'}(\psi')C_{k'}(\psi)$，为先实行绕 $\boldsymbol{k}$ 轴转 ψ 角，再实行绕 $\boldsymbol{k}'$ 轴转 ψ' 角。则绕所有过 O 点轴的一切转动构成 $SO(3)$ 群。$SO(3)$ 群的单位元素是转角 $\psi=0$，即不转。绕同一轴 $\boldsymbol{k}$，转角 ψ 和 $2\pi-\psi$ 的元素 $C_k(\psi)$，$C_k(2\pi-\psi)$ 互为逆元素。

由上述例子可以看出群的元素不但可以是数，而且可以是空间反演、空间转动、空间平移等操作，也可以是置换等等。

当群 G 的元素个数有限时，G 称为有限群。当 G 的元素个数为无限时，G 称为无限群。空间反演群、S_n 群、D_3 群是有限群，例 4 至例 6 是无限群。

有限群 G 的元素的个数 n 称为群的阶，有时记为 $n(G)$。反演群是二阶群，D_3 是 6 阶群，S_n 是 $n!$ 阶群。

群的乘法，可以是数乘和数的加法，也可以是空间反演、转动等连续两次操作和连续两次置换等等。有限群的乘法规则，可

以列为乘法表。无限群的乘法虽然不能列出乘法表，但乘法规则总是确定的。

群的乘法一般不具有可交换性。即对任意 $f,g\in G$，一般说来 fg 与 gf 并不相等。如果对任意 $f,g\in G$，有 $fg=gf$，则称 G 是可交换群或阿贝耳(Abel)群。

从前面例子还可以看出，群 G 的任何元素可以用指标 α 标记。当 G 是 n 阶有限群时，指标 α 取 $1,2,\cdots,n$，群元用 $g_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 表示。当 G 是可数的无限群时，如整数加法群，α 可以取所有整数值，$\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$。当 G 是连续的无限群时，如实数加法群，有时 α 取全体实数，有时 α 取多个有序的连续变化的实数；如在平移群中，α 是三个无界的有序实数 (a_x,a_y,a_z)，

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}。$$

又如在转动群中，α 是 3 个有界的有序实数 θ,φ,ψ，其中 θ,φ 是转轴 $\boldsymbol{k}$ 的方位角，ψ 是转动角度，而且，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi<2\pi$，$0\leqslant\psi\leqslant\pi$。综上所述，群 G 的任一个元素，总可用在一定范围内变化的一个数 α 标记为 g_α，给出此范围中任一个数 α，就对应群 G 的一个元素。

定理1.1(重排定理) 设 $G=\{g_\alpha\}$，$u\in G$，当 α 取遍所有可能值时，乘积 ug_α 给出并且仅仅一次给出 G 的所有元素。

证明 先证 G 中任意元素 g_β 可以写成 ug_α 的形式。因为 $u^{-1}\in G$，所以 $u^{-1}g_\beta=g_\alpha\in G$，自然有 $g_\beta=ug_\alpha$。

再证 ug_α 当 α 不同时，给出 G 中不同的元素。用反证法，设 $\alpha\neq\alpha'$，而 $ug_\alpha=ug_{\alpha'}$，两边左乘 u^{-1} 得 $g_\alpha=g_{\alpha'}$，这与 α 可以唯一标记 G 中元素矛盾。故 $\alpha\neq\alpha'$ 时，$ug_\alpha\neq ug_{\alpha'}$。于是当 α 改变时，ug_α 给出并仅一次给出 G 的所有元素。定理证毕。

系 $g_\alpha u$ 在 α 取遍所有可能值时，也给出并且仅仅一次给出群 G 的所有元素。

重排定理是关于群的乘法的重要定理。它指出每一个群元素，在乘法表的每一行(或每一列)中被列入一次而且仅仅一次。

乘法表的每一行(或每一列)都是群元素的重新排列，不可能有两行(或两列)元素是相同的。

1.2 子群和陪集

定义1.2 设H是群G的一个子集，若对于与群G同样的乘法运算，H也构成一个群，则称H为G的子群。常记为$H\subset G$。

容易证明，群G的非空子集H是G的子群的充要条件为：

(1) 若$h_\alpha, h_\beta \in H$，则$h_\alpha h_\beta \in H$，

(2) 若$h_\alpha \in H$，则$h_\alpha^{-1} \in H$.

