全国各类成人高考

专科起点升本科

高等数学（二）

考点精解与应试模拟

本书编写组

2011
年版

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国各类成人高考(专科起点升本科)

高等数学(二)
考点精解与应试模拟

Quanguo Gelei Chengren Gaokao
(Zhuanke Qidian Sheng Benke)
Gaodeng Shuxue (Er)
Kaodian Jingjie yu Yingshi Moni

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（二）考点精解与应试模拟：2011年版/本书编写组.—北京：高等教育出版社，2011.6
全国各类成人高考.专科起点升本科
ISBN 978-7-04-032114-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①本… Ⅲ.①高等数学-成人高等教育-升学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第075765号

策划编辑	孙淑华　雷旭波	责任编辑	雷旭波	封面设计	杨立新
版式设计	王　莹	责任校对	姜国萍	责任印制	刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京人卫印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	9	版　　次	2011年6月第1版
字　　数	210 000	印　　次	2011年6月第2次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	17.60元

物 料 号　32114-00

出版前言

为了帮助广大考生复习备考，我们根据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲（专科起点升本科）（2011 年版）》所规定的考试内容及要求，组织作者新编了这套《全国各类成人高考（专科起点升本科）考点精解与应试模拟（2011 年版）》，亦即《全国各类成人高考复习考试辅导教材（专科起点升本科）》的配套用书。本套书包括《政治考点精解与应试模拟》、《英语考点精解与应试模拟》、《大学语文考点精解与应试模拟》、《高等数学（一）考点精解与应试模拟》、《高等数学（二）考点精解与应试模拟》、《教育理论考点精解与应试模拟》、《民法考点精解与应试模拟》和《医学综合应试模拟》共 8 册。

本套书具有以下几个特点：

1. 解析精要，针对性强。"考点精解"部分力求以精练简洁的文字及精选的历年试题全面解说考试大纲之考试内容，并辅以解题技巧，以逆向思维的方式（以试题涵盖考点），力助考生把握考试内容，强化应试能力。"应试模拟"部分亦严格按照复习考试大纲所规定的题型、内容和难易比例编写，全面覆盖了《考试大纲》的考点。在每套应试模拟后，不仅给出了"参考答案"，而且还设有"解析"，即扼要指出该题所考查的能力、解题方法及考生解题时应注意的问题等，实用性、针对性强，可使考生通过做题而举一反三、融会贯通地掌握所学知识。

2. 结构新颖，学练结合。本套书各科的内容分为两大部分，第一大部分为考点精解，第二大部分为应试模拟（6 ~ 8 套应试模拟）；既有理论层面（基础知识）的精讲，又有实践层面（模拟试题）的精练；学练结合，便于经过第一轮基础知识复习的考生通过本套书的学与练，巩固考试大纲要求掌握的知识，从容应对考试。

3. 名师荟萃，质量可靠。本套书的作者均为长期从事成人高考命题研究的专家、学者及一线辅导教师，他们熟谙成人高考命题的思路、原则和方法及考生的知识基础状况，具有丰富的经验。

我们恳切希望广大考生能就本套书的编写出版提出意见和建议，并衷心祝愿广大考生取得优异成绩！

高等教育出版社

2011 年 4 月

目　　录

第一部分　考点精解

第二部分　应试模拟

第一部分　考点精解

第一章　极限和连续

一、常见的考试知识点

1. 极限

(1) 函数在一点处的左极限与右极限以及函数在一点处极限存在的充分必要条件.

(2) 极限的性质、极限的四则运算.

(3) 无穷小量的概念、性质及无穷小量阶的比较. 等价无穷小量代换及其应用.

(4) 两个重要极限及其应用.

2. 连续

(1) 函数在一点处连续与间断的概念及连续的判定.

(2) 闭区间上连续函数的性质.

3. 试卷内容比例

本章内容约占试卷总分的 15%，共计 22 分左右.

二、常用的解题方法与技巧

(一) 极限

求函数(或数列)极限的常用方法主要有：

(1) 利用极限的四则运算法则.

(2) 利用函数的连续性：若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(3) 对于“$\frac{0}{0}$”型不定式，可考虑用因式分解消去零因子法、用等价无穷小量代换法以及利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 等方法.

(4) 对于“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式，可考虑消去无穷因子法.

对于“$\frac{0}{0}$”型与“$\frac{\infty}{\infty}$”型的不定式，还可以用洛必达法则求解.