任意一个群G，其单位元素e和G本身都是G的子群，这两种子群称为显然子群或平庸子群。群G的非显然子群称为固有子群。若不特别说明，一般说子群是指固有子群。

例7 在定义群的乘法为数的加法时，整数全体构成的群是实数全体构成的群的子群。

例8 在x轴方向的平移$\{T_{a_x}\boldsymbol{i}\}$全体构成平移群$T(3)$的一个子群。

例9 绕固定轴$\boldsymbol{k}$的转动$C_k(\psi)$，$0\leqslant\psi<2\pi$是$SO(3)$群的一个子群。

定义1.3 n阶循环群是由元素a的幂a^k组成，$k=1,2,\cdots,n$,并且$a^n=e$,记为

$$z_n=\{a,a^2,\cdots,a^n=e\}.$$

循环群的乘法可以交换，故循环群是阿贝尔群。从n阶有限群G的任一个元素a出发，总可以构成G的一个循环子群z_k，

$$z_k=\{a,a^2,\cdots,a^k=e\}.$$

称a的阶为k，z_k是由a生成的k阶循环群。因为当$a=e$,e为G的一阶循环子群，这是显然子群。当$a\neq e$，$a^2\neq a$，如$a^2=e$，则由a生成2阶循环子群。如$a\neq e,a^2\neq e,\cdots,a^{k-1}\neq e$，用重排定理，知$a,a^2,\cdots,a^{k-1},a^k$为$G$中不同元素。通过增加$k$，再利

用重排定理，总可以在$k\leqslant n$中达到$a^k=e$。因此，从n阶有限群的任一元素a出发，总可以生成一个G的循环子群。

定义1.4 设H是群G的子群，$H=\{h_\alpha\}$。由固定$g\in G$，$g\notin H$，可生成子群H的左陪集

$$gH=\{gh_\alpha|h_\alpha\in H\},$$

同样也可生成H的右陪集

$$Hg=\{h_\alpha g|h_\alpha\in H\}.$$

有时也将陪集称为旁集。当H是有限子群时，陪集元素的个数等于H的阶。

定理1.2（陪集定理） 设群H是群G的子群，则H的两个左（或右）陪集或者有完全相同的元素，或者没有任何公共元素。

证明 设$u,v\in G$，$u,v\notin H$，考虑由u,v生成的H的两个左陪集，

$$uH=\{uh_\alpha|h_\alpha\in H\},$$

$$vH=\{vh_\alpha|h_\alpha\in H\},$$

设左陪集uH和vH有一个公共元素，

$$uh_\alpha=vh_\beta,$$

则

$$v^{-1}u=h_\beta h_\alpha{}^{-1}\in H.$$

根据重排定理，$v^{-1}uh_\gamma$当γ取遍所有可能值时，$v^{-1}uh_\gamma$给出群H的所有元素一次，并且仅仅一次，故左陪集$v[v^{-1}uh_\gamma]=uh_\gamma$与左陪集$vh_\gamma$重合。因此当左陪集$uH$和$vH$有一个公共元素时，$uH$和$vH$就完全重合。定理证毕。

同样的证法，也适用于右陪集。

定理1.3（拉格朗日（Lagrange）定理） 有限群的子群的阶，等于该有限群阶的因子。

证明 设G是n阶有限群，H是G的m阶子群。取$u_1\in G$，$u_1\notin H$，作左陪集u_1H。如果包括子群H的左陪集串H,u_1H不能穷尽整个群G，则取$u_2\in G,u_2\notin H,u_2\notin u_1H$，作左陪集$u_2H$。根据陪集定理，$u_2H$与$H$和$u_1H$完全不重合。继续这种做法，由于