(5) 对于“$\infty-\infty$”型与“$0\cdot\infty$”型的不定式，应先化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型的不定式，再用上述方法求解.

（6）利用两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}(\text{或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}).$$

注意两个重要极限的结构式分别为：

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1,\ \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e},$$

其中方块“□”内可以为 x,也可以为 x 的函数,只要满足上述结构形式,公式都正确.

特别要记住下列常用的公式：

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+d}=\mathrm{e}^{ab},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+d}=\mathrm{e}^{ab},$$

其中的 a,b,d 为常数.

（7）利用无穷小量的性质. 主要是“无穷小量与有界变量之积为无穷小量”以及“无穷大量的倒数为无穷小量”.

（8）利用等价无穷小量代换. 利用等价无穷小量代换常能简化运算,但是等价无穷小量代换能在乘除法中使用,限于知识面的原因不要在加减法中使用. 常用的等价无穷小量代换有：

当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}.$$

上述各式也应该理解为：当 $x\to x_0(\infty)$ 时,$\square\to 0$,则有

$$\sin\square\sim\square,\ \tan\square\sim\square\text{等},$$

其中□内可以为 x,也可以为 x 的函数.

（9）求分段函数在分段点处的极限时,一定要分别求左极限与右极限,然后再判定极限是否存在.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

（二）连续

1. 判定 $f(x)$ 在点 x_0 处连续性的方法

先考察 $f(x)$ 是否为初等函数,x_0 点是否为 $f(x)$ 的定义区间内的点. 如果给定函数为分段函数,且 x_0 又是分段点,则需利用连续性定义来判定,特别是在分段点两侧函数表达式不同的时候,应该用左连续、右连续判定.

2. 判定 $f(x)$ 间断点的方法

连续性的三个要素之一得不到满足的点,即为函数的间断点,因此判定函数间断点的步骤通常是：

（1）考察 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义,若 $f(x_0)$ 无定义,则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

（2）如果 $f(x_0)$ 存在,再考察 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,则 x_0 必为 $f(x)$ 的间断点.

（3）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，再考察该极限值是否等于$f(x_0)$．如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则$x_0$必为$f(x)$的间断点．

三、常见的考试题型与评析

（一）无穷小量的概念及无穷小量的比较

1．典型试题

（1）（0202*）　当$x\to 0$时，$\ln(1+x)$与x比较是(　　)．

A．高阶的无穷小量　　　　B．等价的无穷小量

C．非等价的同阶无穷小量　　D．低阶的无穷小量

（2）（0112）　当$x\to 0$时，函数$f(x)$与$\sin 2x$是等价无穷小量，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=$________．

2．解题方法与评析

【解析】（1）选B．无穷小量阶的比较就是先求两个无穷小量之比的极限，再根据定义来确定选项．

解法1　利用等价无穷小量代换．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

解法2　利用重要极限Ⅱ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

（2）填1．利用等价无穷小量的定义．

（二）“$\dfrac{0}{0}$”型不定式的极限

1．典型试题

（1）（0521）　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$．

（2）（0621）　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$．

（3）（0721）　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$．

（4）（0821）　求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$．

（5）（0921）　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{x^3-1}$．

2．解题方法与评析

* 0202是指本题为成人高考专升本高等数学(二)考试2002年的第2题，1018是指本题为2010年的第18题，其余依此类推．

【解析】 “$\frac{0}{0}$”型不定式极限的求法是每年专升本试题中必考的内容之一，读者必须熟练掌握.

求“$\frac{0}{0}$”型不定式极限的常用方法是利用等价无穷小量代换以及洛必达法则求解. 对于极限式中有根式的，首先有理化，再进行计算较简捷.

常用的等价无穷小量代换有：当 $x\to0$ 时，

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,\ e^x-1\sim x.$$

上面这些式子的结构为：当□→0 时，sin□ ~ □，ln(1+□) ~ □，其余类似. 式中的“□”既可以是 x，也可以是 x 的函数，只要当 $x\to x_0$ 时有□→0 即可用上面的结构式.

例如：当 $x\to0$ 时，$\sin(x^2-x)\sim x^2-x$，□ $=x^2-x\to0$；

当 $x\to1$ 时，$\ln(x^2)=\ln(1+x^2-1)\sim x^2-1$；

当 $x\to0$ 时，$\ln(1-2x^2)\sim(-2x^2)$.

(1) $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\xlongequal{\text{因式分解消去零因子}}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2},$$

或 $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}\xlongequal{\text{消去零因子}}\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4},$$

或 $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to2}\frac{2x-1}{2x}=\frac{3}{4}.$$

(3) $$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+x-1)}{x-1}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

或 $$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\xlongequal{\text{利用重要极限}}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\ln(1+x-1)=\lim_{x\to1}\ln(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to1}(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}\right]=\ln e=1,$$

或 $$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

(4) $$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\xlongequal{\text{消去零因子}}\lim_{x\to3}(x+3)=6,$$

或 $$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to3}\frac{2x}{1}=6.$$

(5) $$\lim_{x\to1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-1}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2}=0.$$

【评析】 (1) 求“$\frac{0}{0}$”型不定式极限的常用方法有：

① 消去零因子法：此方法常用于分子与分母为多项式时的“$\frac{0}{0}$”型不定式.

② 等价无穷小量代换：此方法常用于一些可直接用等价无穷小量代换的函数，如题(3).

由于知识面的原因，希望考生不要在加减运算中使用等价无穷小量代换，只能在乘除运算中使用，否则会出现错误. 例如计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}$，分子是两个无穷小量相减，不能用等价无穷小量代换；分母是两个无穷小量相乘，可以用等价无穷小量代换. 即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，再用洛必达法则计算.

③ 洛必达法则：只要是满足洛必达法则使用条件的“$\dfrac{0}{0}$”型不定式，均可使用洛必达法则.

④ 洛必达法则是求“$\dfrac{0}{0}$”型不定式极限的有效方法之一，但不是万能的，也不一定是最简捷的方法. 求极限的最佳方法是无穷小量代换与洛必达法则的混合使用. 例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cdot x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\xlongequal{\text{重要极限}}\frac{1}{2},$$

或

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x+x\cos x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{1}{2},$$

显然，先用等价代换再用洛必达法则比直接用洛必达法则更简捷.

(2) 2001—2010 年的 10 年中，“$\dfrac{0}{0}$”型不定式极限共考了 10 次，属于必考题型.

(三) “$\dfrac{\infty}{\infty}$”型不定式的极限

1. 典型试题

(1) (0116)　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-3n}}{2n+1}$.

(2) (0308)　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x}=$________.

(3) (0701)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-3}=($　　$)$.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

(4) (0801)　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x-4}=($　　$)$.

A. $-\dfrac{1}{4}$　　B. 0　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 1

(5) (1011)　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x^2+5}=$________.

2. 解题方法与评析

【解析】　“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型不定式极限的计算，常用的办法是消去分子与分母中最高阶无穷因子或直接用洛必达法则求解.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-3n}}{2n+1}\xlongequal[\text{同除以 }n]{\text{分子与分母}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{3}{n}}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$.

（2）填$\dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2+x}\xlongequal[\text{同除以 }x^2]{\text{分子与分母}}\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{3},$$

或
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2+x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{6x+1}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

（3）选 B.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-3}\xlongequal{\text{同除以 }n}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2-\dfrac{3}{n}}=\frac{1}{2}.$$

（4）选 C.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x-4}\xlongequal{\text{同除以 }x}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}}{3-\dfrac{4}{x}}=\frac{2}{3},$$

或
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x-4}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

（5）填 0.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+5}\xlongequal{\text{同除以 }x^2}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{5}{x^2}}=0,$$

或
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+5}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2x}=0.$$

【评析】（1）“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型不定式极限的计算，主要是消去分子与分母中最高阶的无穷大因子或直接用洛必达法则求解. 在用洛必达法则求解时，一定要注意分子与分母是否满足洛必达法则定理中的条件. 本大题的题(1)与题(3)就不满足洛必达法则定理中的条件，因为分子与分母都是离散变量的函数，既不连续，也不可导.

（2）2001—2010 年“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型不定式极限共考了 4 次，出现频率较高.

（四）重要极限 I

1．典型试题

（1）（0403） 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=3$，则 $a=$(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2)(0501)　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=($　　$)$.

A. 0　　B. $\frac{1}{5}$　　C. 1　　D. 5

(3)(0612)　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=$________.

(4)(0712)　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=$________.

(5)(0812)　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$________.

(6)(1021)　计算$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

2. 解题方法与评析

【解析】　重要极限Ⅰ:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的结构式是:$\lim\limits_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$,式中的方块"□"既可以表示自变量 x,又可以是 x 的函数,而□→0 是表示当 $x\to x_0$(或∞)时必有□→0,只有符合上述结构式的极限才是 1. 例如:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-3x)}{x^2-3x}=1,\text{而}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-3x)}{x}\neq 1\ (=-3).$$

(1) 选 D. 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=3$,即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot a\xlongequal{\text{重要极限}}1\cdot a=3,$$

所以 $a=3$.