G的阶有限，故总存在u_{j-1}，使包括子群H的左陪集串

$$H, u_1H, u_2H, \cdots, u_{j-1}H$$

穷尽了整个G。即群G的任一元素被包含在此左陪集串中，而左陪集串中又沒有相重合的元素，故群G的元素被分成 j 个左陪集，每个陪集有m个元素。于是

$$\text{群}G\text{的阶}n = (\text{子群}H\text{的阶}m) \times j.$$

定理证毕。

系 阶为素数的群沒有非平庸子群。

上面把群G的元素，分成其子群H的左陪集串的作法，不仅对证明拉格朗日定理有用，而且提供了一种把群G分割为不相交子集的方法。这是一种很有用的分割群的方法.同样，也可以把群G分割成其子群的右陪集串。

例10 D_3有子群$H_1 = \{e, a\}, H_2 = \{e, b\}, H_3 = \{e, c\}$和$H_4 = \{e, d, f\}$。$D_3$可按$H_1$分成左陪集串，$H_1 = \{e, a\}, bH_1 = \{b, f\}, cH_1 = \{c, d\}$。也可按$H_4$分成右陪集串，$H_4 = \{e, d, f\}, Ha = \{a, b, c\}$。

1.3 类与不变子群

定义1.5 设f, h是群G的两个元素，若有元素$g \in G$，使$gfg^{-1} = h$，则称元素h与f共轭。记为$h \sim f$。

共轭具有对称性，当$h \sim f$，则$f \sim h$。且$f \sim f$。

共轭还具有传递性，即当$f_1 \sim h, f_2 \sim h$，则有$f_1 \sim f_2$。因$f_1 = g_1 h g_1^{-1}$，$f_2 = g_2 h g_2^{-1}$，故

$$f_1 = g_1 g_2^{-1} f_2 g_2 g_1^{-1} = (g_1 g_2^{-1}) f (g_1 g_2^{-1})^{-1}.$$

定义1.6 群G的所有相互共轭的元素集合组成G的一个类。

由于共轭关系具有对称性和传递性，因此一个类被这类中任意一个元素所决定。只要给出类中任意一个元素f，就可求出f

类的所有元素，

$$f\text{ 类}=\{f' \mid f'=g_a f g_a^{-1}, g_a\in G\}.$$

一个群的单位元素e自成一类，因对任意$g_a\in G$，有$g_a e g_a^{-1}=e$。阿贝尔群的每个元素自成一类，因对任意$f, g_a\in G$，有$g_a f g_a^{-1}=f$。设元素f的阶为m，即$f^m=e$，则f类所有元素的阶都是m，因$(g_a f g_a^{-1})^m=g_a f^m g_a^{-1}=e$，对任意$g_a\in G$成立。

应该指出，当g_a取遍群G的所有元素时，$g_a f g_a^{-1}$可能不止一次地给出f类中的元素。如$f=e$，$g_a f g_a^{-1}$永远给出单位元素e。

由共轭关系具有传递性可以知道，两个不同的类没有公共元素。因此可以对群按共轭类进行分割。这种对群按共轭类进行的分割，每个类中元素个数不一定相同。而按子群的陪集对群进行的分割，每个陪集元素的个数是相同的。按类和按陪集分割群，是分割群的两种重要方式。

定理1.4 有限群每类元素的个数等于群阶的因子。

证明 设G是n阶有限群，g是G的任一个元素，看g类元素的个数。作G的子群H^g，

$$H^g=\{h\in G \mid hgh^{-1}=g\},$$

H^g由G中所有与g对易的元素h组成，即$hg=gh$。

对于$g_1, g_2\in G$，$g_1, g_2\notin H^g$，如果$g_1 g g_1^{-1}=g_2 g g_2^{-1}$，则$g_1$，$g_2$必属于$H^g$的同一左陪集$g_1H^g$。因为按定义，$g_1\in g_1H^g$。由$g_1 g g_1^{-1}=g_2 g g_2^{-1}$可得$(g_1^{-1}g_2)g(g_1^{-1}g_2)^{-1}=g$，故$g_1^{-1}g_2\in H^g$，$g_2\in g_1H^g$。

反之，如果g_1, g_2属于H^g的同一左陪集g_1H^g，必有$g_2=g_1h$，$h\in H^g$。于是有

$$g_2 g g_2^{-1}=g_1 h g h^{-1} g_1^{-1}=g_1 g g_1^{-1}.$$

因此g类中元素的个数，等于群G按H^g分割陪集的个数，也就是群G的阶的因子。