也可这样求解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}=a=3.$$

(2) 选 D.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\xlongequal{\text{重要极限Ⅰ}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5,$$

或

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5.$$

(3) 填 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}\xlongequal{\text{重要极限Ⅰ}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos 3x}=3,$$

或

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3.$$

(4) 填$\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}\xlongequal{\text{重要极限 I}}\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},$$

或

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

（5）填2.

（6）与题(4)相同.

【评析】　（1）重要极限 I 是特殊的“$\frac{0}{0}$”型不定式极限，所以前面介绍的求“$\frac{0}{0}$”型不定式极限的方法均适用. 上述各题均可用洛必达法则求解.

如果极限式中含有三角函数或反三角函数，应优先考虑用重要极限 I 求解.

（2）2001—2010 年关于重要极限 I 的极限共考了 9 次，基本为必考题型.

（五）重要极限 II

1. 典型试题

（1）（0118）　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x}$.

（2）（0521）　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}=$________.

（3）（0601）　$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=$（　　）.

A. 1　　B. e　　C. 2e　　D. e^2

（4）（0912）　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}=$________.

2. 解题方法与评析

【解析】　重要极限 II：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$（或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，或$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$）的结构式是$\lim\limits_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$，式中的方块“□”与重要极限 I 中的意义相同.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}\cdot(-6)}\xlongequal{\text{重要极限 II}}e^{-6}$.

（2）填e^{-3}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}\xlongequal{\text{重要极限 II}}e^{-3}.$$

（3）选 D.

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}\xlongequal{\text{重要极限 II}}e^{2}.$$

（4）填$e^{-\frac{1}{3}}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}\xlongequal{\text{重要极限 II}}e^{-\frac{1}{3}}.$$

【评析】　（1）如果极限式是“1^∞”型的不定式，应考虑用重要极限 II 求解，将其化为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$的形式，如题(1). 又如：计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$，需化为

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{-(x+1)(-1)-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{-(x+1)(-1)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{-1}$$
$$=e^{-1}\cdot 1=e^{-1},$$

或

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$
$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}=e^{-1}.$$

（2）2001—2010 年关于重要极限Ⅱ的极限共考了 6 次，出现频率非常高.

（六）连续性

1. 典型试题

（1）（9801）　设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）.

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

（2）（0007）　设函数 $f(x)=\begin{cases}ke^{2x}, & x<0,\\ 1+\cos x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $k=$________.

（3）（0209）　设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ a+x, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$________.

（4）（0613）　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x\leqslant 0,\\ 2, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

（5）（0811）　已知 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(0)=$________.

（6）（0913）　设函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x<1,\\ 2, & x=1,\\ x^2-1, & x>1,\end{cases}$ 则 $f[\lim\limits_{x\to 0}f(x)]=$________.

（7）（1013）　设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x^2+a, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的极限存在，则 $a=$________.

2. 解题方法与评析

【解析】（1）选 D. 根据函数在点 $x=0$ 处连续的定义：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，则有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3=f(0)=a.$$

（2）填 2. 函数在点 $x=0$ 处连续，则 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，其中

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}ke^{2x}=k,$$
$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+\cos x)=2,$$

$$f(0)=(1+\cos x)\big|_{x=0}=2,$$

所以 $k=2$.

(3) 填 1. 方法同题(2),可得 $a=1$.

(4) 填 2. 方法同题(2),可得 $a=2$.

(5) 填 1. 因为 $f(0)=(2x+1)\big|_{x=0}=1$.

(6) 填 8. 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(2x+3)=3,$$

则

$$f[\lim_{x\to 0}f(x)]=f(3)=(x^2-1)\big|_{x=3}=8.$$

(7) 填 1. 因为

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+a)=a,$$

则由 $f(0-0)=f(0+0)$,得 $a=1$.

【评析】 (1) 判定函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处连续,需依次检查连续性的三个要素. 如果 x_0 为 $f(x)$ 的分段点,且在 x_0 两侧 $f(x)$ 的表达式不同,需分别计算 x_0 的左极限与右极限以及在 x_0 处的函数值,从而确定在点 x_0 处的连续性.

(2) 2001—2010 年关于连续性的试题共考了 6 次,出现频率非常高.

第二章　一元函数微分学

一、常见的考试知识点

1. 导数与微分

(1) 导数的概念及几何意义,用定义求函数在一点处的导数值.

(2) 曲线上一点的切线方程和法线方程.

(3) 导数的四则运算及复合函数的求导.

(4) 隐函数的求导及对数求导法.

(5) 高阶导数的求法.

(6) 微分法则.

2. 洛必达法则及导数的应用

(1) 用洛必达法则求各类不定式的极限.

(2) 用导数求函数的单调区间.

(3) 函数的极值、最值.

(4) 曲线的凹凸性、拐点及曲线的水平渐近线与铅直渐近线.

(5) 证明不等式.

3. 试卷内容比例

本章内容约占试卷总分的 30%,共计 45 分左右.

二、常用的解题方法与技巧

(一) 导数与微分

1. 导数的定义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数的定义的标准形式与等价形式：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

特别地，当 $x_0=0$ 时，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0).$$

2. 导数的几何意义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 存在，则表明曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处存在切线，且切线的斜率为 $f'(x_0)$. 切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

如果 $f'(x_0)\neq 0$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

如果 $f'(x_0)=0$，则 $y=f(x_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的水平切线.

3. 可导与可微的关系

可微必定可导，反之也对，且

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=y'\big|_{x=x_0}\mathrm{d}x.$$

如果求微分 $\mathrm{d}y$，可以先求出 y'，再代入上式即可.

4. 求导数的常见方法

(1) 利用基本初等函数的求导公式与导数的四则运算法则.

(2) 利用复合函数链式法则，为了不遗漏每一个复合层次，可以由外到里一次求得一个层次的导数.

(3) 对隐函数求导时，只需将所给式子两端出现的 y 当做中间变量，两端分别关于 x 求导，整理并解出 y'.

(4) 对数求导法，主要解决幂指函数求导与连乘除、乘幂形式的函数的求导问题.

(二) 导数的应用

1. 利用导数判定函数 $f(x)$ 单调性的通常步骤

(1) 求出 $f(x)$ 的定义域.

(2) 求出 $f'(x)$，令 $f'(x)=0$，求出 $f(x)$ 的所有驻点，并求出 $f(x)$ 不可导的点.

(3) 判定上述两相邻点间 $f'(x)$ 的符号，其中 $f'(x)>0$ 时 x 的取值范围即为 $f(x)$ 单调递增的范围；$f'(x)<0$ 时 x 的取值范围即为 $f(x)$ 单调递减的范围.

2. 利用导数判定函数 $f(x)$ 极值的通常步骤

(1) 求出 $f(x)$ 的定义域.

(2) 求出 $f'(x)$，令 $f'(x)=0$，求出 $f(x)$ 的所有驻点，并求出定义域内 $f(x)$ 不可导的点.

(3) 若 $f(x)$ 在上述点的某邻域内可导，可以利用极值的第一充分条件判定上述点是否为极值点.

(4) 若在 $f(x)$ 的驻点处 $f(x)$ 二阶可导，且二阶导数易求，则可以利用极值的第二充分条件判定驻点是否为极值点.

3. 利用导数求连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大、最小值的通常步骤

(1) 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内所有的驻点(即 $f'(x)=0$ 的点)及不可导的点：$x_1,\cdots,x_k$.

(2) 比较 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_k),f(a),f(b)$，其中最大值即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小值即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

4. 利用导数判定曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性与拐点的通常步骤

(1) 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶导数为 0 的点及二阶导数不存在的点.

(2) 判定 $f''(x)$ 在上述点的两侧是否异号. 若在 x_0 两侧 $f''(x)$ 异号，则点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

在 $f''(x)<0$ 的 x 取值范围内，曲线 $y=f(x)$ 为凸的；

在 $f''(x)>0$ 的 x 取值范围内，曲线 $y=f(x)$ 为凹的.

三、常见的考试题型与评析

(一) 利用导数的定义求极限或求函数在某点的导数值

1. 典型试题

(1) (0222)　设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+2x)-f(1)}{x}$.

(2) (0303)　已知函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$ 等于(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

(3) (0702)　已知 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ 等于(　　).

A. −2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

(4) (0802)　已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 6

2. 解题方法与评析

【解析】　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数的定义，其结构式为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}\xlongequal{\text{极限存在}}f'(x_0).$$

式中的"□"可以是 Δx(或 h)，也可以是 Δx(或 h)的函数，只要符合上式结构即为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数. 如果不符合上式结构，则应通过变形或化简后变成上式结构才成立.